Otto Vejvoda

Odhad chyby Runge-Kuttovy formule

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 1, 1–23

ČLÁNKY

ODHAD CHYBY RUNGE-KUTTOVY FORMULE

OTTO VEJVODA

(Došlo dne 16. dubna 1956.) DT:517.925:518.61

V článku jsou uvedeny tři nové odhady chyby Runge-Kuttovy formule pro numerické řešení soustavy n diferenciálních rovnic 1. řádu při jednom kroku. Dále jsou odvozeny dva vzorce pro odhad chyby téže formule po s krocích.

Úvod

Odhad chyby (nepřesnosti) Runge-Kuttovy formule pro přibližné řešení soustavy n obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu se v podstatě skládá ze dvou částí: Z odhadu chyby při jediném integračním kroku („Integrationsfehler") a z odhadu zvětšení této chyby po s krocích („Fortpflanzungsfehler").

Odhad chyby Runge-Kuttovy formule při jednom integračním kroku byl dosud publikován pouze BIEBERBACHEM a to v [1] pro jedinou rovnici a v [2] pro soustavu diferenciálních rovnic. V tomto článku odvozuji nové odhady této chyby při třech různých způsobech odhadu velikosti pravých stran diferenciálních rovnic a jejich derivací. Všechny tři odhady mají jednu společnou myšlenku, že totiž vyšetřuji rozvoje přesného a přibližného řešení až do 6. řádu, takže rozdíl prvních členů rozvojů, jež se od sebe liší, t. j. členů 5. řádu, který je „obecně" rozhodující pro velikost chyby, je odhadnut velmi přesně. I když však tyto odhady chyby dávají v mnoha případech podstatně lepší výsledky než vzpomenuté odhady Bieberbachovy, zdaleka ještě nejsou uspokojivé. To spočívá v základní nesnázi odhadu chyby u Runge-Kuttovy methody. Máme-li totiž soustavu n diferenciálních rovnic 1. řádu a jdeme-li v rozvojích do členů 6. řádu, pak máme obecně odhadnout velikost P funkcí, kde

$$P = n\left[\binom{n+0}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+6}{6}\right].$$

Je zřejmé, že se vzrůstajícím n tento počet funkcí velmi rychle roste. A velikost všech těchto funkcí, má-li být konečný vzorec pro odhad chyby přehledný a snadno vyčíslitelný, musíme odhadnout pomocí jen několika málo konstant (prakticky jedné až tří). To je ovšem velmi obtížný úkol, neboť všech těchto P funkcí se může velmi podstatně lišit jak charakterem svého průběhu, tak svou velikostí. K této obtíži dobrého a jednoduchého theoretického odhadu přistupuje v praxi ovšem ještě další potíž, a to, že $P' = n\left[\binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+6}{6}\right]$ funkcí vlastně musíme teprve najít jako parciální derivace pravých stran. (Jak je patrno, naše úloha by se podstatně nijak nezjednodušila, kdybychom v rozvojích šli pouze do členů 5. řádu jak bylo dosud zvykem.)

Odhad chyby Runge-Kuttovy formule pro numerické řešení soustavy n diferenciálních rovnic po s krocích nebyl myslím zatím v literatuře explicitně uveden. Existuje však Bukovicsův odhad chyby Runge-Kuttovy formule pro numerické řešení diferenciální rovnice n-tého řádu [3]. Bukovicsova methoda se dá celkem snadno přenést na odhad chyby v našem případě. Kromě tohoto odhadu odvozuji ještě jiný odhad, založený na jedné větě o závislosti řešení na pravých stranách a na počátečních podmínkách. Tento odhad je sice jednodušší, avšak výsledek pro velké honoty nhK a s podstatně horší.

Na tomto místě bych rád poděkoval prof. Vl. Knichalovi za pomoc a rady, které mně při psaní této práce poskytl.

1. Odhad chyby při jednom kroku

Budiž dána soustava diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}x} = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

s počátečními podmínkami

$$y_\nu(x_0) = y_{\nu 0} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{2}$$

O funkcích $f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ předpokládejme, že mají v kvádru $Q \equiv \langle x_0, X\rangle \times \langle y_{10} - b, y_{10} + b\rangle \times \ldots \times \langle y_{n0} - b, y_{n0} + b\rangle$ $(b > 0,\ X > x_0)$ spojité parciální derivace až do 5. řádu včetně. Funkce $f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pak v Q samozřejmě také vyhovují Lipschitzově podmínce s jednotnou Lipschitzovou konstantou K:

$$|f_\nu(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n) - f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqq K \sum_{j=1}^{n} |\bar{y}_j - y_j| \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3}$$

Každá z funkcí f_ν nabývá v Q svého maxima A_ν. Označme $A = \max\limits_{0 \leqq \nu \leqq n} A_\nu$ a předpokládejme, že je splněna podmínka $|X - x_0|\, A \leqq b$.

Podle existenční věty víme, že integrál soustavy diferenciálních rovnic (1) procházející počátečním bodem $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ existuje pro všechna $x \in \langle x_0, X\rangle$ a má derivace do 6. řádu včetně.

Jak je dobře známo, máme-li v intervalu $\langle x_0, X\rangle$ konstruovat přibližné řešení soustavy (1) s počáteční podmínkou (2) pomocí Runge-Kuttovy methody, postupujeme takto: Rozdělíme interval $\langle x_0, X\rangle$ $N - 1$ dělicími body $x_k = x_0 + kh$ $(k = 1, 2, \ldots, N - 1)$, kde $h = \frac{1}{N}(X - x_0)$ (označme ještě $X = x_N$), na N podintervalů a přibližné řešení definujeme jako spojitou křivku, která je v $(r + 1)$-vtém intervalu $\langle x_r, x_{r+1}\rangle$ dána předpisem

$$\tilde{y}_{\nu,r+1}(x) = \tilde{y}_{\nu,r}(x_r) + \frac{1}{6}(x - x_r)[{}^1k_{\nu,r+1} + 2\,{}^2k_{\nu,r+1} + 2\,{}^3k_{\nu,r+1} + {}^4k_{\nu,r+1}]$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ r = 0, 1, \ldots, N - 1)\,, \tag{4}$$

při čemž

$$\begin{aligned}
{}^1k_{\nu,r+1} &= f_\nu(x_r, \tilde{y}_{1r}(x_r), \ldots, \tilde{y}_{nr}(x_r))\,,\\
{}^2k_{\nu,r+1} &= f_\nu\Big(x_r + \frac{1}{2}(x - x_r), \tilde{y}_{1r}(x_r) + \frac{1}{2}(x - x_r)\,{}^1k_{1,r+1}, \ldots, \tilde{y}_{nr}(x_r) +\\
&\quad + \frac{1}{2}(x - x_r)\,{}^1k_{n,r+1}\Big)\,,\\
{}^3k_{\nu,r+1} &= f_r\Big(x_r + \frac{1}{2}(x - x_r), \tilde{y}_{1r}(x_r) + \frac{1}{2}(x - x_r)\,{}^2k_{1,r+1}, \ldots, \tilde{y}_{nr}(x_r) +\\
&\quad + \frac{1}{2}(x - x_r)\,{}^2k_{n,r+1}\Big)\,,\\
{}^4k_{\nu,r+1} &= f_\nu(x_r + (x - x_r), \tilde{y}_{1r}(x_r) + (x - x_r)\,{}^3k_{1,r+1}, \ldots, \tilde{y}_{nr}(x_r) +\\
&\quad + (x - x_r)\,{}^3k_{n,r+1})\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

(Jelikož $\tilde{y}_{\nu,r+1}(x_r) = \tilde{y}_{\nu,r}(x_r)$, je přibližná integrální křivka vskutku spojitá. Snadno se také můžeme přesvědčit, že leží celá v Q.)

Každá z funkcí $\tilde{y}_{\nu,r+1}(x)$ je volena tak, aby její rozvoj podle zobecněné věty o střední hodnotě souhlasil až do členu 4. řádu včetně s rozvojem funkce $Y_{\nu,r+1}$, která je ν-tou komponentou integrálu $Y_{r+1} \equiv (Y_{1,r+1}, Y_{2,r+1}, \ldots, Y_{n,r+1})$ procházejícího bodem $(x_r, \tilde{y}_{1r}(x_r), \ldots, \tilde{y}_{nr}(x_r))$. Integrál Y_{r+1} budeme nazývat „lokálně přesným" integrálem v $(r + 1)$-tém intervalu, neboť sice vyhovuje soustavě (1), avšak neprochází bodem $(x_r, y_1(x_r), \ldots, y_n(x_r))$ jako přesný integrál, nýbrž bodem $(x_r, \tilde{y}_{1,r}(x_r), \ldots, \tilde{y}_{nr}(x_r))$ jako přibližný integrál.

Jako chybu (nepřesnost) přibližného řešení $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)$ na intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle \subset \langle x_0, x_N\rangle$ definujeme výraz

$$\varphi_n(\alpha, \beta) = \max_{\xi\in\langle\alpha,\beta\rangle} \sum_{j=1}^{n} |y_j(\xi) - \tilde{y}_j(\xi)|\,.$$

Vezměme za $\langle\alpha, \beta\rangle$ speciálně interval $\langle x_0, x_1\rangle$. Jelikož $y_j(x_0) = Y_{j,1}(x_0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, je chyba přibližného řešení v 1. intervalu dána výrazem

$$\varphi_n(x_0, x_1) = \max_{\xi\in\langle x_0,x_1\rangle} \sum_{j=1}^{n} |\tilde{y}_{j,1}(\xi) - Y_{j,1}(\xi)|\,.$$

Obdobný výraz

$$\omega_{n,r+1} = \max_{\xi \in \langle x_r, x_{r+1} \rangle} \sum_{j=1}^{n} |\tilde{y}_{j,r+1}(\xi) - Y_{j,r+1}(\xi)|$$

můžeme utvořit pro každý další interval, t. j. pro $r = 1, 2, \ldots, N - 1$. Tento výraz nám udává, jaké chyby se dopouštíme při každém kroku uvažovaném isolovaně vlivem integrační methody (ten nám tedy udává chybu Runge-Kuttovy formule při jednom kroku). Pro $r = 1, 2, \ldots, N - 1$ přistupuje ovšem k této „integrační" chybě ještě chyba způsobená tím, že pro tato r již obecně nevycházíme ze správného počátečního bodu. Odhadem této chyby se budeme zabývat až v dalším paragrafu; nyní se obraťme k odhadu výrazu $\omega_{n,r+1}$.

K tomu potřebujeme znát rozvoje funkcí $Y_{\nu,r+1}$ a $\tilde{y}_{\nu,r+1}$ až do 6. řádu včetně. Jelikož výrazy pro derivace těchto funkcí se stávají se vzrůstajícím řádem velmi rychle složitými, zavedeme některé operátory, které nám je dovolí napsat v přehlednější formě.

Budiž dána v Q množina $\mathfrak{M}$ funkcí proměnných $x, y_1, \ldots, y_n$ spojitých i se svými parciálními derivacemi až do 5. řádu. Na množině $\mathfrak{M}$ definujme operátory D_m ($0 \leqq m \leqq 5$) rovnostmi

$$D_0\varphi = \varphi\,,$$

$$D_m\varphi = \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m} + \binom{m}{1} \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^{m-1} \partial y_\varrho} f_\varrho + \ldots +$$

$$+ \binom{m}{l} \sum_{\varrho_1=1}^{n} \cdots \sum_{\varrho_l=1}^{n} \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^{m-l} \partial y_{\varrho_1} \ldots \partial y_{\varrho_l}} f_{\varrho_1} \ldots f_{\varrho_l} + \ldots +$$

$$+ \sum_{\varrho_1=1}^{n} \cdots \sum_{\varrho_m=1}^{n} \frac{\partial^m \varphi}{\partial y_{\varrho_1} \ldots \partial y_{\varrho_m}} f_{\varrho_1} f_{\varrho_1} \ldots f_{\varrho_m}\,. \tag{6}$$

Snadno se přesvědčíme, že platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}D_m\varphi}{\mathrm{d}x} = D_{m+1}\varphi + m \sum_{\varrho=1}^{n} D_{m-1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}f_\varrho}{\mathrm{d}x}\,; \tag{7}$$

$\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right.$ zde znamená derivaci ve směru integrální křivky soustavy (1)$\left.\right)$.

Budiž dále dána v Q množina $\mathfrak{N}$ funkcí $g_{\nu,r+1}$ definovaných vztahem

$$g_{\nu,r+1}(x) = f_\nu(x_r + \alpha(x - x_r), \tilde{y}_{1r}(x_r) + \alpha R_{1,r+1}(x), \ldots, \tilde{y}_{n,r}(x_r) + \alpha R_{n,r+1}(x))$$

kde α je libovolné reálné číslo a $R_{\nu,r+1}$ jsou libovolné reálné funkce proměnné x, při čemž funkce $R_{\nu,r+1}$ mají spojité derivace až do 5. řádu včetně. Na množině $\mathfrak{N}$ definujme operátory E_m ($0 \leqq m \leqq 5$) vztahy

$$E_0 g_{\nu,r+1} = g_{\nu,r+1}\,,$$

$$E_m g_{\nu,r+1} = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \sum_{\varrho_1=1}^{n} \cdots \sum_{\varrho_l=1}^{n} \frac{\partial^m f_\nu}{\partial x^{m-l} \partial y_{\varrho_1} \ldots \partial y_{\varrho_l}} \frac{\mathrm{d}R_{\varrho_1,r+1}}{\mathrm{d}x} \cdots \frac{\mathrm{d}R_{\varrho_l,r+1}}{\mathrm{d}x}\,, \tag{8}$$

kde $\frac{\partial f_\nu}{\partial x}$ znamená derivaci podle prvé proměnné, $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_1}$ podle druhé atd. Opět se snadno přesvědčíme, že platí

$$\frac{\mathrm{d}E_m g_{\nu,r+1}}{\mathrm{d}x} = \alpha E_{m+1} g_{\nu,r+1} + m \sum_{\varrho=1}^{n} E_{m-1} \left(\frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}^2 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^2} . \tag{9}$$

Nyní již můžeme snadno napsat jak derivace funkcí $y_\nu(x)$ (t. j. komponent přesného řešení soustavy (1)), tak derivace funkcí ${}^\mu k_{\nu,r+1}$ ($1 \leq \mu \leq 4$; $0 \leq \nu \leq n$; $0 \leq r \leq N - 1$). Jelikož derivace funkcí ${}^\mu k_{\nu,r+1}$ již snadno dostaneme z derivací funkcí $g_{\nu,r+1}$ příslušnými specialisacemi (t. j. $\alpha = 0$, $R_{\nu,r+1} = 0$ pro ${}^1k_{\nu,r+1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $R_{\nu,r+1} = (x - x_r)\, {}^1k_{\nu,r+1}$ pro ${}^2k_{\nu,r+1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $R_{\nu,r+1} = (x - x_r)\, {}^2k_{\nu,r+1}$ pro ${}^3k_{\nu,r+1}$ a $\alpha = 1$, $R_{\nu,r+1} = (x - x_r)\, {}^3k_{\nu,r+1}$ pro ${}^4k_{\nu,r+1}$), neuvádím derivace funkcí ${}^\mu k_{\nu,r+1}$ explicitně.

Platí tedy

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}x} = f_\nu ,\\
&\frac{\mathrm{d}^2 y_\nu}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}f_\nu}{\mathrm{d}x} = D_1 f_\nu ,\\
&\frac{\mathrm{d}^3 f_\nu}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}^2 f_\nu}{\mathrm{d}x^2} = D_2 f_\nu + \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} \frac{\mathrm{d}f_\varrho}{\mathrm{d}x} ,\\
&\frac{\mathrm{d}^4 y_\nu}{\mathrm{d}x^4} = \frac{\mathrm{d}^3 f_\nu}{\mathrm{d}x^3} = D_3 f_\nu + 3 \sum_{\varrho=1}^{n} D_1 \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}f_\varrho}{\mathrm{d}x} + \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} \frac{\mathrm{d}^2 f_\varrho}{\mathrm{d}x^2} ,\\
&\frac{\mathrm{d}^5 y_\nu}{\mathrm{d}x^5} = \frac{\mathrm{d}^4 f_\nu}{\mathrm{d}x^4} = D_4 f_\nu + 6 \sum_{\varrho=1}^{n} D_2 \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}f_\varrho}{\mathrm{d}x} + 3 \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_\varrho \partial y_\sigma} \frac{\mathrm{d}f_\varrho}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}f_\sigma}{\mathrm{d}x} +\\
&\qquad + 4 \sum_{\varrho=1}^{n} D_1 \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}^2 f_\varrho}{\mathrm{d}x^2} + \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} \frac{\mathrm{d}^3 f_\varrho}{\mathrm{d}x^3} ,\\
&\frac{\mathrm{d}^6 y_\nu}{\mathrm{d}x^6} = \frac{\mathrm{d}^5 f_\nu}{\mathrm{d}x^5} = D_5 f_\nu + 10 \sum_{\varrho=1}^{n} D_3 \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}f_\varrho}{\mathrm{d}x} + 10 \sum_{\varrho=1}^{n} D_2 \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}^2 f_\varrho}{\mathrm{d}x^2} +\\
&\qquad + 15 \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} D_1 \left(\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_\varrho \partial y_\sigma}\right) \frac{\mathrm{d}f_\varrho}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}f_\sigma}{\mathrm{d}x} + 10 \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_\varrho \partial y_\sigma} \frac{\mathrm{d}^2 f_\varrho}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}f_\sigma}{\mathrm{d}x} +\\
&\qquad + 5 \sum_{\varrho=1}^{n} D_1 \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}^3 f_\nu}{\mathrm{d}x^3} + \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} \frac{\mathrm{d}^4 f_\varrho}{\mathrm{d}x^4}
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}g_{\nu,r+1}}{\mathrm{d}x} = \alpha E_1 g_{\nu,r+1} ,\\
&\frac{\mathrm{d}^2 g_{\nu,r+1}}{\mathrm{d}x^2} = \alpha^2 E_2 g_{\nu,r+1} + \alpha \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho} \frac{\mathrm{d}^2 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^2} ,\\
&\frac{\mathrm{d}^3 g_{\nu,r+1}}{\mathrm{d}x^3} = \alpha^3 E_3 g_{\nu,r+1} + 3\alpha^2 \sum_{\varrho=1}^{n} E_1 \left(\frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}^2 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^2} + \alpha \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho} \frac{\mathrm{d}^3 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^3} ,
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 g_{\nu,r+1}}{\mathrm{d}x^4} = \alpha^4 E_4 g_{\nu,r+1} + 6\alpha^3 \sum_{\varrho=1}^{n} E_2\left(\frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}^2 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^2} +$$
$$+ 3\alpha^2 \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho \partial y_\sigma} \frac{\mathrm{d}^2 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}^2 R_{\sigma,r+1}}{\mathrm{d}x^2} + 4\alpha^2 \sum_{\varrho=1}^{n} E_1\left(\frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}^3 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^3} +$$
$$+ \alpha \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho} \frac{\mathrm{d}^4 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^4},$$
$$\frac{\mathrm{d}^5 g_{\nu,r+1}}{\mathrm{d}x^5} = \alpha^5 E_5 g_{\nu,r+1} + 10\alpha^4 \sum_{\varrho=1}^{n} E_3\left(\frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}^2 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^2} +$$
$$+ 15\alpha^3 \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho \partial y_\sigma} \frac{\mathrm{d}^2 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}^2 R_{\sigma,r+1}}{\mathrm{d}x^2} + 10\alpha^3 \sum_{\varrho=1}^{n} E_2\left(\frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}^3 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^3} +$$
$$+ 10\alpha^2 \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial^2 g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho \partial y_\sigma} \frac{\mathrm{d}^3 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^3} \frac{\mathrm{d}^2 R_{\sigma,r+1}}{\mathrm{d}x^2} + 5\alpha^2 \sum_{\varrho=1}^{n} E_1\left(\frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}^4 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^4} +$$
$$+ \alpha \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho} \frac{\mathrm{d}^5 R_{\varrho,r+1}}{\mathrm{d}x^5}, \tag{11}$$

$\Big(\frac{\partial g_{\nu,r+1}}{\partial y_\varrho} = \left[\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right]$ v bodě $(x_r + \alpha(x - x_r),\ \tilde{y}_{1,r}(x_r) + \alpha R_{1,r+1}(x), \ldots, \tilde{y}_{n,r}(x_r) +$
$+ \alpha R_{n,r+1}(x)\Big)$.

Umluvme se ještě na tomto zkráceném způsobu zápisu:

$$[u(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)]_r = u(x_r, y_{1,r}(x_r), \ldots, y_{n,r}(x_r)) =$$
$$= u(x_r, y_{1,r+1}(x_r), \ldots, y_{n,r+1}(x_r))$$

resp.

$$[v(x)]_r = v(x_r).$$

Všimněme si, že

$$[D_m f_\nu]_r = [E_m g_{\nu,r+1}]_r. \tag{12}$$

Platí tedy

$$[{}^1k_{\nu,r+1}]_r = [f_\nu]_r,\ [{}^1k'_{\nu,r+1}]_r = \ldots = [{}^1k''''_{\nu,r+1}]_r = 0,$$
$$[{}^2k_{\nu,r+1}]_r = [f_\nu]_r,\ [{}^2k'_{\nu,r+1}]_r = \frac{1}{2}[D_1 f_\nu]_r,\ [{}^2k''_{\nu,r+1}]_r = \frac{1}{4}[D_2 f_\nu]_r,$$
$$[{}^2k'''_{\nu,r+1}]_r = \frac{1}{8}[D_3 f_\nu]_r,\ [{}^2k''''_{\nu,r+1}]_r = \frac{1}{16}[D_4 f_\nu]_r,$$
$$[{}^3k_{\nu,r+1}]_r = [f_\nu]_r,\ [{}^3k'_{\nu,r+1}]_r = \frac{1}{2}[D_1 f_\nu]_r,$$
$$[{}^3k''_{\nu,r+1}]_r = \left[\frac{1}{4} D_2 f_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} D_1 f_\varrho\right]_r,$$
$$[{}^3k'''_{\nu,r+1}]_r = \left[\frac{1}{8} D_3 f_\nu + \frac{3}{4}\sum_{\varrho=1}^{n} D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) D_1 f_\varrho + \frac{3}{8}\sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} D_2 f_\varrho\right]_r,$$

$$[{}^3k''''_{\nu,r+1}]_r = \left[\frac{1}{16} D_4 f_\nu + \frac{3}{4} \sum_{\varrho=1}^{n} D_2\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) D_1 f_\nu + \frac{3}{4} \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_\varrho \partial y_\sigma} D_1 f_\varrho D_1 f_\sigma + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} \sum_{\varrho=1}^{n} D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) D_2 f_\varrho + \frac{1}{4} \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} D_3 f_\varrho \right]_r,$$

$$[{}^4k_{\nu,r+1}]_r = [f_\nu]_r, \quad [{}^4k'_{\nu,r+1}] = [D_1 f_\nu]_r, \quad [{}^4k''_{\nu,r+1}]_r = \left[D_2 f_\nu + \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} D_1 f_\varrho\right]_r,$$

$$[{}^4k'''_{\nu,r+1}]_r = \left[D_3 f_\nu + 3 \sum_{\varrho=1}^{n} D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) D_1 f_\varrho + \frac{3}{4} \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} D_2 f_\varrho + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\sigma} D_1 f_\sigma \right]_r,$$

$$[{}^4k''''_{\nu,r+1}]_r = [D_4 f_\nu + 6 \sum_{\varrho=1}^{n} D_2\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) D_1 f_\varrho + 3 \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_\varrho \partial y_\sigma} D_1 f_\varrho D_1 f_\sigma +$$

$$+ 3 \sum_{\varrho=1}^{n} D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) D_2 f_\varrho + 6 \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\sigma} D_1 f_\sigma + \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} D_3 f_\varrho +$$

$$\left. + 3 \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} D_1\left(\frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\sigma}\right) D_1 f_\sigma, + \frac{3}{2} \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\sigma} D_2 f_\sigma \right]_r. \qquad (13)$$

Rozvoje funkcí $Y_{\nu,r+1}$ a $\tilde{y}_{\nu,r+1}$ se zbytkem 6. řádu nyní zní (u funkce $\tilde{y}_{\nu,r+1}$ rozvinujeme výraz ${}^1k_{\nu,r+1} + 2\,{}^2k_{\nu,r+1} + 2\,{}^3k_{\nu,r+1} + {}^4k_{\nu,r+1}$):

$$Y_{\nu,r+1}(x) = \tilde{y}_{\nu,r}(x_r) + \frac{1}{1!} [Y'_{\nu,r+1}]_r (x - x_r) + \ldots + \frac{1}{5!} [Y^{(5)}_{\nu,r+1}]_r (x - x_r)^5 +$$

$$+ \frac{1}{6!} Y^{(6)}_{\nu,r+1} (x_r + \vartheta_1(x - x_r)) (x - x_r)^6 = \tilde{y}_{\nu,r}(x_r) + \frac{1}{1!} [f_\nu)_r (x - x_r) +$$

$$+ \frac{1}{2!} [D_1 f_\nu]_r (x - x_r)^2 + \frac{1}{3!} \left[D_2 f_\nu + \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} \frac{\mathrm{d} f_\varrho}{\mathrm{d}x}\right]_r (x - x_r)^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!} \left[D_3 f_\nu + 3 \sum_{\varrho=1}^{n} D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d} f_\varrho}{\mathrm{d}x} + \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} \frac{\mathrm{d}^2 f_\varrho}{\mathrm{d}x^2}\right]_r (x - x_r)^4 +$$

$$+ \frac{1}{5!} \left[D_4 f_\nu + 6 \sum_{\varrho=1}^{n} D_2\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d} f_\varrho}{\mathrm{d}x} + 3 \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_\varrho \partial y_\sigma} \frac{\mathrm{d} f_\varrho}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d} f_\sigma}{\mathrm{d}x} + \right.$$

$$\left. + 4 \sum_{\varrho=1}^{n} D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right) \frac{\mathrm{d}^2 f_\varrho}{\mathrm{d}x^2} + \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho} \frac{\mathrm{d}^3 f_\varrho}{\mathrm{d}x^3}\right]_r (x - x_r)^5 +$$

$$+ \frac{1}{6!} Y^{(6)}_{\nu,r+1} (x_r + \vartheta_1(x - x_r)) (x - x_r)^6, \qquad (14a)$$

$$\tilde{y}_{\nu,r+1}(x) = \tilde{y}_{\nu,r}(x_r) + \frac{1}{6} (x - x_r) \left\{ [{}^1k_{\nu,r+1}]_r + 2 \sum_{s=0}^{4} [{}^2k^{(s)}_{\nu,r+1}]_r (x - x_r)^s + \right.$$

$$+ 2 \sum_{s=0}^{4} [{}^3k^{(s)}_{\nu,r+1}]_r (x - x_r)^s + \sum_{s=0}^{4} [{}^4k^{(s)}_{\nu,r+1}]_r (x - x_r)^s +$$

$$+ \frac{1}{5!} (x - x_r)^5 [2\,{}^2k^{(5)}_{\nu,r+1} (x_r + \vartheta_2(x - x_r)) + 2\,{}^3k^{(5)}_{\nu,r+1}(x_r + \vartheta_3(x - x_r)) +$$

$$+\ {}^{4}k^{(5)}_{\nu,r+1}(x_r+\vartheta_4(x-x_r))\Big\}=$$

$$=\tilde{y}_{\nu,r}(x_r)+[f_\nu]_r(x-x_r)+\frac{1}{2!}[D_1f_\nu]_r(x-x_r)^2+$$

$$+\frac{1}{3!}\left[D_2f_\nu+\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}D_1f_\varrho\right]_r(x-x_r)^3+\frac{1}{4!}\left[D_3f_\nu+3\sum_{\varrho=1}^{n}D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right)D_1f_\varrho+\right.$$

$$\left.+\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}D_2f_\varrho+\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\sigma}D_1f_\sigma\right]_r(x-x_r)^4+$$

$$+\frac{1}{6\,.\,4!}\left[\frac{5}{4}D_4f_\nu+\frac{15}{2}\sum_{\varrho=1}^{n}D_2\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right)D_1f_\varrho+\frac{9}{2}\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_\varrho\partial y_\sigma}D_1f_\varrho D_1f_\sigma+\right.$$

$$+\frac{9}{2}\sum_{\varrho=1}^{n}D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right)D_2f_\varrho+6\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right)\frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\sigma}D_1f_\sigma+\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}D_3f_\varrho+$$

$$\left.+\,3\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}D_1\left(\frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\sigma}\right)D_1f_\sigma\right]_r(x-x_r)^5+\frac{1}{6!}(.)\,(x-x_r)^6\,. \qquad (14b)$$

(Porovnáme-li oba rozvoje, přesvědčíme se snadno, že se vskutku shodují do členů čtvrtého řádu, tak jak jsme to žádali.)

Chyba $\omega_{n,r+1}$ je dána výrazem

$$\omega_{n,r+1}=\max_{\xi\in\langle x_r,x_{r+1}\rangle}\sum_{\nu=1}^{n}|Y_{\nu,r+1}(\xi)-\tilde{y}_{\nu,r+1}(\xi)|=$$

$$=\max_{\xi\in\langle x_r,x_{r+1}\rangle}\sum_{\nu=1}^{n}\left|\left[-\frac{1}{2880}D_4f_\nu-\frac{1}{480}\sum_{\varrho=1}^{n}D_2\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right)D_1f_\varrho-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{160}\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial y_\varrho\partial y_\sigma}D_1f_\varrho D_1f_\sigma+\frac{1}{480}\sum_{\varrho=1}^{n}D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right)D_2f_\varrho-$$

$$-\frac{1}{120}\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}D_1\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\right)\frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\sigma}D_1f_\sigma+\frac{1}{720}\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}D_3f_\varrho+$$

$$+\frac{1}{240}\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}D_1\left(\frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\sigma}\right)D_1f_\sigma-\frac{1}{480}\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\sigma}D_2f_\sigma+$$

$$\left.+\frac{1}{120}\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\varrho}\frac{\partial f_\varrho}{\partial y_\sigma}\frac{\partial f_\sigma}{\partial y_\tau}D_1f_\tau\right]_r(\xi-x_r)^5+$$

$$+\frac{1}{6!}\{Y_{\nu,r+1}(x_r+\vartheta_1(x-x_r))-2\,{}^{2}k^{(5)}_{\nu,r+1}(x_r+\vartheta_2(x-x_r))-$$

$$\left.-\,2\,{}^{3}k^{(5)}_{\nu,r+1}(x_r+\vartheta_3(x-x_r))-{}^{4}k_{\nu,r+1}(x_r+\vartheta_4(x-x_r))\}(\xi-x_r)^6\right|=$$

$$=\max_{\xi\in\langle x_r,x_{r+1}\rangle}\sum_{\nu=1}^{r}\left|A_\nu(\xi-x_r)^5+\frac{1}{6!}B_\nu(\xi)(\xi-x_r)^6\right| \qquad (15)$$

(koeficient B_ν u $(\xi-x_r)^6$ explicitně nevypisuji, protože je příliš složitý).

Vzorec (15) pro chybu $\omega_{n,r+1}$ je pro praxi bezcenný, jednak proto, že je příliš těžkopádný a jednak proto, že neznáme funkce $\vartheta_\mu(x-x_r)$. Jest proto třeba se spokojit nějakým odhadem veličiny $\omega_{n,r+1}$. K tomu však opět potřebujeme znát odhady shora absolutních hodnot funkcí f_ν a jejich parciálních derivací až do pátého řádu. Způsob odhadu těchto funkcí je, jak jsme už shora uvedli, omezen požadavkem jednoduchosti odhadu chyby $\omega_{n,r+1}$.

Jak je známo, Bieberbach odhaduje velikost funkcí $|f_\nu|$ a $\left|\frac{\partial^{i+j_1+\ldots+j_n} f_\nu}{\partial x^i \partial y_1^{j_1} \ldots \partial y_n^{j_n}}\right|$ pomocí dvou konstant M a N a předpokládá, že

$$|f_\nu| \leqq M\,, \quad \left|\frac{\partial^{i+j_1+\ldots+j_n} f_\nu}{\partial x^i\, \partial y_1^{j_1} \ldots \partial y_n^{j_n}}\right| \leqq \frac{N}{M^{j_1+\ldots+j_n-1}}\,,$$

při čemž $hN \leqq 1$ (jeho druhá podmínka zahrnující M je za našich předpokladů automaticky splněna).

Lotkin [5] navrhuje, aby bylo užito konstant L a M, které vyhovují nerovnostem

$$|f_\nu| \leqq M\,, \quad \left|\frac{\partial^{i+j_1+\ldots+j_n} f_\nu}{\partial x^i\, \partial y_1^{j_1} \ldots \partial y_n^{j_n}}\right| \leqq \frac{L^{i+j_1+\ldots+j_n}}{M^{j_1+\ldots+j_n-1}}\,. \tag{α}$$

Oba autoři užívají tedy dvou konstant. V některých případech však vystačíme při řádově stejně dobrém odhadu s jedinou konstantou.

Jednou takovou možností je, že užijeme konstanty $\tilde{M}$, která vyhovuje nerovnostem

$$|f_\nu| \leqq \tilde{M}\,, \quad \left|\frac{\partial^{i+j_1+\ldots+j_n}}{\partial x^i\, \partial y_1^{j_1} \ldots \partial y_n^{j_n}}\right| \leqq \tilde{M}^{i+1}\,. \tag{β}$$

Je ihned patrno, že předpoklad (β) je vlastně speciálním případem předpokladu (α) a to pro $L = M = \tilde{M}$. Nevýhodou tohoto odhadu je, že je nepřesný v těch případech, kdy se některá z parciálních derivací značně mění při změně $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Jinou možností je učinit předpoklad (jak navrhl Vl. Knichal), že vyšetřované veličiny vyhovují v $r + 1$-tém intervalu nerovnostem

$$[f_\nu]_r = 0\,, \quad |f_\nu| \leqq 1\,, \quad \left|\frac{\partial^{i+j_1+\ldots+j_n} f_\nu}{\partial x^i\, \partial y_1^{j_n} \ldots \partial y_n^{j_n}}\right| \leqq \hat{M}^{i+j_1+\ldots+j_n}\,. \tag{γ}$$

Prvé dvě podmínky nerovností (γ) nemusí být ovšem od začátku splněny. Můžeme však snadno docílit, aby splněny byly a to tak, že provedeme transformace

$$\eta_\nu = y_\nu - [f_\nu]_r(x - x_r) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Soustava diferenciálních rovnic pak nabude tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\eta_\nu}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}x} - [f_\nu]_r = f_\nu\,(x, y_1 + [f_1]_r\,(x - x_r), \ldots, y_n + [f_n]_r\,(x - x_n) - [f_\nu]_r = \\ = F_{\nu,r}\,(x, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)\,. \tag{16}$$

Zřejmě je $[F_{\nu,r}]_r = 0$ a stačí zvolit ještě dostatečně malou délku kroku h, aby byla splněna také druhá podmínka. Lze snadno dokázat, že chyba Runge-Kuttovy formule pro soustavu (1) je táž jako pro soustavu (16).

V dalším provedu podrobně horní odhad chyby za předpokladu (α) a dosazením $L = M = \tilde{M}$ dostanu odhad za předpokladu (β). Pro odhad chyby za předpokladu (γ) uvedu pouze konečný výsledek.

Budiž tedy splněn předpoklad (α). Pak postupně najdeme

$$|D_m f_\nu| \leqq L^m M(1+n)^m\,,$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}x}\right| \leqq M\,,$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^2y_\nu}{\mathrm{d}x^2}\right| \leqq LM(1+n)\,,$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^3y_\nu}{\mathrm{d}x^3}\right| \leqq L^2M(1+n)(1+2n)\,,$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^4y_\nu}{\mathrm{d}x^4}\right| \leqq L^3M(1+n)(1+6n+6n^2)\,,$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^5y_\nu}{\mathrm{d}x^5}\right| \leqq L^4M(1+n)(1+14n+36n^2+24n^3)\,,$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^6y_\nu}{\mathrm{d}x^6}\right| \leqq L^5M(1+n)(1+30n+150n^2+240n^3+120n^4)\,,$$

$$|{}^1k_{\nu,r+1}| \leqq M\,,\quad |{}^1R_{\nu,r+1}| \leqq hM,\quad |{}^1R'_{\nu,r+1}| \leqq M,\quad |{}^1R''_{\nu,r+1}| = \ldots = |{}^1R^{(5)}_{\nu,r+1}| = 0\,,$$

$$|E_m{}^2k_{\nu,r+1}| \leqq L^mM(1+n)^m\,,$$

$$|{}^2k_{\nu,r+1}| \leqq M\,,$$

$$|{}^2k'_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{2}LM(1+n)\,,\qquad |{}^2k''_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{4}L^2M(1+n)^2\,,$$

$$|{}^2k'''_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{8}L^3M(1+n)^3\,,\qquad |{}^2k''''_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{16}L^4M(1+n)^4\,,$$

$$|{}^2k^{(5)}_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{32}L^5M(1+n)^5\,,$$

$$|{}^2R_{\nu,r+1}| \leqq hM,\quad |{}^2R'_{\nu,r+1}| \leqq M\left(1+\frac{1+n}{2}hL\right),$$

$$|{}^2R''_{\nu,r+1}| \leqq LM(1+n)\left(1+\frac{1+n}{4}hL\right),$$

$$|{}^2R'''_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{4}L^2M(1+n)^2\left(3+\frac{1+n}{2}hL\right),$$

$$|{}^2R''''_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{2}L^3M(1+n)^3\left(1+\frac{1+n}{8}hL\right),$$

$$|{}^2R^{(5)}_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{16}L^4M(1+n)^4\left(5+\frac{1+n}{2}hL\right),$$

$$|E_m{}^3k_{\nu,r+1}| \leqq L^m M(1+n)^m \left(1+\frac{1}{2}\,nhL\right)^m ,$$

$$|{}^3k_{\nu,r+1}| \leqq M , \quad |{}^3k'_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{2}\,LM\,(1+n)\left(1+\frac{1}{2}\,nhL\right),$$

$$|{}^3k''_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{4}\,L^2M(1+n)\left[1+3n+\frac{3}{2}\,n\,(1+n)\,hL+\frac{1}{4}\,n^2(1+n)\,h^2L^2\right],$$

$$|{}^3k'''_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{8}\,L^3M(1+n)^2\left[1+10n+\frac{1}{2}\,n(7+13n)\,hL+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}\,n^2(1+n)\,h^2L^2+\frac{1}{8}\,n^3(1+n)\,h^3L^3\right],$$

$$|{}^3k''''_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{64}\,L^4M(1+n)^2\left[4+120n+164n^2+n(1+n)(30+126n)\,hL+\right.$$
$$\left.+n^2(1+n)(25+37n)\,h^2L^2+5n^3(1+n)^2\,h^3L^3+\frac{1}{4}\,n^4(1+n)^2\,h^4L^4\right],$$

$$|{}^3k^{(5)}_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{1024}\,L^5M(1+n)^3[32(1+77n+196n^2)+$$
$$+16n(31+312n+341n^2)\,hL+240n^2(1+n)(3+8n)\,h^2L^2+$$
$$+20n^3(1+n)(13+17n)\,h^3L^3+$$
$$+30n^4(1+n)^2\,h^4L^4+n^5(1+n)^2\,h^5L^5] ,$$

$$|{}^3R_{\nu,r+1}| \leqq hM , \quad |{}^3R'_{\nu,r+1}| \leqq M\left[1+\frac{1}{2}\,(1+n)\,hL+\frac{1}{4}\,n(1+n)\,h^2L^2\right],$$

$$|{}^3R''_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{16}\,LM\,(1+n)[16+4(1+5n)\,hL+6n(1+n)\,h^2L^2+$$
$$+n^2(1+n)\,h^3L^3] ,$$

$$|{}^3R'''_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{8}\,L^2M\,(1+n)\left[6+18n+(1+n)(1+19n)\,hL+\frac{1}{2}\,n(1+n)\,.\right.$$
$$\left..\,(7+16n)\,h^2L^2+\frac{3}{2}\,n^2(1+n)^2\,h^3L^3+\frac{1}{8}\,n^3(1+n)^2\,h^4L^4\right],$$

$$|{}^3R''''_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{8}\,(1+n)^2\,L^3M\left[4(1+10n)+\frac{1}{2}\,(1+58n+93n^2)\,hL+\right.$$
$$+\frac{1}{4}\,n(1+n)\,(15+87n)\,h^2L^2+\frac{1}{8}\,n^2(1+n)(25+41n)\,h^3L^3+$$
$$\left.+\frac{5}{8}\,n^3\,(1+n)^2\,h^4L^4+\frac{1}{32}\,n^4(1+n)^2\,h^5L^5\right],$$

$$|{}^3R^{(5)}_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{32}\,L^4M(1+n)^2\left[10(1+30n+41n^2)+(1+n)\,.\right.$$
$$.\,(1+152n+511n^2)\,hL+$$
$$+\frac{1}{2}\,n(1+n)(31+437n+526n^2)\,h^2L^2+$$

$$+ \frac{5}{2} n^2(1 + n)^2 (9 + 29n) h^3L^3 + \frac{5}{8} n^3 (1 + n)^2 (13 + 18n) h^4L^4 +$$

$$+ \frac{15}{16} n^4(1 + n)^3 h^5L^5 + \frac{1}{32} n^5(1 + n)^3 h^6L^6 \Big] ,$$

$$|E_m{}^4k_{\nu,r+1}| \leqq L^m M (1 + n)^m \left[1 + \frac{1}{2} nhL + \frac{1}{4} n^2h^2L^2\right]^m ,$$

$$|{}^4k^{(5)}_{\nu,r+1}| \leqq \frac{1}{1024} L^5M(1 + n)^2[64(16 + 373n + 1798n^2 + 1741n^3) +$$

$$+ 32n(211 + 3483n + 10173n^2 + 7381n^3) hL +$$

$$+ 16n^2(1 + n)(1351 + 10817n + 15346n^2) h^2L^2 +$$

$$+ 16n^3(1 + n)(1900 + 10320n + 10220n^2) h^3L^3 +$$

$$+ 4n^4(1 + n)(6605 + 24735n + 19330n^2) h^4L^4 +$$

$$+ 2n^5(1 + n)^2(7131 + + 13551n) h^5L^5 +$$

$$+ n^6(1 + n)^2(5211 + 7171n) h^6L^6 +$$

$$+ n^7(1 + n)^2(1265 + 1425n) h^7L^7 +$$

$$+ 205n^8(1 + n)^3 h^8L^8 +$$

$$+ 20n^9(1 + n)^3 h^9L^9 +$$

$$+ n^{10}(1 + n)^3 h^{10}L^{10}] ,$$

$$|A_\nu| \leqq \frac{1}{2880} L^4M(1 + n)(1 + 19n + 95n^2 + 101n^3) .$$

Nyní již můžeme dokončit odhad $\omega_{n,r+1}$. Dostaneme

$$\omega_{n,r+1} \leqq C_n = \frac{1}{2880} hM(hL)^4 n(1 + n) \Big[1 + 19n + 95n^2 + 101n^3 +$$

$$+ \frac{1}{2} (17 + 476n + 2464n^2 + 3926n^3 + 1929n^4) hL +$$

$$+ \frac{1}{4} n(1 + n)(121 + 1913n + 5413n^2 + 3861n^3) h^2L^2 +$$

$$+ \frac{1}{16} n^2(1 + n)^2(1441 + 11147n + 15586n^2) h^3L^3 +$$

$$+ \frac{1}{32} n^3(1 + n)^2(3865 + 20790n + 20525n^2) h^4L^4 +$$

$$+ \frac{1}{64} n^4(1 + n)^2(6620 + 24765n + 19345n^2) h^5L^5 +$$

$$+ \frac{1}{32} n^5(1 + n)^3(1783 + 3388n) h^6L^6 +$$

$$+ \frac{1}{256} n^6(1 + n)^3(5211 + 7171n) h^7L^7 +$$

$$+ \frac{1}{256} n^7(1 + n)^3(1265 + 1425n)\, h^8L^8 + \frac{205}{256} n^8(1 + n)^4h^9L^9 +$$

$$+ \frac{5}{64} n^9(1 + n)^4\, h^{10}L^{10} + \frac{1}{256} n^{10}(1 + n)^4\, h^{11}L^{11}\Big] . \qquad (17_n)$$

Pro soustavy o jedné nebo dvou diferenciálních rovnicích dostaneme speciálně

$$C_1 = \frac{1}{1440} hM(hL)^4(168 + 4406hL + 5654h^2L^2 + 7043{,}5h^3L^3 +$$
$$+ 5647{,}5h^4L^4 + 3170{,}625h^5L^5 + 1292{,}5h^6L^6 + 386{,}9375h^7L^7 +$$
$$+ 84{,}0625h^8L^8 + 12{,}8125h^9L^9 + 1{,}25h^{10}L^{10} + 0{,}0625h^{11}L^{11}) , \qquad (17_1)$$

$$C_2 = \frac{1}{480} hM(hL)^4(1227 + 36548{,}5hL + 84730{,}5h^2L^2 + 193677{,}75h^3L^3 +$$
$$+ 286976{,}25h^4L^4 + 300442{,}5h^5L^5 + 231093h^6L^6 + 131982{,}75h^7L^7 +$$
$$+ 55552{,}5n^8L^8 + 16605h^9L^9 + 3240h^{10}L^{10} + 324h^{11}L^{11}) . \qquad (17_2)$$

(Při striktní specialisaci vzorce (17_n) pro $n = 1$ bychom dostali v (17_1) jako prvý člen v závorce 216 a nikoliv 168. Zlepšení je možné proto, že pro $n = 1$ lze v A_ν některé výrazy sloučit a tak je lépe odhadnout.)

Ovšem i tyto odhady jsou pro praxi příliš těžkopádné a uvádím proto níže v tabulce 1 hodnoty výrazů $\frac{1}{hM} C_1$ a $\frac{1}{hM} C_2$ pro různé hodnoty součinu hL.

Tabulka 1

hL	$C_1 \frac{1}{hM} \cdot 10^5$	$C_2 \frac{1}{hM} \cdot 10^5$
0,01	$1{,}48 \cdot 10^{-4}$	0,0033
0,02	0,0029	0,0664
0,03	0,0172	0,406
0,04	0,0629	1,513
0,05	0,175	4,287
0,06	0,409	10,18
0,07	0,845	21,38
0,08	1,594	41,00
0,09	2,806	73,33
0,10	4,672	124,06
0,11	7,436	200,6
0,12	11,398	312,6
0,13	16,929	471,8
0,14	24,472	693,4
0,15	34,559	995,6
0,16	47,814	1400,9
0,17	64,974	1936,4
0,18	86,891	2635
0,19	114,553	3535
0,20	149,094	4682

Tabulka 2

$h\hat{M}$	$C_1^* \frac{1}{h} \cdot 10^{-6}$	$C_2^* \frac{1}{h} \cdot 10^{-6}$
0,01	0,0005	0,0092
0,02	0,0126	0,2186
0,03	0,0855	1,7633
0,04	0,3402	7,2413
0,05	1,004	21,866
0,06	2,448	54,269
0,07	5,227	117,56
0,08	10,117	230,44
0,09	18,166	418,44
0,10	30,732	715,21
0,11	49,537	1.164,02
0,12	76,720	1.819,32
0,13	114,884	2.748,48
0,14	167,163	4.033,64
0,15	237,276	5.773,83
0,16	329,597	8.087,17
0,17	449,217	11.113,33
0,18	602,026	15.016,21
0,19	794,780	19.986,82
0,20	1035,185	26.246,47

Výrazy, které odpovídají veličinám C_n, C_1, C_2 za předpokladu (γ) a které označíme C_n^*, C_1^*, C_2^*, zní:

$$C_n^* = \frac{1}{2880} h^5 \hat{M}^4 n \Big[1 + 16n + 60n^2 + 24n^3 +$$

$$+ \frac{1}{4} h\hat{M}(34 + 981n + 5710n^2 + 11150n^3 + 9025n^4 + 2622n^5) +$$

$$+ \frac{1}{8} h^2\hat{M}^2 n(242 + 4230n + 15160n^2 + 19720n^3 + 9780n^4 + 1551n^5) +$$

$$+ \frac{1}{16} h^3\hat{M}^3 n^2(1441 + 13865n + 36510n^2 + 34510n^3 + 12495n^4 + 1410n^5) +$$

$$+ \frac{5}{32} h^4\hat{M}^4 n^3(773 + 5315n + 9870n^2 + 6778n^3 + 1746n^4 + 132n^5) +$$

$$+ \frac{5}{64} h^5\hat{M}^5 n^4(1324 + 6210n + 8330n^2 + 4052n^3 + 708n^4 + 32n^5) +$$

$$+ \frac{1}{128} h^6\hat{M}^6 n^5(7132 + 23915n + 22500n^2 + 7480n^3 + 800n^4 + 16n^5) +$$

$$+ \frac{1}{256} h^7\hat{M}^7 n^6(5211 + 12090n + 7800n^2 + 1600n^3 + 80n^4) +$$

$$+ \frac{5}{256} h^8\hat{M}^8 n^7(217 + 414n + 184n^2 + 16n^3) -$$

$$+ \frac{5}{256} h^9\hat{M}^9 n^8(41 + 40n + 8n^2) + \frac{5}{128} h^{10}\hat{M}^{10} n^9(2 + n) + \frac{1}{256} h^{11}\hat{M}^{11} n^{10} \Big], \tag{18_n}$$

$$C_1^* = \frac{1}{720} h^5\hat{M}^4 \Big[19\frac{1}{4} + 1845\frac{1}{8} h\hat{M} + 1583\frac{27}{32} h^2\hat{M}^2 + 1566\frac{7}{64} h^3\hat{M}^3 +$$

$$+ 961\frac{31}{64} h^4\hat{M}^4 + 403\frac{7}{16} h^5\hat{M}^5 + 120\frac{403}{512} h^6\hat{M}^6 + 26\frac{157}{1024} h^7\hat{M}^7 +$$

$$+ 4\frac{59}{1024} h^8\hat{M}^8 + \frac{445}{1024} h^9\hat{M}^9 + \frac{15}{512} h^{10}\hat{M}^{10} + \frac{1}{1024} h^{11}\hat{M}^{11} \Big], \tag{18_1}$$

$$C_2^* = \frac{1}{720} h^5\hat{M}^4 \Big[232\frac{1}{2} + 42792\frac{1}{2} h\hat{M} + 54151\frac{3}{4} h^2\hat{M}^2 + 87041\frac{3}{8} h^3\hat{M}^3 +$$

$$+ 85791\frac{7}{8} h^4\hat{M}^4 + 57395 h^5\hat{M}^5 + 27264\frac{1}{4} h^6\hat{M}^6 + 9333\frac{7}{8} h^7\hat{M}^7 +$$

$$+ 2281\frac{1}{4} h^8\hat{M}^8 + 382\frac{1}{2} h^9\hat{M}^9 + 40 h^{10}\hat{M}^{10} + 2 h^{11}\hat{M}^{11} \Big]. \tag{18_2}$$

(Také zde je prvý člen v závorce ve výrazu pro C_1^* poněkud menší — $19\frac{1}{4}$ místo $25\frac{1}{4}$ — než jaký bychom dostali dosazením $n = 1$ do vzorce (18_n) a to ze stejného důvodu jako u C_1.)

Hodnoty veličin $\frac{1}{h} C_1^*$ a $\frac{1}{h} C_2^*$ jsou pro různé hodnoty součinu $h\hat{M}$ uvedeny v tabulce 2.

Příklad 1. Porovnání odhadů chyby za různých předpokladů provedeme na jednoduchém příkladě

$$y' = x^2 + y\,, \quad y(0) = 0\,, \tag{*}$$

pro $h = 0{,}1$ (t. j. přiměřená délka kroku vzhledem k tomu, že $K = 1$ a že h zpravidla volíme tak, aby součin Kh ležel v intervalu $\langle 0{,}05;\ 0{,}15\rangle$).

Jelikož $y(0{,}1) = 0{,}000\,341\,836$ a $\tilde{y}(0{,}1) = 0{,}000\,341\,875$ je

$$|y(0{,}1) - \tilde{y}(0{,}1)| = 0{,}000\,000\,039 \doteq 4\,.\,10^{-8}\,.$$

K odhadu velikosti funkce $f = x^2 + y$ musíme nejdříve zjistit, v jaké oblasti probíhá integrál $y(x)$. S jistou obezřetností bychom mohli předpokládat, že tato oblast je dána průběhem přibližného integrálu $\tilde{y}(x)$. Tím se také v praxi většinou spokojujeme. Jelikož v našem případě můžeme snadno vymezit uvedenou oblast precisní methodou, které lze s modifikacemi užít i v jiných případech, provedeme odhad oblasti přímo. Snadno se přesvědčíme, že Taylorův rozvoj řešení rovnice (*) v okolí bodu (0, 0) začíná členem $\frac{1}{3} x^3$. Určeme nyní interval, ve kterém leží $y(x)$ pod křivkou $\psi(x) = \frac{1}{2} x^3$ (v okolí (0, 0) tomu tak zřejmě je). Jelikož funkce $x^2 + y$ roste s rostoucím y, je zřejmé, že $y(x)$ bude ležet pod $\psi(x)$ při nejmenším potud, pokud bude křivka $\Psi(x) = \psi(0) + \int_0^x [\xi^2 + \psi(\xi)]\,d\xi$ ležet pod křivkou $\psi(x)$. Snadno zjistíme, že vztahu $\Psi(x) \leq \psi(x)$ je vyhověno pro $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$ a tedy $y \leq \frac{1}{2} x^3$ pro $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$.

Při Bieberbachově odhadu chyby musíme určit konstanty M a N tak, aby v oblasti $0 \leq x \leq 0{,}1$; $0 \leq y \leq b$ byly splněny nerovnosti

$$|f| = |x^2 + y| \leq M\,, \quad |f_x| = |2x| \leq 0{,}2 \leq MN\,, \quad |f_y| = 1 \leq N\,,$$
$$|f_{xx}| = 2 \leq MN\,, \quad hN \leq 1\,, \quad 0{,}1M \leq b$$

(ostatní derivace jsou rovny nule). Nejvýhodnější volba konstant M, N a b v našem případě je zřejmě $M = 2$, $N = 1$, $b = 0{,}2$. Bieberbachův vzorec pro odhad chyby dává

$$|y(0{,}1) - \tilde{y}(0{,}1)| \leq 6MNh^5 \frac{|N^5 - 1|}{|N - 1|} = 0{,}0006\,.$$

Za předpokladu (α) máme volit konstanty L a M tak, aby byly splněny nerovnosti

$$|f| = |x^2 + y| < 0{,}011 \leq M\,, \quad |f_x| = |2x| \leq 0{,}2 \leq LM\,, \quad |f_y| = 1 \leq L\,,$$
$$|f_{xx}| = 2 \leq L^2M\,,$$

Nejvýhodnější je zvolit $L = 1$, $M = 2$. (V tomto případě jsme tedy nic nezískali tím, že při odhadu veličiny $\frac{\partial^{i+j_1+\ldots+j_n} f}{\partial x^i \partial y_1^{j_1} \ldots \partial y_n^{j_n}}$ bereme v čitateli konstantu L v $(i + j_1 + \ldots + j_n)$-té mocnině na rozdíl od Bieberbachova předpokladu, v němž je konstanta N v prvé mocnině. Avšak na př. u diferenciální rovnice $y' = x^2 + 2y$ by se již i v tomto směru výhoda předpokladu (α) objevila.) Odhad (17_1) nyní dává

$$|y(0,1) - \tilde{y}(0,1)| \doteq 1,01 \cdot 10^{-5} .$$

Odhad je tedy 55-krát lepší odhadu Bieberbachova.

Za předpokladu (β) máme zvolit konstantu $\tilde{M}$ tak, aby byly splněny nerovnosti

$$|f| < 0,011 \leq \tilde{M}, \quad |f_x| = |2x| \leq 0,2 \leq \tilde{M}^2, \quad |f_y| = 1 \leq \tilde{M}, \quad |f_{xx}| = 2 \leq \tilde{M}^3 .$$

Nejvýhodnější je zřejmě volit $\tilde{M} = \sqrt[3]{2} \doteq 1,26$ a vzorec (17_1), v němž položíme $L = M = \tilde{M}$ nám dává

$$|y(0,1) - \tilde{y}(0,1)| \doteq 2 \cdot 10^{-5} .$$

Konečně proveďme odhad za předpokladu (γ). Podmínky $f(0, 0) = 0$ a $|f(x, y)| \leq 1$ jsou v intervalu $\langle 0; 0,1 \rangle$ od počátku splněny a zbývá už jen určit konstantu $\hat{M}$ tak, aby byly splněny nerovnosti

$$|f_x| = |2x| \leq 0,2 \leq \hat{M}, \quad |f_y| = 1 \leq \hat{M}, \quad |f_{xx}| = 2 \leq \hat{M}^2 .$$

Nejvýhodnější zřejmě je položit $\hat{M} = \sqrt{2} = 1,42$. Podle vzorce ($18_1$) a tabulky 2 dostaneme

$$|y(0,1) - \tilde{y}(0,1)| = 1,8 \cdot 10^{-5} .$$

Jak je patrno, v našem případě dostáváme nejlepší odhad za předpokladu (α). Ačkoliv však je tento odhad přibližně 55-krát lepší než odhad Bieberbachův, zůstává přesto téměř 250-krát větší skutečná chyba.

Uveďme ještě pro zajímavost, že kdybychom provedli odhad za úplně obdobných předpokladů jako v (β), avšak šli bychom v rozvoji pouze do členů 5. stupně, dostali bychom pro $n = 1$ obecně vzorec

$$|y - \tilde{y}| \leq \frac{1}{6!} h^5 \overline{M}^5 \Big(1820 + 1845 h\overline{M} + 1790 h^2 \overline{M}^2 + 1178\frac{3}{4} h^3 \overline{M}^3 + 520\frac{5}{8} h^4 \overline{M}^4 + \\ + 159\frac{1}{16} h^5 \overline{M}^5 + 33\frac{7}{16} h^6 \overline{M}^6 + 4\frac{3}{8} h^7 \overline{M}^7 + \frac{5}{16} h^8 \overline{M}^8 \Big) . \qquad (19)$$

V našem případě odtud dostaneme, že

$$|y(0,1) - \tilde{y}(0,1)| \leq 9,2 \cdot 10^{-5} .$$

Porovnáme-li tento výsledek s odhadem Bieberbachovým a s odhadem za předpokladu (β), vidíme, že v tomto případě získáváme přibližně stejně tím, že volíme vhodnější omezení pravých stran (odhad se přibližně šestkrát zmenší) jako tím, že jdeme v rozvoji až do členu 6. řádu (odhad se zlepší přibližně pětkrát).

2. Odhad chyby po s krocích

Přejděme nyní k odhadu chyby Runge-Kuttovy formule po s krocích ($s \leqq N$).

V celém tomto paragrafu pro jednoduchost výsledného vzorce předpokládejme, že konstanty L, M, $\tilde{M}$ a $\hat{M}$ z předcházejícího paragrafu a Lipschitzova konstanta K byly zvoleny tak, aby vyhovovaly příslušným nerovnostem v celém oboru Q. V těch případech, kdy délka kroku h je malá proti délce intervalu $\langle x_0, x_N \rangle$ a odhadované veličiny se poměrně rychle mění, se tím odhad ovšem může podstatně zhoršit. Tomu v praxi čelíme tím, že nebereme za konstanty maximální hodnoty funkcí, nýbrž nějaké jejich ,,průměrné" hodnoty.

Nejprve uvedu odhad chyby, který snadno odvodíme na základě Bukovicsovy myšlenky [3], které užil k odhadu chyby Runge-Kuttovy formule pro přibližné řešení diferenciální rovnice n-tého řádu.

Označme ${}^{r+1}y \equiv (y_{1,r+1}, \ldots, y_{n,r+1})$ vektorovou funkci definovanou na intervalu $\langle x_r, x_{r+1} \rangle$ a mající na něm stejné hodnoty jako funkce $y \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ (t. j. přesné řešení soustavy (1) s počátečními podmínkami (2)). Označme dále $\eta_{\nu,r+1}$ a ${}^{\mu}\varkappa_{\nu,r+1}$ výrazy, které jsou utvořeny zcela analogicky jako $y_{\nu,r+1}$ a ${}^{\mu}k_{\nu,r+1}$ jen s tím rozdílem, že na všech příslušných místech stojí hodnoty přesného řešení $y(x)$ a nikoliv přibližného řešení $\tilde{y}(x)$ (t. j. Runge-Kuttova formule je utvořena tak, jako by přibližné řešení vycházelo v každém intervalu z bodu $(x_r, y_{1,r}(x_r), \ldots, y_{n,r}(x_r))$ a nikoliv z bodu $(x_r, \tilde{y}_{1,r}(x_r), \ldots, \tilde{y}_{n,r}(x_r))$. Je tedy

$$\eta_{\nu,r+1}(x) = y_{\nu,r}(x_r) + \frac{1}{6}(x - x_r)[{}^{1}\varkappa_{\nu,r+1} + 2\,{}^{2}\varkappa_{\nu,r+1} + 2\,{}^{3}\varkappa_{\nu,r+1} + {}^{4}\varkappa_{\nu,r+1}]\,,$$

kde

$${}^{1}\varkappa_{\nu,r+1} = f_\nu(x_r, y_{1,r}(x_r), \ldots, y_{n,r}(x_r))\,,$$

$${}^{2}\varkappa_{\nu,r+1} = f_\nu\Big(x_r + \frac{1}{2}(x - x_r), y_{1,r}(x_r) + \frac{1}{2}(x - x_r)\,{}^{1}\varkappa_{1,r+1}, \ldots, y_{n,r}(x_r) + \\ + \frac{1}{2}(x - x_r)\,{}^{1}\varkappa_{n,r+1}\Big)\,,$$

$${}^{3}\varkappa_{\nu,r+1} = f_\nu\Big(x_r + \frac{1}{2}(x - x_r), y_{1,r}(x_r) + \frac{1}{2}(x - x_r)\,{}^{2}\varkappa_{1,r+1}, \ldots, y_{n,r}(x_r) + \\ + \frac{1}{2}(x - x_r)\,{}^{2}\varkappa_{n,r+1}\Big)\,,$$

$${}^{4}\varkappa_{\nu,r+1} = f_\nu(x_r + (x - x_r), y_{1,r}(x_r) + (x - x_r)\,{}^{3}\varkappa_{1,r+1}, \ldots, y_{n,r}(x_r) + (x - x_r)\,{}^{3}\varkappa_{n,r+1})\,.$$

Očividně platí

$$\sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r+1}(x) - \tilde{y}_{\nu,r+1}(x)| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r+1}(x) - \eta_{\nu,r+1}(x)| + \sum_{\nu=1}^{n} |\eta_{\nu,r+1}(x) - \tilde{y}_{\nu,r+1}(x)|.$$

Jelikož odhad (17_n) resp. (18_n) platí pro libovolný bod z Q, je zřejmě

$$\max_{\xi \in \langle x_r, x_{r+1} \rangle} \sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r+1}(\xi) - \eta_{\nu,r+1}(\xi)| \leq C_n .$$

Dále platí

$$|{}^1k_{\nu,r+1} - {}^1\varkappa_{\nu,r+1}| \leq K \sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r}(x_r) - \tilde{y}_{\nu,r}(x_r)| ,$$

$$|{}^2k_{\nu,r+1} - {}^2\varkappa_{\nu,r+1}| \leq K \left(1 + \frac{1}{2} nhK\right) \sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r}(x_r) - \tilde{y}_{\nu,r}(x_r)| ,$$

$$|{}^3k_{\nu,r+1} - {}^3\varkappa_{\nu,r+1}| \leq K \left(1 + \frac{1}{2} nhK + \frac{1}{4} n^2h^2K^2\right) \sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r}(x_r) - \tilde{y}_{\nu,r}(x_r)| ,$$

$$|{}^4k_{\nu,r+1} - {}^4\varkappa_{\nu,r+1}| \leq K \left(1 + nhK + \frac{1}{2} n^2h^2K^2 + \frac{1}{4} n^3h^3K^3\right) \sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r}(x_r) - \tilde{y}_{\nu,r}(x_r)| .$$

Odtud plyne

$$\max_{\xi \in \langle x_r, x_{r+1} \rangle} \sum_{\nu=1}^{n} |\eta_{\nu,r+1}(\xi) - \tilde{y}_{\nu,r+1}(\xi)| \leq$$
$$\leq \left(1 + nhK + \frac{1}{2} n^2h^2K^2 + \frac{1}{6} n^3h^3K^3 + \frac{1}{24} n^4h^4K^4\right) \sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r}(x_r) - \tilde{y}_{\nu,r}(x_r)| .$$

Je tedy

$$\varphi(x_r, x_{r+1}) \leq \left(1 + nhK + \frac{1}{2} n^2h^2K^2 + \frac{1}{6} n^3h^3K^3 + \frac{1}{24} n^4h^4K^4\right) \varphi(x_{r-1}, x_r) + C_n .$$

Odtud již snadno najdeme

$$\varphi(x_0, x_s) \leq C_n \frac{\left(1 + nhK + \frac{1}{2} n^2h^2K^2 + \frac{1}{6} n^3h^3K^3 + \frac{1}{24} n^4h^4K^4\right)^s - 1}{\left(1 + nhK + \frac{1}{2} n^2h^2K^2 + \frac{1}{6} n^3h^3K^3 + \frac{1}{24} n^4h^4K^4\right) - 1} =$$
$$= C_n \Phi_{n,s}(hK) . \qquad (20)$$

Koeficient $\Phi_{n,s}(hK)$, nepřihlížíme-li ke změně konstant K, L, M atd. se změnou délky intervalu, udává, kolikrát se zvětší chyba, zvětšíme-li počet kroků. Pro větší názornost je jeho velikost pro $n = 1,2$, $hK = 0,04$ resp. 0,1 a speciální hodnoty s uvedena v tabulce 3.

Odvoďme nyní ještě jeden odhad chyby Runge-Kuttovy formule po s krocích, který snadno plyne ze specialisace jedné obecné věty z theorie diferenciálních rovnic ([4], str. 152, věta 5), avšak pro velké hodnoty nhK a s dává podstatně horší výsledky.

Uveďme bez důkazu větu, o kterou se budeme opírat:

Nechť funkce f_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) jsou v Q spojité a ohraničené a nechť v Q splňují Lipschitzovu podmínku s jednotnou konstantou K. Buďtež $\varphi(x) \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ resp. $\bar{\varphi}(x) = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_n)$ dva integrály soustavy (1) s počátečními body $(\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ resp. $(\xi, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots, \bar{\eta}_n)$. Potom platí

Tabulka 3

	$n = 1$		$n = 2$			
s	$\Phi_{1,s}(0{,}04)$	$\Phi_{1,s}(0{,}1)$	$\Phi_{2,s}(0{,}04)$	$\Psi_{2,s}(0{,}04)$	$\Phi_{2,s}(0{,}1)$	$\Psi_{2,s}(0{,}1)$
10	12,051	16,338	14,715	14,715	28,857	28,857
20	30,030	60,749	47,462	47,463	242,07	242,084
30	56,851	181,472	120,343	120,345	1817,529	1817,632
40	96,862	509,629	282,541	282,547	13458,36	13459,443
50	156,553	1401,653	643,519	643,535	99471,1	99481,44
60	245,601	3826,426	1446,887	1446,928	735009,0	735102,8
70	378,445	10417,643	3234,800	3234,913	5430934	5431744
80	576,626	28334,429	7213,871	7214,146	40128635	40135496
90	872,276	77037,303	16069,36	16070,091	$29650587 \,.\, 10^1$	296563466
100	1313,333	209425,44	35777,71	35779,359	$21908491 \,.\, 10^2$	2191324075

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varphi_\nu(x) - \bar{\varphi}_\nu(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu| \, e^{nK|x-\xi|} .$$

Jelikož f_ν splňují v Q předpoklady věty a ${}^{r+1}y$ resp. Y_{r+1} jsou dva integrály soustavy (1) procházející body $(x_r, y_{1,r}(x_r), \ldots, y_{n,r}(x_r))$ resp. $(x_r, \bar{y}_{1,r}(x_r), \ldots, \bar{y}_{n,r}(x_r))$, platí

$$\sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r+1}(x) - Y_{\nu,r+1}(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r}(x_r) - \bar{y}_{\nu,r}(x_r)\, e^{nhK(x-x_r)} . \tag{21}$$

Zřejmě platí

$$\sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r+1}(x) - \bar{y}_{\nu,r+1}(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,r+1}(x) - Y_{\nu,r+1}(x)| + \\ + \sum_{\nu=1}^{n} |Y_{\nu,r+1}(x) - y_{\nu,r+1}(x)| . \tag{22}$$

Z rovnic (21) a (22) opět snadno plyne nerovnost

$$\varphi(x_0, x_s) \leqq C_n \frac{e^{snhK} - 1}{e^{nhK} - 1} = C_n \, \Psi_{n,s}(hK) . \tag{23}$$

Některé hodnoty funkce $\Psi_{n,s}(hK)$ pro $n = 2$, $hK = 0{,}04$ resp. $0{,}1$ jsou opět zaneseny v tabulce 3. (Hodnoty funkcí $\Psi_{1,s}(0{,}04)$ a $\Psi_{1,s}(0{,}1)$ souhlasí pro s zachycená v tabulce 3 a při stejné přesnosti s hodnotami funkce $\Phi_{1,s}$ $(0{,}1)$ a nejsou proto v tabulce uváděny.)

Tabulka 4

s	x	y_s (přesné)	$\check{y}_s$ (přibl.)	Chyba	$\frac{\lvert y(x_s)-\tilde{y}_s(x_s)\rvert}{\lvert y(x_1)-\tilde{y}_1(x_1)\rvert}$	$\Phi_{1,s}(0{,}04)$
1	0,04	0,000 021 548 408	0,000 021 548 800	0,000 000 000 392	1	1
10	0,4	0,023 649 395 2	0,023 649 396 4	0,000 000 001 2	3,1	12,051
20	0,8	0,211 081 857 0	0,211 081 847	0,000 000 010	25,5	30,030
30	1,2	0,800 233 845 4	0,800 233 802	0,000 000 043 4	110,7	56,851
40	1,6	2,146 064 848 8	2,146 064 55	0,000 000 298 8	762,2	96,862
50	2,0	4,778 112 197 8	4,778 111 81	0,000 000 387 8	989,3	156,553
60	2,4	9,486 352 761 2	9,486 352 06	0,000 000 701 2	1 788,8	245,601
70	2,8	17,449 293 542 2	17,449 292 0	0,000 001 542 2	3 934,2	378,445
80	3,2	30,425 060 394 2	30,425 057 7	0,000 002 694 2	6 872,9	576,625
90	3,6	51,036 468 887 4	51,036 463 8	0,000 005 087 4	12 978,1	872,275
100	4,0	83,196 300 066 2	83,196 291 8	0,000 008 266 2	21 087,2	1313,333

Tabulka 5

s	x	y_1	$\tilde{y}_1$	y_2	y_2	$\frac{\sum_{\nu=1}^{2}\lvert y_{\nu,s}(x_s)-\tilde{y}_{\nu,s}(x_s)\rvert}{\sum_{\nu=1}^{2}\lvert y_{\nu,1}(x_1)-\tilde{y}_{\nu,1}(x_1)\rvert}$	$\Phi_{2,s}(0{,}1)$
1	0,05	2,213 105 34	2,213 104 69	0,110 563 14	0,110 562 50	1	1
10	0,5	6,130 410 34	6,130 385 24	2,832 967 80	2,832 942 82	38,82	28,857
20	1,0	22,803 819	22,803 594	17,367 255 1	17,367 030 8	348,06	242,07
30	1,5	94,498 820	94,497 309	85,535 442	85,533 933	2 341,085	1 817,529
40	2,0	410,817 850	410,808 82	396,039 738	396,030 72	14 000,0	13 458,36
50	2,5	1 820,224 90	1 820,174 13	1 795,859 92	1 795,809 20	78 674,41	99 471,1
60	3,0	8 123,169 47	8 122,896 68	8 082,998 39	8 082,725 70	422 852,7	735 009,0
70	3,5	36 348,618 6	36 347,192 7	36 282,387 7	36 280,961 9	2 210 620	5 430 934
80	4,0	162 809,388	162 802,091	162 700,192	162 692,894	11 313 950	40 128 635
90	4,5	729 506,387	729 469,597	729 326,353	729 289,562	57 039 530	296 505 870
100	5,0	3 269 165,79	3 268 982,64	3 268 868,96	3 268 685,81	2 839 535 . 10^2	21 908 491 . 10^2

Příklad 2. Na tomto místě se už nebudeme zdržovat odhadem chyby způsobené vlivem integrační methody, nýbrž si všimneme pouze toho, do jaké míry funkce $\Phi_{n,s}(hK)$ správně zachycuje vzrůst chyby vlivem nepřesností v předcházejících intervalech. Za tím účelem porovnáme funkci $\Phi_{n,s}(hK)$ s výrazem $\dfrac{\sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,s}(x_s) - \tilde{y}_{n,s}(x_s)|}{\sum_{\nu=1}^{n} |y_{\nu,1}(x_1) - \tilde{y}_{\nu,1}(x_1)|}$. Tím sice zanedbáme změnu integrační chyby vlivem změny velikosti pravých stran a jejich derivací, ale pro naše účely toto hrubé srovnání úplně postačí.

Vezměme opět rovnici

$$y' = x^2 + y\,, \quad y(0) = 0$$

a integrujme ji na intervalu $\langle 0, 4\rangle$ při délce kroku $h = 0{,}04$. Z tabulky 4 vidíme, že funkce $\Phi_{1,s}(hK)$ zachycuje v tomto případě až do $s = 50$ řádově celkem správně vzrůst chyby.

Uveďme pro větší názornost ještě obdobné výsledky pro jednoduchou soustavu dvou diferenciálních rovnic.

Příklad 3. Najděme přibližné řešení soustavy

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = 2y_1 + y_2\,, \qquad y_1(0) = 2$$

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = y_1 + 2y_2\,, \qquad y_2(0) = 0$$

na intervalu $\langle 0; 5\rangle$ při délce kroku $h = 0{,}05$.

Z tabulky 5, v níž vedle přesných a přibližných hodnot y_1 a y_2 pro $s = 1, 10, 20, \ldots, 100$ jsou také vyneseny hodnoty výrazu

$$\Big[\sum_{\nu=1}^{2} |y_{\nu,s}(x_s) - \tilde{y}_{\nu,s}(x_s)|\Big] : \Big[\sum_{\nu=1}^{2} |y_{\nu,1}(x_1) - \tilde{y}_{\nu,1}(x_1)|\Big]$$

a funkce $\Phi_{2,s}(0{,}1)$ (v našem případě $K = 2$ a tedy $hK = 0{,}1$), vidíme, že $\Phi_{2,s}(0{,}1)$ zachycuje v tomto případě růst chyby celkem správně až do $s = 80$. (To, že s počátku je podíl

$$\Big[\sum_{\nu=1}^{2} |y_{\nu,s}(x_s) - \tilde{y}_{\nu,s}(x_s)|\Big] : \Big[\sum_{\nu=1}^{2} |y_{\nu,1}(x_1) - \tilde{y}_{\nu,1}(x_1)|\Big]$$

větší než hodnoty funkce $\Phi_{2,s}(0{,}1)$ nás nesmí překvapit, neboť tento podíl udává vzájemný poměr skutečných chyb, zatím co funkce $\Phi_{2,s}$ udává maximální poměr maximálních odhadů těchto chyb.)

Snadno lze ovšem najít případy, u nichž vzhledem k nikoliv monotonnímu chování komponent řešení, je chyba po několika desítkách kroků řádově táž jako po jednom kroku. V takových případech udává funkce $\Phi_{n,s}(hK)$ hodnoty zcela nesprávné; to je ovšem přirozený důsledek toho, že při odvozování funkce $\Phi_{n,s}(hK)$ vycházíme z nejhoršího možného případu.

LITERATURA

[1] *Bieberbach*: Theorie der Differentialgleichungen, Berlin 1924.

[2] *Bieberbach*: On the remainder of the Runge-Kutta formula, ZAMP *2* (1951), str. 233—248.

[3] *Bukovics*: Beiträge zur numerischen Integration II, Monatshefte für Math. *57* (1953), str. 333—350.

[4] *Kamke*: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1952., 2. vyd.

[5] *Lotkin*: On the accuracy of Runge-Kutta's method, Math. Tabl. Oth. Aids Comp. *5* (1951), str. 128—133.

Резюме

ОЦЕНКА ОШИБКИ ФОРМУЛЫ РУНГЕ — КУТТА

ОТТО ВЕЙВОДА (Otto Vejvoda)

(Поступило в редакцию 16/I 1956 г.)

Речь идет об оценке ошибки известной формулы Рунге-Кутта (4) для численного решения системы n дифференциальных уравнений (1) с начальными значениями (2). Даются верхние границы ошибки формулы Рунге-Кутта для одного шага при трех различных предположениях (α), (β) или (γ) о величине правых частей системы (1) и их частных производных. При предположениях (α) соотв. (γ) это величины C_n (17_n) соотв. C_n^* (18_n). При предположениях (β) мы получим верхнюю границу для ошибки, если положить в (17_n) $L = M = \tilde{M}$. Основная идея является общей для всех трех новых оценок ошибки и состоит в том, что мы идем в разложениях Тэйлора точного и приближенного решения до членов 6-ого порядка включительно (таким образом возможно разность членов 5-ого порядка, которая ,,в общем" является решающей для ошибки, оценить гораздо точнее). Вопреки тому, что новые оценки дают лучшие результаты, чем старая оценка Бибербаха, они остаются неудовлетворительными. Суть дела в том, что почти невозможно пытаться с помощью нескольких констант хорошо оценить много функций, которые могут быть вполне различного характера и величны.

Кроме того даются оценки ошибки (20) и (23) формулы Рунге-Кутта после s шагов, во первых по одному методу, которым воспользовался Букович [3] для оценки ошибки формулы Рунге-Кутта при одном дифференциальном уравнении n-ого порядка и во вторых на основании одной общей теоремы из теории дифференциальных уравнений [4].

Zusammenfassung

DIE FEHLERABSCHÄTZUNG DER RUNGE-KUTTA-FORMEL

OTTO VEJVODA

(Eingegangen am 16. April 1956.)

Es handelt sich um die Fehlerabschätzung der bekannten Runge-Kutta-Formel (4) für die numerische Auflösung eines Systems von n Differentialgleichungen (1) mit Anfangsbedingungen (2). Die obere Grenze des Fehlers der Runge-Kutta-Formel bei einem Schritte ist unter drei verschiedenen Voraussetzungen (α), (β) und (γ) über die Grösse der rechten Seiten von (1) und ihrer partiellen Differentialquotienten abgeleitet. Für die Voraussetzungen (α) resp. (γ) sind es die Grössen C_n (17_n) resp. C_n^* (18_n). Bei den Voraussetzungen (β) erhält man die obere Grenze für den Fehler, wenn man in (17_n) $L = M = \tilde{M}$ einsetzt. Der gemeinsame Grundgedanke, der allen diesen drei neuen Fehlerabschätzungen zu Grunde liegt, ist derjenige, dass man in den Entwicklungen der genauen und der angenäherten Lösung bis zu den Gliedern sechster Ordnung geht (so ist die Differenz der Glieder fünfter Ordnung, die im allgemeinen für den Fehler massgebend ist, viel genauer abgeschätzt). Obgleich diese neuen Abschätzungen bessere Resultate geben als die alte Bieberbachsche Abschätzung, sind sie doch noch unbefriedigend. Das liegt darin, dass es fast unmöglich ist, nur mit Hilfe einiger Konstanten viele Funktionen, die ganz verschiedener Grösse und verschiedenen Charakters sein können, befriedigend abzuschätzen.

Ausserdem sind zwei Fehlerabschätzungen (20) und (23) der Runge-Kutta-Formel nach s Schritten abgeleitet, und zwar erstens nach einer Methode, die Bukovics [3] zur Fehlerabschätzung der Runge-Kutta-Formel bei einer Differentialgleichung n-ter Ordnung benutzte und zweitens nach einem allgemeinen Satze aus der Theorie der Differentialgleichungen [4].