Recense

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 1, 74–79

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102556

RECENSE

L. Půst, A. Tondl: **Úvod do theorie nelineárních a quasiharmonických kmitů mechanických soustav.** Vydalo Nakladatelství ČSAV, Praha 1956, 174 stran, cena 19,70 Kčs.

Tato kniha splňuje svůj úkol seznámit čtenáře s nejdůležitějšími výsledky theorie nelineárních a quasiharmonických kmitů. Tento obor jest u nás málo známý. Byl rozvinut v posledních desetiletích na základě prací KRYLOVA, BOGOLJUBOVA, ANDRONOWA, POINCARÉHO, VAN DER POLA, WHITTAKERA a jiných. Důležitost uvedených method jest nejen v tom, že nám dávají přesnější výsledky než obvykle užívaná methoda linearisace diferenciálních rovnic, ale proto, že vystihuje zjevy, na jejichž vysvětlení methoda linearisace diferenciálních rovnic zcela selhává. Jedním z nejdůležitějších zjevů tohoto druhu jsou samobuzené kmity. Soustava se záporným tlumením v okolí rovnovážné polohy, k níž jest připojen zdroj o stálé vydatnosti se může ustálit na kmitavém pohybu a sama si odebírat energii ze zdroje. Autoři si nekladli za úkol odvození uvedených method a jejich přesné propracování, takže čtenáři s hlubším zájmem doporučuji prostudovat literaturu, na kterou jsou učiněny odkazy. Kniha jest rozdělena na dvě části:

Prvou část zpracoval L. PŮST, v ní jsou vyšetřovány soustavy popsané diferenciální rovnicí:

$$\ddot{y} + k\dot{y} + cy + f(\dot{y}, y) = F(t) ,$$

kde $f(\dot{y}, y)$ jest analytická funkce proti členu $k\dot{y} + cy$ dosti malá a $F(t)$ může býti součtem několika harmonických složek. Vyšetřování vlastních kmitů soustavy vede na hledání periodického řešení homogenní rovnice:

$$\ddot{y} + k\dot{y} + cy + f(\dot{y}, y) = 0 .$$

Autor uvádí několik method na řešení tohoto problému. Prvá methoda je založena na odhadu tvaru kmitu. Na příklad u rovnice:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 f(y) = 0$$

formálně dosadíme výraz

$$y = \sum_n a_n \cos (n\omega t + \varphi_n)$$

a snažíme se zvolit a_n, φ_n, ω tak, aby původní rovnice i počáteční podmínky byly splněny.

Druhou methodou jest Poincarého methoda malého parametru, která vychází z rovnic tvaru:

$$\ddot{y} + \omega_0 y + \varepsilon f(y, \dot{y}) = 0 . \tag{1}$$

Po jistých úpravách hledáme řešení ve tvaru:

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon\, y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots ,$$

kde funkce $y_i(t)$ počítáme z jednodušších lineárních rovnic. Pro dosti malá $\varepsilon > 0$ lze skutečně dokázat konvergenci těchto řad. Tato methoda se hodí zvláště pro matematické zkoumání. O této methodě, kterou lze použít i na obecnější typy rovnic, se čtenář podrobněji dočte v knize [1].

Pro výpočet je výhodnější methoda Krylova a Bogoljubova. Při této methodě se řešení rovnice (1) předpokládá ve tvaru:

$$y = a \cos (\omega_0 t + \Phi) ,$$

kde a, Φ jsou funkce času. Tím, že mezi hledanými funkcemi a, Φ zvolíme ještě jednu podmínku, převedeme rovnici (1) na systém dvou jednodušších diferenciálních rovnic pro a, Φ, jejichž pravé strany závisí pouze na a.

Tato methoda je detailně propracována v knihách [2] a [3].

Podobná jest methoda van der Pola. Zde se používá rotujícího systému os a_1, a_2.

Položíme:

$$y = a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \sin \omega_0 t ,$$
$$\dot{y} = -\omega_0 a_1 \sin \omega_0 t + \omega_0 a_2 \cos \omega_0 t .$$

Místo y považujeme za neznámé a_1, a_2, tím rovnici (1) převedeme na systém dvou diferenciálních rovnic pro a_1, a_2. Tato methoda se zvláště hodí pro vynucené kmity, kde známe předem frekvenci.

Další methoda jest převedení nelineární rovnice na ekvivalentní lineární rovnici. Pro nelineární rovnici (1) bude výraz (2) [kde a, Φ jsou nyní konstanty], splňovat v prvém přiblížení jak tuto nelineární rovnici, tak lineární rovnici s vhodně zvolenými koeficienty.

Srovnáním výrazů pro změnu amplitudy a změnu kruhové rychlosti řešení [2] u lineární a nelineární rovnice, obdržíme vzorce pro koeficienty ekvivalentní diferenciální rovnice. Tyto methody můžeme také upravit pro řešení nehomogenních diferenciálních rovnic. S methodou Duffingovou a Rauscherovou se můžeme také seznámit v knize [4]. V případě, že pravá strana diferenciálních rovnic je součtem několika harmonických složek, ukazuje autor na konkretním případě jak jedna harmonická část řešení potlačuje ostatní. Podobný případ nastává, jestliže vlastní kmity mají více harmonických složek. Má-li budící síla frekvenci některé vyšší harmonické složky, může se soustava rozkmitat frekvencí základní harmonické složky vlastních kmitů. Tento zjev nazýváme subharmonickou resonancí.

Důležité jest vyšetření stability pohybu.

Definice stability ve smyslu Ljapunova:

Řešení $y(t)$ rovnic (1) nazveme stabilní, jestliže k libovolně malému $\varepsilon > 0$, můžeme vždy najít $\delta > 0$, že pro každé řešení $z(t)$ rovnic (1), jehož počáteční podmínky splňují nerovnosti $|y(0) - z(0)| < \delta$, $|\dot{y}(0) - \dot{z}(0)| < \delta$, stále platí $|y(t) - z(t)| < \varepsilon$, $|\dot{y}(t) - \dot{z}(t)| < \varepsilon$.

Definice orbitální stability:

Nechť řešení $y(t)$ rovnice (1) jest periodické. Položme $v = \dot{y}$. Potom křivka $y = y(t)$, $v = \dot{y}(t)$ v rovině o osách y, v jest uzavřená. Řešení $y(t)$ nazveme orbitálně stabilní, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ můžeme najít $\delta > 0$ tak, že pro řešení $z(t)$ rovnic (1), pro které bod $[z(0), (\dot{z}0)]$ jest od uzavřené křivky vzdálen o méně než δ, platí, že bod $[z(t), \dot{z}(t)]$ jest stále od uzavřené křivky vzdálen o méně než ε. Vlastní a samobuzené kmity jest výhodné zkoumat s hlediska orbitální stability, poněvadž nezáleží na změnách frekvence, ale jen na změnách amplitudy. U vynucených kmitů závisí i na změnách frekvence, poněvadž fázové posunutí vynucených kmitů od budící síly má za následek porušování kmitů. Toto vyšetření jest velmi důležité, poněvadž v případě nestability nepatrné posunutí z daného stavu se v průběhu času zvětšuje a systém se vzhledem k vnějším vlivům nemůže udržet na takovém periodickém řešení.

Autor uvádí podmínky stability v obou případech.

Druhá část knihy, kterou zpracoval A. Tondl, pojednává o quasiharmonických kmitech. Soustavu nazýváme quasiharmonickou, jestliže některé její parametry jako na příklad:

setrvačnost, tlumení, tuhost jsou periodickou funkcí času. Takovéto soustavy obvykle vedou na diferenciální rovnici tvaru:

$$\ddot{y} + [\lambda + \gamma \Phi(\omega t)]\, y = 0\,,$$

kde $\Phi(\tau)$ jest periodická funkce. Jestliže $\Phi(\tau)$ jest sudá funkce, pak tuto rovnici nazýváme Hillovou. Pro řešení této rovnice jest uvedena methoda Hillova, která však vede na nekonečný systém lineárních rovnic. Lze-li použít Poincarého methody rozvoje podle malého parametru, potom jest tato methoda výhodnější. Tento způsob jest popsán v knize [5].

Podrobněji je diskutována Mathieuova diferenciální rovnice:

$$\ddot{y} + (\lambda - 2\gamma \cos 2\tau)\, y = 0$$

a to i v nehomogenním tvaru. Tato rovnice je důležitá pro četné aplikace. Pro řešení této rovnice jest zde uvedena mimo Hillovu methodu ještě Inceho methoda, která jest však vhodná jen pro stabilní řešení. Pro případ nestabilního řešení jest zde uvedena jiná methoda. Při zjišťování stability různých řešení u Hillovy rovnice se ukazuje, že pro každé $\gamma \neq 0$, můžeme hodnoty λ rozdělit na intervaly, v nichž obecné řešení bude střídavě stabilní a nestabilní. Jestliže se γ blíží k nule, pak krajní body intervalů nestability se blíží k hodnotám $\lambda = \left(\frac{n}{2}\right)^2$. Autor zde uvádí pro výpočet vhodnou methodu k určení krajních bodů intervalů nestability. Autor se zmiňuje ovšem i o jiných kriteriích stability vhodných pro quasiharmonické rovnice.

V dalších kapitolách aplikuje A. Tondl methody předchozích kapitol na důležité případy.

Nejprve se zabývá soustavou s periodicky proměnnou tuhostí, s konstantní setrvačností a tlumením, která jest buzena vnější silou. Autor sleduje poměr maximální výchylky ke střední statické výchylce v závislosti na různých druzích budící síly.

V případě dynamické stability tyče zatížené periodicky proměnnou silou, zjišťuje prvé dvě oblasti nestability a určuje amplitudy příčných kmitů.

V případě torsních kmitů zalomených hřídelů, autor srovnává výsledky výpočtu oblastí nestability pomocí Poincarého methody s obvyklým způsobem výpočtu kritických otáček. Dochází k výsledku, že maximální výchylka je větší než amplituda příslušné soustavy s konstantními parametry. Tento fakt jest také experimentálně doložen.

V knize [2], která vyšla později, jest uvedena zajímavá methoda přiblížení v průměru, která se zvláště hodí pro systémy diferenciálních rovnic, jejichž pravé strany jsou periodické funkce času.

Vzhledem k tomu, že kniha L. Půsta, A. Tondla uvádí methody v souladu s jejich použitelností na různé problémy nelineární mechaniky, může býti dobrým pomocníkem každému, kdo se tímto oborem zabývá.

Literatura:

[1] *И. Г. Малкин: Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.* Госуд. Изд. Тех.-Теор. Лит., Ленинград-Москва 1949.

[2] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский: Асимптотические методы в теории нелинейных колебний.* Госуд. Изд. Тех.-Теор. Лит., Ленинград-Москва 1955.

[3] *Ю. А. Митропольский: Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах.* Изд. АН СССР, Москва 1955.

[4] *J. J. Stoker: Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems.* London 1950.
[5] *И. Г. Малкин: Теория устойчивости движения.* Госуд. Изд. Тех.-Теор. Лит., Ленинград-Москва 1952.

Ivo Vrkoč

Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский: **Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.** (*N. N. Bogoljubov, Ju. A. Mitropolskij:* Asymptotické methody v theorii nelineárních kmitů.) Vydalo nakladatelství Gostechizdat, Moskva 1955, 447 stran, cena 13 r. 40 k.

Tato kniha jest převážně věnována dvěma methodám nelineární mechaniky. Jest to methoda rozkladu řešení v asymptotické řady podle mocnin parametru a methoda přiblížení v průměru.

Methoda rozkladu řešení v asymptotické řady byla nejprve publikována N. N. Bogoljubovem a N. M. Krylovem v roce 1937. Od té doby však byla značně rozvinuta. Zde ji autoři aplikují nejdříve na diferenciální rovnici:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

a jest založena na následující úvaze:

Položíme-li v diferenciální rovnici $\varepsilon = 0$, pak její řešení jest

$$x = a \cos \psi ,$$

kde amplituda a i úhlová frekvence $\frac{d\psi}{dt} = \omega$ jsou konstantní. Jestliže $\varepsilon \neq 0$ pak nelineární člen bude vyvolávat kmity a systematické změny amplitudy u řešení této rovnice. Vzhledem k tomu, že také úhlová frekvence $\frac{d\psi}{dt}$ bude závislá na amplitudě, budeme řešení hledat ve tvaru:

$$x = a \cos \psi + \varepsilon\, u_1(a, \psi) + \varepsilon^2\, u_2(a, \psi) + \dots ,$$

kde $u_i(a, \psi)$ jsou periodické funkce ψ s periodou 2π. Průběh amplitudy a fázového posunutí se určí z diferenciálních rovnic:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\, A_1(a) + \varepsilon^2\, A_2(a) + \dots$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon\, B_1(a) + \varepsilon^2\, B_2(a) + \dots$$

Vzhledem k rychle rostoucí složitosti vzorců pro $u_i(a, \psi)$, $A_i(a)$, $B_i(a)$ jest nutné se omezit na prvé přiblížení:

$$x = a \cos \psi ,$$

kde a, ψ jsou dány diferenciálními rovnicemi:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\, A_1(a) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\omega \sin \varphi) \sin \varphi \, d\varphi ,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon\, B_1(a) = \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\omega \sin \varphi) \cos \varphi \, d\varphi .$$

Jestliže pravá strana diferenciálních rovnic závisí periodicky na t s frekvencí ν, jest třeba rozlišovat resonanční a neresonanční případ. Resonance nastává, jestliže frekvence vnější síly ν jest velmi blízká výrazu $\frac{p}{q}\,\omega$, kde p, q jsou celá čísla. Prakticky mají význam tři případy resonance $p = q = 1$, $p = 1$, q jest malé celé číslo, $q = 1$, p jest malé číslo. V ostatních případech nebo jsou-li p, q velká čísla, jest resonance zanedbatelná. Upozorňuji čtenáře, že tato methoda jest také rozpracována v knize *Ю. А. Митропольский: „Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах“*. V této knize jest ukázáno, že tuto methodu lze za jistých předpokladů použít i na systém rovnic tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} a_{ij}(\tau)\,\dot{q}_i\right) + \sum_{i=1}^{N} b_{ij}(\tau) q_i = \varepsilon\, Q_j(\tau, \Theta, q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)\,, \quad j = 1, \ldots, N\,,$$

kde Q_j jsou periodické vzhledem k Θ s periodou 2π a platí $\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} = \nu(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$. Tato methoda jest zvláště výhodná tam, kde potřebujeme znát průběh amplitudy nebo frekvence řešení. Pomocí této methody lze určiti periodické řešení a jejich stabilitu. Jest zde také ukázáno její použití na určení oblastí nestability Mathieuovy rovnice.

Druhou methodou jest methoda přiblížení v průměru, kterou lze aplikovat na systémy diferenciálních rovnic:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\, X_i(t, x_1, \ldots, x_n)\,, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

jestliže existují limity

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_i(t, x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}t = X_{i0}(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Tyto limity na příklad existují, jestliže pravé strany jsou periodické nebo skoroperiodické funkce času.

Pravé strany potom můžeme rozložit na člen nezávislý na t a na malé harmonické členy:

$$X_i(t, x_1, \ldots, x_n) = X_{i0}(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{\infty} X_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Tedy také řešení x_i můžeme rozložit na ξ_i, což jest řešení diferenciálních rovnic:

$$\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t} = X_{i0}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad i = 1, \ldots, n,$$

a na malé harmonické složky.

V prvém přiblížení stačí vzít místo přesného řešení původního systému právě tyto složky ξ_i, které se určí z jednodušších diferenciálních rovnic. Methodu přiblížení v průměru lze použít i na systém tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = X_k(\alpha, x_1, \ldots, x_n)\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \lambda\, \omega(x_1, \ldots, x_n) + A(\alpha, x_1, \ldots, x_n)\,,$$

kde λ nabývá velkých hodnot, X_k a A jsou periodické funkce α.

Výhoda této methody spočívá zvláště v tom, že prvé a vyšší přiblížení počítáme z diferenciálních rovnic, které již nezávisí na t. Přesnému rozboru této methody jest věnována poslední kapitola.

V druhé kapitole seznamují autoři čtenáře s některými problémy kvalitativní theorie diferenciálních rovnic, hlavně jde o určení singulárních bodů a existenci limitních cyklů.

Těmito methodami si lze učiniti orientační představu o průběhu integrálních křivek dané rovnice s malou nelinearitou v celé rovině.

Dále jest zde uvedena grafická methoda Liénarda a methoda Dorodnicova pro rovnice van der Pola:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0\,,$$

jestliže ε nabývá velkých hodnot.

Vyjma poslední kapitoly jest kniha psána tak, že čtenář nepotřebuje hlubokých matematických znalostí a seznamuje čtenáře s velmi užitečnými methodami v nelineární mechanice.

Ivo Vrkoč