Daniel Mayer; Josef Schmidtmayer

Vyjádření inversní matice konvergentní geometrickou řadou

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 1, 24–37

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102550`

VYJÁDŘENÍ INVERSNÍ MATICE KONVERGENTNÍ GEOMETRICKOU ŘADOU

DANIEL MAYER, JOSEF SCHMIDTMAYER

(Došlo dne 12. března 1956.) DT:512.831:517.521

Za jistých omezujících podmínek lze vyjádřit inversní matici nekonečnou konvergentní řadou matic. Pro praktické aplikace, zejména v elektrotechnice, stačí často omezit se na několik málo prvních členů řady; příslušná aproximace inversní matice bývá formálně jednoduchá a dostatečně přesná.

1. Úvod

S výpočtem inversní matice se setkáváme v tensorové analyse elektrických obvodů, a to tehdy, známe-li již matici impedanční a hledáme-li matici admitanční. Je-li počet dimensí impedančního tensoru větší než tři, bývá výpočet velmi pracný a výsledek je často nepřehledný. Výjimku tvoří ty případy, kdy má impedanční matice větší počet nulových prvků, nebo kdy má zvláštní tvar (je souměrná, trojúhelníková a pod.); pro tyto případy byly vypracovány některé jednodušší methody výpočtu inversní matice.

Zde popíšeme vyjádření admitanční matice konvergentní nekonečnou řadou matic. Methoda platí za předpokladu, že impedanční matice splňuje dále uvedené podmínky. Omezíme-li se na jistý počet prvních členů řady matic, dospějeme k matici, jejíž prvky jsou aproximacemi odpovídajících prvků inversní matice. Významnou předností methody je podstatné zjednodušení výpočtu. Jestliže prvky impedanční matice jsou tvořeny funkcemi jedné nebo více proměnných, s kterýmžto případem se běžně setkáváme na příklad v theorii točivých elektrických strojů, jsou aproximující výrazy pro prvky příslušné admitanční matice formálně značně jednodušší, než přesné výrazy. V tom tkví další výhoda popisované methody, jež se plně uplatní při graficko-početní interpretaci admitanční matice (t. j. při sestrojování kruhových diagramů).

2. Podmínky existence a výpočet inversní matice

Budiž dána čtvercová matice

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11}; & Z_{12}; & Z_{13}; & \ldots; & Z_{1n} \\ Z_{21}; & Z_{22}; & Z_{23}; & \ldots; & Z_{2n} \\ Z_{31}; & Z_{32}; & Z_{33}; & \ldots; & Z_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_{n1}; & Z_{n2}; & Z_{n3}; & \ldots; & Z_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

řádu n a předpokládejme, že $\mathbf{Z}$ je regulární, t. j. $|\mathbf{Z}| \neq 0$. O prvcích matice $\mathbf{Z}$, jež jsou obecně komplexní, budeme v dalším trvale předpokládat, že modul každého hlavního prvku je větší než modul kteréhokoliv prvku stojícího v témže řádku a sloupci (t. j. $|Z_{ii}| > |Z_{ik}|$, $|Z_{ii}| > |Z_{ki}|$, $Z_{ii} \neq 0$ pro všechna i, k).

Tak na příklad pro netransformovanou impedanční matici obecného elektrického stroje jest $\mathrm{Re}\,(Z_{ij}) = \mathrm{Re}\,(Z_{ji}) = 0$, $\mathrm{Im}\,(Z_{ij}) = \omega M_{ij}$, $\mathrm{Im}\,(Z_{ji}) = \omega M_{ji}$ pro $i \neq j$, kdežto $\mathrm{Re}\,(Z_{ii}) = r_{ii}$, $\mathrm{Im}\,(Z_{ii}) = \omega L_{ii}$. Při tom je $|M_{ji}| < |L_{ii}|$, $|M_{ij}| < |L_{ii}|$ vlivem rozptylu (r_{ii} a L_{ii} značí ohmický odpor a vlastní indukčnost vinutí označeného číslem i, M_{ij} vzájemnou indukčnost vinutí označených čísly i, j).

Impedanční matici (1) vyjádříme rozdílem

$$\mathbf{Z} = \mathbf{D} - \mathbf{Q}\,, \tag{2}$$

kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} Z_{11}; & 0; & 0; & \ldots; & 0 \\ 0; & Z_{22}; & 0; & \ldots; & 0 \\ 0; & 0; & Z_{33}; & \ldots; & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0; & 0; & 0; & \ldots; & Z_{nn} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

kdežto matice

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0; & -Z_{12}; & -Z_{13}; & \ldots; & -Z_{1n} \\ -Z_{21}; & 0; & -Z_{23}; & \ldots; & -Z_{2n} \\ -Z_{31}; & -Z_{32}; & 0; & \ldots; & -Z_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -Z_{n1}; & -Z_{n2}; & -Z_{n3}; & \ldots; & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Jelikož podle předpokladu $Z_{ii} \neq 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$, existuje k $\mathbf{D}$ inversní matice

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{11}}; & 0; & 0; & \dots; & 0 \\ 0; & \frac{1}{Z_{22}}; & 0; & \dots & 0 \\ 0; & 0; & \frac{1}{Z_{33}}; & \dots; & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0; & 0; & 0; & \dots; & \frac{1}{Z_{nn}} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

takže rovnost (2) lze přepsat ve tvaru

$$\mathbf{Z} = \mathbf{D}(\mathbf{J} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}),$$

nebo stručně

$$\mathbf{Z} = \mathbf{D}(\mathbf{J} - \mathbf{S}), \tag{6}$$

kde $\mathbf{J}$ je jednotková matice řádu n a [podle (4) a (5)]

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0; & -\frac{Z_{12}}{Z_{11}}; & -\frac{Z_{13}}{Z_{11}}; & \dots; & -\frac{Z_{1n}}{Z_{11}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}}; & 0; & -\frac{Z_{23}}{Z_{22}}; & \dots; & -\frac{Z_{2n}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{31}}{Z_{33}}; & -\frac{Z_{32}}{Z_{33}}; & 0; & \dots; & -\frac{Z_{3n}}{Z_{33}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{Z_{n1}}{Z_{nn}}; & -\frac{Z_{n2}}{Z_{nn}}; & -\frac{Z_{n3}}{Z_{nn}}; & \dots; & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Z rovnosti (6) vyjádříme admitanční matici $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$ užitím pravidla o inversi součinu dvou matic,[1]) takže

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = (\mathbf{J} - \mathbf{S})^{-1}\,\mathbf{D}^{-1}. \tag{8}$$

Protože matice $\mathbf{J}$ a $(\mathbf{J} - \mathbf{S})^{-1}$ jsou navzájem zaměnitelné, t. j. $\mathbf{J}(\mathbf{J} - \mathbf{S})^{-1} = (\mathbf{J} - \mathbf{S}^{-1})\,\mathbf{J}$, lze vyjádřit rovnici (8) ve tvaru

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J} - \mathbf{S}}\,\mathbf{D}^{-1}. \tag{9}$$

Podíl $\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J} - \mathbf{S}}$ je formálně obdobou podílu $\frac{1}{1 - s}$, jejž lze interpretovat jako součet nekonečné konvergentní geometrické řady číselné, t. j.

$$\frac{1}{1 - s} = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots, \tag{10}$$

ovšem za předpokladu, že $|s| < 1$.

[1]) Jestliže $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, je $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, pokud všechny naznačené operace mají smysl. Podrobněji viz na př. [1], str. 76.

Lze ukázat, že za jistých okolností je správnou i rovnost

$$\frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{J}-\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^2+\boldsymbol{S}^3+\ldots, \tag{11}$$

kde $\boldsymbol{S}^p$ ($p \geqq 1$, celé) značí p-tou mocninu matice $\boldsymbol{S}$.

Platí[2])

Věta 1. *Nutnou a postačující podmínkou pro platnost vztahu* (11) *je, aby*

$$\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{S}^m=\boldsymbol{0}\,. \tag{12}$$

Důkaz.

Podmínka nutná. Označíme-li $\boldsymbol{S}^m=[s_{ik}^{(m)}]$, je

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^2+\ldots=[1+s_{ik}^{(1)}+s_{ik}^{(2)}+\ldots]=[b_{ik}]\,. \tag{13}$$

Nutnou podmínkou pro existenci součtu $\boldsymbol{B}$ řady (11) je existence všech b_{ik} v (13) pro každé $i, k=1, 2, \ldots, n$. Avšak nutnou podmínkou pro existenci $b_{ik}=1+\sum_{m=1}^{\infty}s_{ik}^{(m)}$ je splnění podmínek

$$\lim_{m\to\infty}s_{ik}^{(m)}=0 \text{ pro všechna } i, k\,.^{3})$$

Proto je (12) nutnou podmínkou pro existenci součtu $\boldsymbol{B}$.

Podmínka postačující. Předpokládejme, že platí (12) a pišme formálně

$$\boldsymbol{B}_m=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^2+\ldots+\boldsymbol{S}^m \quad (m>1\text{, celé})\,. \tag{14}$$

Násobme rovnici (14) zleva maticí $\boldsymbol{S}$, takže

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}_m=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^2+\ldots+\boldsymbol{S}^m+\boldsymbol{S}^{m+1} \tag{15}$$

a odečtěme rovnici (15) od rovnice (14):

$$\boldsymbol{B}_m-\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}_m=\boldsymbol{J}-\boldsymbol{S}^{m+1}\Rightarrow(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{S})\,\boldsymbol{B}_m=\boldsymbol{J}-\boldsymbol{S}^{m+1}\,,$$

odkud

$$\boldsymbol{B}_m=(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{S}^{m+1})\,. \tag{16}$$

Násobíme-li obdobně rovnici (14) zprava maticí $\boldsymbol{S}$, dostaneme nakonec

$$\boldsymbol{B}_m=(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{S}^{m+1})(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{S})^{-1}\,. \tag{17}$$

Z rovnic (16) a (17) je zřejmé, že maticoví činitelé na pravých stranách jsou zaměnitelní, takže lze psáti

$$\boldsymbol{B}_m=\frac{\boldsymbol{J}-\boldsymbol{S}^{m+1}}{\boldsymbol{J}-\boldsymbol{S}}\,. \tag{18}$$

---

[2]) Viz na př. [5], str. 66.

[3]) Nutnou podmínkou pro existenci součtu nekonečné řady čísel $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je, aby $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Vzhledem k rovnici (12) je však

$$\mathbf{B} = \lim_{m\to\infty} \mathbf{B}_m = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{J} - \mathbf{S}^{m+1}}{\mathbf{J} - \mathbf{S}} = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J} - \mathbf{S}}. \tag{19}$$

Tím je důkaz proveden.

Výsledky, kterých jsme až doposud dosáhli, shrnuje

Věta 2. *Matici* $\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Y}$ *inversní k matici* $\mathbf{Z} = \mathbf{D} - \mathbf{Q}$ [*viz rovnice* (2) *až* (4)] *lze za jistých okolností vyjádřit konvergentní geometrickou řadou matic*

$$\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Y} = (\mathbf{J} + \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 + \ldots)\, \mathbf{D}^{-1}, \tag{20}$$

kde

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}.$$

Nutnou a postačující podmínkou pro platnost vztahu (20) je

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{S}^m = \mathbf{0}. \tag{12}$$

S hlediska technických a fysikálních aplikací je vyjádření inversní matice rovnicí (20) velmi výhodné, pokud ovšem je použitelné. Nejobtížnějším bodem je rozhodování o konvergenci maticové řady v rovnici (20), resp. o platnosti rovnice (12). Theoreticky řeší tuto otázku věta, kterou uvedeme bez důkazu (viz na př. [2]).

Věta 3. *Nutnou a postačující podmínkou platnosti rovnice*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{S}^m = \mathbf{0} \tag{12}$$

je, aby kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{S}$

$$|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{J}| = 0 \tag{21}$$

ležely vesměs uvnitř kružnice o jednotkovém poloměru.

Protože stupeň charakteristické rovnice (21) je roven řádu n matice $\mathbf{Z}$, může být v uvažovaných případech ($n > 3$) přesné vyšetření jejích kořenů s hlediska numerického počítání značně pracné. Ve smyslu věty 3 nám však jde jen o zjištění, zda tyto kořeny jsou v absolutní hodnotě vesměs menší než jednička. Řešení tohoto problému si podrobněji všimneme v následujícím odstavci.

3. Podrobný rozbor podmínek konvergence

3,1. Přibližná kriteria. Podmínky postačující.

Má-li mít smysl vyjádření inversní matice (20) ve tvaru nekonečné geometrické řady, musí platit rovnice (12); to pak také stačí ke konvergenci.

3,1.1. Podmínky pro prvky matic.

Všimněme si nejprve postačujících podmínek ve tvaru odhadu modulů pro prvky matice $\mathbf{S}$, resp. přímo matice $\mathbf{Z}$. Výhoda takových odhadů spočívá v tom, že není třeba znát kořeny charakteristické rovnice (21).

A. Matice $\mathbf{S}$ má podle (7) tvar

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0; & s_{12}; & s_{13}; & \dots; & s_{1n} \\ s_{21}; & 0; & s_{23}; & \dots; & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1}; & s_{n2}; & s_{n3}; & \dots; & 0 \end{bmatrix}, \qquad (22)$$

$$s_{ik} = -\frac{Z_{ik}}{Z_{ii}}, \quad i \neq k .$$

Dále označme

$$\sigma = \max |s_{ik}| . \qquad (23)$$

Pak prostá hodnota obecného prvku matice $\mathbf{S}^2$ bude nejvýše rovna číslu $(n-1)\,\sigma^2$; označíme-li opět $\mathbf{S}^m = [s_{ik}^{(m)}]$, bude postupně

$$\begin{aligned} |s_{ik}^{(2)}| &\leqq (n-1)\,\sigma^2 \\ |s_{ik}^{(3)}| &\leqq (n-1)^2\,\sigma_3 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ |s_{ik}^{(m)}| &\leqq (n-1)^{m-1}\,\sigma^m \end{aligned} \qquad (24)$$

Má-li být $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{S}^m = \mathbf{0}$, musí zřejmě i $\lim\limits_{m\to\infty} s_{ik}^{(m)} = 0$ pro všechna i, k. Zajistíme-li však, podle rovnic (24),

$$|s_{ik}^{(m)}| \leqq \frac{1}{n-1}\,[(n-1)\,\sigma]^m ,$$

bude skutečně

$$\lim_{m\to\infty} |s_{ik}^{(m)}| = 0 ,$$

pokud $(n-1)\,\sigma < 1$. Z toho tedy

$$\sigma < \frac{1}{n-1} . \qquad (25)$$

Na základě rovnic (22), (23) a (25) můžeme pak vyslovit

Větu 4. *Postačující, nikoliv však nutnou podmínkou pro vyjádření matice* $\mathbf{Z}^{-1}$ *ve tvaru* (20) *jest platnost nerovností*

$$\max \left|\frac{Z_{ik}}{Z_{ii}}\right| < \frac{1}{n-1}, \quad i \neq k . \qquad (26)$$

Poznámka 1. Kriterium (26) se zmírní, jestliže každý řádek nebo sloupec matice $\mathbf{Z}$ bude obsahovat alespoň r nulových prvků $(0 \leqq r \leqq n-2)$ a tedy každý řádek nebo sloupec matice $\mathbf{S}$ bude obsahovat alespoň $(r+1)$ nulových prvků. Nerovnost (26) se pak změní na

$$\max \left|\frac{Z_{ik}}{Z_{ii}}\right| < \frac{1}{n-r-1} . \qquad (27)$$

Požadavek (26) resp. (27) je poměrně silný, v mnohých případech však postačí.

B. Kriterium konvergence, o němž jsme právě hovořili, je zvláštním případem výhodnějšího kriteria, které již nebudeme dokazovat:[4])

Věta 5. *Postačující, nikoliv však nutnou podmínkou pro vyjádření matice* $\mathbf{Z}^{-1}$ *ve tvaru* (20) *je, aby součet modulů všech prvků v jednotlivých řádcích matice* $\mathbf{S}$ *byl*[5]) *nejvýše roven jistému číslu* $\varrho < 1$, *t. j.*

$$\sum_{k=1}^{n} |s_{ik}| \leq \varrho < 1 \textit{ pro všechna } i \,. \tag{28}$$

Poznámka 2. Toto tvrzení lze formulovat také tak, že požadujeme, aby součet modulů všech prvků v jednotlivých sloupcích matice $\mathbf{S}$ byl nejvýše roven jistému číslu $\sigma < 1$, t. j.

$$\sum_{i=1}^{n} |s_{ik}| \leq \sigma < 1 \textit{ pro všechna } k \,. \tag{29}$$

Kriterium vyjádřené větou 5 má tu velkou cenu, že zajistíme dokonce stejnoměrnou konvergenci maticové mocninné řady, jestliže prvky impedanční matice $\mathbf{Z}$ jsou spojitými funkcemi — na př. proměnné x na jistém intervalu. Částečný součet mocninné řady je pak stejnoměrnou aproximací příslušné součtové funkce a vztah (12) dává — při konečném počtu členů řady — stejnoměrnou aproximaci inversní matice na celém uvažovaném intervalu.

Tato okolnost se může uplatnit na příklad v theorii elektrických točivých strojů, kde jsou prvky matice $\mathbf{Z}$ spojitými funkcemi skluzu na intervalu $(0; 1\rangle$, ovšem za předpokladu, že frekvence napájení je konstantní.

3,1.2. Podmínky pro koeficienty charakteristické rovnice.

Jestliže nelze rozhodnout podle odstavce 3,1.1, může vést k cíli kriterium pro charakteristickou rovnici matice $\mathbf{S}$ ve smyslu věty 3.

Charakteristickou rovnici matice $\mathbf{S}$ lze psát ve tvaru

$$|\lambda \mathbf{J} - \mathbf{S}| = \begin{vmatrix} \lambda; & -s_{12}; & -s_{13}; & \ldots; & -s_{1n} \\ -s_{21}; & \lambda; & -s_{23}; & \ldots; & -s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -s_{n1}; & -s_{n2}; & -s_{n3}; & \ldots; & \lambda \end{vmatrix} = 0 \,, \tag{30}$$

nebo, po rozvedení determinantu,

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \,, \tag{31}$$

kde komplexní čísla a_r ($r = 0, 1, \ldots, n - 1$) jsou funkcemi prvků matice $\mathbf{S}$, $a_n = 1$.

---

[4]) Viz na příklad [5], str. 58 a další; také [6], str. 165.

[5]) Tato formulace platí ovšem pro každou čtvercovou matici $\mathbf{a}$ a mocninnou řadu matic $\mathbf{a} + \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^3 + \ldots$.

Limitní vztah (12) bude podle věty 3 platit tehdy a jen tehdy, jestliže kořeny α_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) rovnice (31), jež jsou obecně komplexní, budou ležet uvnitř jednotkového kruhu Gaussovy roviny, t. j. jestliže $|\alpha_j| < 1$ pro všechna j. V algebře se dokazuje (viz na př. [3], str. 123)

Věta 6. *Postačující podmínkou pro to, aby všechny kořeny rovnice* (31) *ležely uvnitř jednotkového kruhu, je platnost nerovnosti*

$$|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0| < |a_n| . \tag{32}$$

Tato podmínka, jež je opět jen postačující, nikoliv však nutnou, je ještě poněkud mírnější než podmínka (28) resp. (29), vyžaduje však poměrně pracné vyčíslení determinantu ze (30).

3,2. Podmínka nutná a postačující.

Neuspějeme-li žádným ze tří uvedených kriterií (26), (28) resp. (31), může nám dát definitivní odpověď další kriterium, jež má charakter podmínky nutné a postačující. Tuto podmínku vyjadřuje

Věta 7. *Nutné a postačující podmínky pro to, aby všechny kořeny rovnice* (31) *ležely uvnitř jednotkového kruhu, jsou:*

a) $|a_0| < |a_n|$;

b) *všechny kořeny rovnice*

$$f_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[\bar{a}_n f(\lambda) - a_0 \lambda^n \bar{f}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] = 0$$

leží opět uvnitř jednotkového kruhu, při čemž značí

$$\bar{f}(\lambda) = \bar{a}_n \lambda^n + \bar{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \bar{a}_0 .$$

Důkaz této věty viz ve [3], str. 119.

Podrobné využití věty 7 je značně pracné a v souvislosti s naším základním problémem nemá valné ceny. V takovém případě se pak vyplatí použít k určení inversní matice jiné methody, než je naše.

4. Příklady

Předchozí výklady objasníme na třech praktických příkladech. V prvých dvou budeme demonstrovat popsanou methodu na maticích s reálnými prvky, ve třetím příkladu pak naznačíme výpočet admitanční matice dvoufázového asynchronního motoru.

Jako první příklad vyšetříme přibližnou hodnotu inversní matice k matici

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 10; & 0; & 0; & -4 \\ 4; & 20; & -1; & 0 \\ 2; & 4; & -10; & 0 \\ 0; & -2; & 4; & -20 \end{bmatrix} .$$

Především je třeba zjistit, zda je matice $\mathbf{Z}$ regulární, t. j. zda má hodnost 4. Regularitu si ověříme třeba tím, že matici $\mathbf{Z}$ převedeme na stupňovou matici (viz na př. [1], str. 61). Dále se přesvědčíme, zda prvky matice $\mathbf{Z}$ splňují některé z uvedených kriterií, která zaručují oprávněnost použití methody. Podle vztahu (7) jest

$$\mathbf{S} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0; & 0; & 0; & 4 \\ -2; & 0; & \frac{1}{2}; & 0 \\ 2; & 4; & 0; & 0 \\ 0; & -1; & 2; & 0 \end{bmatrix}.$$

Použijeme zobecněného kriteria (27). Pro uvažovaný případ jest $n = 4$, $r = 1$, $\max\left|\frac{Z_{ik}}{Z_{ii}}\right| = \frac{2}{5}$, $\frac{1}{n-r-1} = \frac{1}{2}$, a protože

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2},$$

je podmínka konvergence nekonečné řady matic splněna a lze užít rozvoje (20).

Podle vztahu (5) jest

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & \frac{1}{2}; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & -1; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Omezíme se na prvé tři členy rozvoje (20) a proto stanovíme matice

$$\mathbf{S}^2 = 10^{-2}\begin{bmatrix} 0; & 4; & 8; & 0 \\ -1; & -2; & 0; & -8 \\ -8; & 0; & -2; & 8 \\ 2; & 8; & -\frac{1}{2}; & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}^3 = 10^{-3}\begin{bmatrix} 8; & 32; & -2; & 0 \\ 4; & -8; & -15; & -4 \\ -4; & 0; & 16; & -32 \\ -17; & -2; & -4; & 8 \end{bmatrix}.$$

Dosazením těchto matic do výrazu (20) nalezneme po jednoduché úpravě výsledek

$$\mathbf{Z}^{-1} \doteq 10^{-4}\begin{bmatrix} 1024; & -4; & -80; & -200 \\ -206; & 494; & -32{,}5; & 42 \\ 116; & 192; & 996; & 24 \\ 45; & -9; & -201; & 512 \end{bmatrix}. \tag{*}$$

Pro srovnání uveďme přesnou hodnotu inversní matice k matici $\mathbf{Z}$, kterou jsme získali obvyklým způsobem

$$\mathbf{Z}^{-1} = 10^{-4}\begin{bmatrix} 1018; & -4{,}15; & -81{,}01; & -203{,}6 \\ -197{,}3; & 511{,}0; & -35{,}31; & 39{,}47 \\ 124{,}6; & 203{,}6; & -1030{,}3; & -24{,}93 \\ 44{,}66; & -10{,}39; & -202{,}5; & -529{,}7 \end{bmatrix}. \tag{**}$$

Ve druhém příkladu si všimneme matice

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 10; & 1; & 2; & 4 \\ -3; & 16; & -1; & 0 \\ 2; & 2; & -10; & 0 \\ 1; & -2; & 4; & -20 \end{bmatrix}.$$

Snadno se přesvědčíme o regularitě matice $\mathbf{Z}$. Dále použijeme opět kriteria (26): jelikož $n = 4$, $\max \left| \frac{Z_{ik}}{Z_{ii}} \right| = \frac{2}{5}$, $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{3}$, a protože $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$, nezaručuje kriterium (26) konvergenci maticového rozvoje pro $\mathbf{Z}^{-1}$ podle vztahu (20).

Zkusme kriterium (28). Stanovme matici

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0; & -\frac{1}{10}; & -\frac{1}{5}; & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{16}; & 0; & \frac{1}{16}; & 0 \\ \frac{1}{5}; & \frac{1}{5}; & 0; & 0 \\ \frac{1}{20}; & -\frac{1}{10}; & \frac{1}{5}; & 0 \end{bmatrix}.$$

Součty modulů prvků v jednotlivých řádcích matice $\mathbf{S}$ jsou postupně: $\frac{7}{10}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{20}$. Podmínka (28) věty 5 je splněna a rozvoje (20) lze tedy použít. Další výpočet je zcela obdobný jako v předcházejícím příkladu.

V posledním příkladu použijeme popsané methody na stanovení admitanční matice dvoufázového, symetrického, indukčního motoru, jenž je připojen na nesymetrickou dvoufázovou síť. Pro tento případ byla nalezena ([4], str. 123) impedanční matice

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R_s + jX_s & jX_m & 0 & 0 \\ jX_m & \frac{R_r}{s(2-s)} + jX_r & 0 & -\frac{R_r}{s}\cdot\frac{1-s}{2-s} \\ 0 & 0 & R_s + jX_s & jX_m \\ 0 & -\frac{R_r}{s}\cdot\frac{1-s}{2-s} & jX_m & \frac{R_r}{s(2-s)} + jX_r \end{bmatrix},$$

kde R_s a X_s značí ohmický odpor a reaktanci vinutí statoru, R_r a X_r je ohmický odpor a reaktance vinutí rotoru, X_m je magnetisační reaktance a s je skluz, který se mění v rozsahu $(0, 1\rangle$. Náhradní schema motoru je na obr. 1.

Vzhledem k fysikálnímu smyslu úlohy je zřejmá regularita matice $\mathbf{Z}$ pro všechna $s \in (0, 1\rangle$. Jestliže (poměrné) hodnoty jejích prvků splňují na příklad podmínku

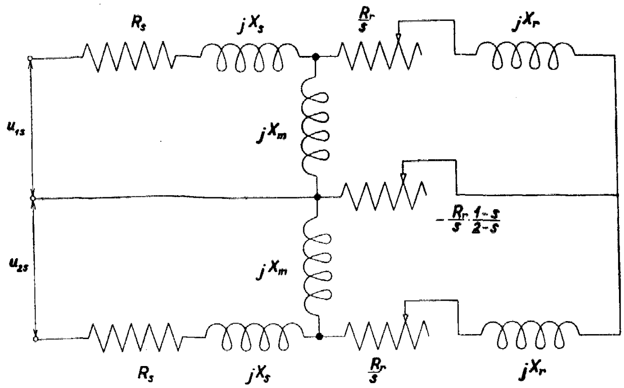
$$X_s = 1\,, \quad X_r = 1\,, \quad R_s \geqq 0{,}3\,, \quad R_r \geqq 0{,}3\,, \quad X_m \geqq 0{,}5\,,$$

je splněno již kriterium (27).

Zavedeme-li označení

$$a = R_r + js(2 - s)\, X_r\,, \quad c = R_r(1 - s)\,,$$

$$b = -j\frac{X_m}{R_s + jX_s}\,, \qquad d = -js(2 - s)X_m\,,$$



Obr. 1. Náhradní schema dvoufázového symetrického indučního motoru připojeného na dvoufázovou nesymetrickou síť.

je podle rovnice (5)

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline j\dfrac{b}{X_m} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{s}{a}(2 - s) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & j\dfrac{b}{X_m} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dfrac{s}{a}(2 - s) \\ \hline \end{array}\,.$$

Podle rovnice (7) stanovíme matici $\mathbf{S}$ a její mocniny

$$\mathbf{S} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & b & 0 & 0 \\ \hline \dfrac{d}{a} & 0 & 0 & \dfrac{c}{a} \\ \hline 0 & 0 & 0 & b \\ \hline 0 & \dfrac{c}{a} & \dfrac{d}{a} & 0 \\ \hline \end{array}\,, \quad \mathbf{S}^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \dfrac{bd}{a} & 0 & 0 & \dfrac{bc}{a} \\ \hline 0 & \dfrac{bd}{a} + \dfrac{c}{a^2} & \dfrac{cd}{a^2} & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{bc}{a} & \dfrac{bd}{a} & 0 \\ \hline \dfrac{cd}{a^2} & 0 & 0 & \dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{bd}{a} \\ \hline \end{array}\,.$$

Omezíme-li se na prvé tři členy řady matic ve vztahu (20), dostaneme výsledek

$$\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Y} \doteq \begin{vmatrix} j\dfrac{b^2d}{aX_m} & 0 & 0 & \dfrac{bc}{a^2}s(2-s) \\ 0 & \left(\dfrac{bd}{a}+\dfrac{c^2}{a^2}\right)\dfrac{s}{a}(2-s) & j\dfrac{bcd}{a^2X_m} & 0 \\ 0 & \dfrac{bc}{a^2}s(2-s) & j\dfrac{b^2d}{aX_m} & 0 \\ j\dfrac{bcd}{a^2X_m} & 0 & 0 & \left(\dfrac{bd}{a}+\dfrac{c^2}{a^2}\right)\dfrac{s}{a}(2-s) \end{vmatrix} .$$

5. Závěr

V theorii elektrických obvodů se běžně setkáváme s požadavkem stanovit k dané impedanční matici $\mathbf{Z}$ příslušnou admitanční matici $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$. Při vyšších hodnotách řádu impedanční matice ($n > 3$) bývá tato operace velmi pracná a dosažené výsledky jsou často formálně značně složité. Tyto nevýhody jsou při použití popsané methody značnou měrou redukovány.

Admitanční matici lze totiž vyjádřit ve tvaru nekonečné konvergentní geometrické řady matic (20), za předpokladu, že je splněna rovnice (12). Vezmeme-li v úvahu dostatečný počet prvních členů maticové řady, lze vyjádřit admitanční matici s libovolnou přesností. Nutnou a postačující podmínkou konvergence řady matic je, aby kořeny charakteristické rovnice (30) ležely uvnitř kružnice o jednotkovém poloměru. Protože realisace této podmínky je obecně dosti nesnadná, bylo užito postačujících podmínek konvergence (27) a (28). Bylo uvedeno ještě další kriterium (věta 6) a konečně podmínka nutná a postačující (věta 7), jejichž význam, ve srovnání s prvými dvěma kriterii, je však poněkud menší.

Kromě redukce počtu základních operací při výpočtu inversní matice může mít popsaná methoda ještě další výhody. V theorii elektrických strojů zpravidla vycházíme z impedanční matice, jejíž prvky jsou funkcemi proměnného parametru (na příklad skluzu). Příslušnou admitanční matici pak vynásobíme zprava vektorem napětí $\mathbf{u}_m$, čímž obdržíme vektor proudů

$$\mathbf{i}^n = \mathbf{Y}^{mn}\mathbf{u}_m .$$

Na základě matice $\mathbf{i}^n$ sestrojujeme pak v Gaussově rovině geometrická místa koncových bodů průvodičů jednotlivých složkových proudů a tyto křivky (t. zv. kruhové diagramy) charakterisují vlastnosti vyšetřovaného stroje v celé pracovní oblasti.

V zájmu snadného sestrojení kruhových diagramů je tedy žádoucí, aby prvky matice $\mathbf{i}^n$ (a tedy i matice $\mathbf{Y}^{mn}$) nebyly příliš složitými funkcemi parametru.

Tomuto požadavku vyhovuje popisovaná methoda, neboť přesné hodnoty prvků inversní matice aproximujeme výrazy, které jsou formálně často podstatně jednodušší.

LITERATURA

[1] *J. Schmidtmayer*: Maticový počet a jeho použití v elektrotechnice. SNTL, Praha, 1954.

[2] *R. A. Frazer, W. J. Duncan, A. R. Collar*: Elementary Matrices. The Macmillan Company, New York, 1947.

[3] *A. Cohn*: Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. Mathematische Zeitschrift, 14 (1922), str. 110.

[4] *W. J. Gibbs*: Tensors in Electrical Machine Theory. Chapman and Hall, London, 1952.

[5] *Б. Х. Фаддеева:* Вычислительные методы линейной алгебры. Гос. изд. тех.-теорет. лит., Москва, 1950.

[6] *O. Pokorná*: Řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Stroje na zpracování informací III, ČSAV, Praha, 1955.

[7] *D. Mayer*: Redukce impedanční matice elektrických sítí a strojů. Sborník prací elektrotechnické fakulty za rok 1955, SNTL, Praha, 1956.

Резюме

ВЫРАЖЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ СХОДЯЩИМСЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ

ДАНИЕЛ МАЙЕР, ИОСЕФ ШМИТМАЙЕР (Daniel Mayer, Josef Schmidtmayer)

(Поступило в редакцию 12/III 1956 г.)

Найти обратную матрицу от данной матрицы порядка $n > 3$ является очень затруднительным, и результат часто неясным. В этой объяснительной статье речь идет о решении обратных матриц обыкновенным итерационным методом.

Общеизвестно, что обратную матрицу от данной квадратной регулярной матрицы можно выразить в форме

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J} - \mathbf{S}} \mathbf{D}^{-1}\,, \tag{I}$$

причем матрицы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{S}$ легко определяются из матрицы $\mathbf{Z}$ [см. уравн. (3) и (7)], $\mathbf{J}$ — единичная матрица. Правую часть в (I) можно выразить как сумму бесконечного геометрического ряда

$$\mathbf{Z}^{-1} = (\mathbf{J} + \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 + \mathbf{S}^3 + \ldots)\, \mathbf{D}^{-1},$$

который сходится, если

$$\lim_{m \to \infty} \mathbf{S}^m = \mathbf{0}\,.$$

Приведены некоторые условия [(26), (28), (29)], при которых метод сходится. Использование метода для некоторых матриц, взятых из электотехнической практики, иллюстрировано на нескольких примерах.

Summary

CALCULATION OF INVERSE MATRICES BY INFINITE SERIES

DANIEL MAYER, JOSEF SCHMIDTMAYER

(Received March 12, 1956.)

Direct calculation of inverse matrices of degree $n > 3$ is difficult and often leads to complicated results. In this expository paper the usual iteration method for the calculation of inverse matrices is discussed.

It is known that the matrix $\mathbf{Z}^{-1}$ inverse to a square regular matrix $\mathbf{Z}$ can be written as

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J} - \mathbf{S}}\,\mathbf{D}^{-1}\,, \tag{I}$$

where $\mathbf{D}$, $\mathbf{S}$ are the matrices of eq. (3) and (7) and $\mathbf{J}$ is the unit matrix. The right-hand side of (I) may be developed into a geometric series

$$\mathbf{Z}^{-1} = (\mathbf{J} + \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 + \mathbf{S}^3 + \ldots)\,\mathbf{D}^{-1}\,,$$

which converges whenever

$$\lim_{m \to \infty} \mathbf{S}^m = \mathbf{0}\,.$$

Some conditions [(26), (28), (29)] are presented under which the method converges.

The application of this method for some matrices occuring in electrical engineering is illustrated on some examples.