

# Aplikace matematiky

---

Jaroslav Janatka

Řešení vlastních torsních kmitů diferenčním počtem

*Aplikace matematiky*, Vol. 1 (1956), No. 4, 245–275

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102533>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ČLÁNKY

ŘEŠENÍ VLASTNÍCH TORSNÍCH KMITŮ DIFERENČNÍM  
POČTEM

JAROSLAV JANATKA

(Došlo dne 7. října 1955.)

DT: 534.1.013: 517.949.004

V článku je uvedena jednoduchá metoda výpočtu vlastních torsních kmitů soustavy o mnoha stupních volnosti, jež obsahuje celou řadu stejných prvků. Po stránce matematické se jedná o řešení okrajového problému diferenční rovnice homogenní soustavy, při čemž okrajové podmínky závisí na připojených obecných kotoučích.

Prvním, kdo se u nás zabýval užitím diferenčního počtu k řešení úloh torsního kmitání, je Kožešník. Tyto práce nejsou bohužel dosažitelné a proto autor nemohl z nich čerpat.<sup>1)</sup> BUDINSKÝ [1] použil diferenčního počtu k redukcí hmot homogenní soustavy a k sestavení t. zv. náhradní funkce, jíž potom užil k přibližnému vyšetření frekvence vlastních torsních kmitů. Povzbuzením bylo autorovi dílo KÁRMÁNOVO a BIOROVO [3].

Autorův příspěvek spočívá ve způsobu řešení a v nalezení prakticky jednoduchého tvaru frekvenční rovnice, která platí pro libovolný počet obecných kotoučů, připojených k oběma stranám homogenní soustavy. Pokud je autorovi známo, nebyla dosud tato metoda nikde uveřejněna. Ani Kožešník ji ve své nejnovější publikaci [2] neuvádí.

Výtah z této práce byl autorem přednesen na I. vědecko-pedagogické konferenci vysokoškolských učitelů strojních fakult z oboru pružnosti a pevnosti a mechaniky v Košicích v listopadu 1955.

Souhrn

Obsahuje-li pružně poddajná soustava schopná torsních kmitů celou řadu stejných prvků (homogenní soustavu), je výhodné frekvenční rovnici rozštěpit na dvě části tak, aby dynamické účinky homogenní soustavy byly separovány od dynamických účinků vyvolaných okrajovými podmínkami této soustavy. Pro vyjádření frekvenční rovnice je přitom výhodné použít za argument bez-

<sup>1)</sup> Viz závěr.

rozměrnou frekvencí  $\alpha$ , protože všechny potřebné matematické výrazy lze pak vyjádřit vesměs veličinami bezrozměrnými. Frekvenční rovnici byl proto dán tvar

$$F(\alpha) = \Phi(\alpha),$$

kde levá strana závisí pouze na homogenní soustavě a pravá strana pouze na okrajových podmínkách této soustavy. Výhodou tu je, že transcendentní funkce  $F(\alpha)$  obsahuje pouze jedinou konstantu  $n$ , která udává počet kotoučů homogenní soustavy. Proto ji lze jednou pro vždy pro běžné počty kotoučů  $n = 4, 6, 8$  tabelovat nebo znázornit graficky. Jsou-li takové diagramy k dispozici, pak stačí zabývat se pouze funkcí  $\Phi(\alpha)$ . Funkce  $\Phi(\alpha)$  je obecně racionální lomená a závisí prostřednictvím svých koeficientů na konkrétním řešeném případě. Pro tyto koeficienty, které závisí jen na poměrných číslech vytvořených z parametrů soustavy, jsou uvedeny vzorce, takže číselný výpočet se redukuje na dosazení do těchto vzorců, výpočet funkčních hodnot pro několik vhodně volených hodnot  $\alpha$ , nakreslení malých úseků čáry  $\Phi(\alpha)$  do diagramu  $F(\alpha)$  a vyšetření průsečíků obou čar. Úsečky těchto průsečíků udávají kořeny frekvenční rovnice  $\alpha_i$ . Kruhové frekvence vlastních kmitů dané soustavy se pak vypočtou z jednoduchého vztahu

$$\omega_i = \alpha_i \sqrt{\frac{c}{I}},$$

kde  $c$  a  $I$  charakterizují homogenní soustavu. (Význam veličin  $c$  a  $I$  je vysvětlen na str. 247.)

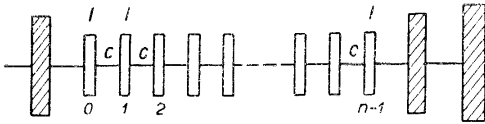
## 1. Úvod

Účelem článku je ukázat jednak *jednoduchou metodu praktického výpočtu vlastních kmitů soustavy schopné torsního kmitání*, jakou tvoří na př. hřídel spalovacího motoru, *jednak výhody praktického použití diferenciálních rovnic k řešení technických úloh*. Ke sledování výkladu není třeba znát teorii diferenciálních rovnic, protože lineární homogenní diferenciální rovnice se stálými členy, které zde jedině budeme potřebovat, se řeší obdobně jako analogické rovnice diferenciální. Protože problematika řešení spočívá ve vhodné formulaci okrajových podmínek, bude uvedena řada příkladů s nejrůznějšími okrajovými podmínkami, počínajíc s nejjednoduššími.

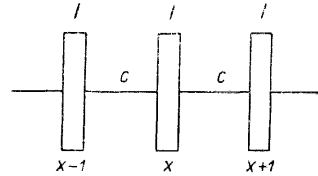
Diferenční rovnice se hodí k řešení pružně poddajných soustav, které obsahují celou řadu stejných členů, jako na př. spojený nosník s mnoha stejnými poli. Zatím co řešení takových soustav obvyklými obecnými metodami je velmi zdoluhavé a pracné, je řešení provedené s pomocí diferenciálních rovnic velmi jednoduché a přehledné. Části soustavy obsahující shodné členy budeme říkat soustavou homogenní. V našem případě jí je hřídel opatřený řadou kotoučů.

## 2. Základní rovnice

Řešení provedeme za obvyklých předpokladů, t. j. náhradní hřídel budeme považovat za nehmotný, avšak torsně tuhý, hmoty kotoučů za dynamicky ekvivalentní hmotám příslušných částí zalomeného hřídele a hmotám kývavým a posuvným. Účinek tření nebudeme uvažovat a budeme předpokládat, že systém je lineární.



Obr. 1.



Obr. 2.

Soustava schopná torsních kmitů (obr. 1) obsahuje  $n$  stejných kotoučů o momentech setrvačnosti  $I$ . Spojovací hřídele mezi kotouči mají touž torsní tuhost  $c$ .<sup>2)</sup> Stejně kotouče jsou očíslovány  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Účinek případných dalších kotoučů vlevo a vpravo od homogenní soustavy (v obr. 1 vyšrafované) na torsní kmity celé soustavy se v matematickém řešení projeví prostřednictvím okrajových podmínek homogenní soustavy.

Z obecné teorie kmitů soustavy o několika stupních volnosti je známo, že kmitá-li uvažovaná soustava některou z přirozených frekvencí (volné nebo vlastní kmity), konají všechny kotouče harmonické torsní kmity se stejnou frekvencí a všechny kmitavé pohyby mají touž fázi. Označíme-li tedy kruhovou frekvenci vlastních kmitů  $\omega$ , pak okamžitá výchylka obecného kotouče očíslovaného  $x$  je dána vztahem

$$\varphi_x = \beta_x \sin(\omega t + \psi). \quad (1)$$

Při úhlové výchylce  $\varphi_x$  působí na  $x$ -tý kotouč (obr. 2) zleva a zprava vratné torsní momenty následkem poddajného spojení se sousedními kotouči  $x - 1$  a  $x + 1$ . Tyto momenty jsou úměrné torsním tuhostem spojovacích hřídelů a relativním natočením sousedních kotoučů. Pohybová rovnice  $x$ -tého kotouče, tedy zní

$$I\ddot{\varphi}_x = -c(\varphi_x - \varphi_{x-1}) - c(\varphi_x - \varphi_{x+1}). \quad (2)$$

Z rovnice (1) plyne

$$\ddot{\varphi}_x = -\omega^2 \varphi_x.$$

Dosadíme-li tento vztah do (2), dostaneme rovnici

$$I\omega^2 \varphi_x = c(\varphi_x - \varphi_{x-1}) + c(\varphi_x - \varphi_{x+1}), \quad (3)$$

<sup>2)</sup> Je to krouťící moment potřebný k relativnímu natočení dvou sousedních kotoučů o jednotkový úhel.

kteřá vyjadřuje rovnováhu mezi setrvačným momentem kotouče a vratnými silami částí hřídele mezi sousedními kotouči. Označíme-li

$$\frac{I\omega^2}{c} = \alpha^2, \quad (4)$$

můžeme (3) upravit na tvar

$$\varphi_{x-1} - (2 - \alpha^2)\varphi_x + \varphi_{x+1} = 0. \quad (5)$$

Je to homogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu se stálými činiteli a vyjadřuje závislost mezi úhlovými výchylkami tří sousedních kotoučů. Partikulární řešení této rovnice můžeme předpokládat jako u analogické diferenciální rovnice ve tvaru  $\varphi_x = e^{\lambda x}$ , nebo  $\varphi_x = a^x$ . Dosadíme-li toto řešení do (5), dostaneme

$$a^{x+1}[a^2 - (2 - \alpha^2)a + 1] = 0.$$

Pro libovolné  $\varphi_x$  je třeba, aby obsah závorky se rovnal nule. Této podmínce vyhovují dva kořeny

$$a_{1,2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 - \alpha^2}.$$

Řešení diferenční rovnice závisí na tom, je-li  $\alpha \cong 0$ . Lze dokázat [1], že pro uvažovanou soustavu je vždy  $\alpha < 2$ . Potom kořeny charakteristické rovnice jsou sdružená čísla komplexní

$$a_{1,2} = \beta \pm i\gamma,$$

kde

$$\beta = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 - \alpha^2}, \quad (6)$$

a obecné řešení rovnice (5) v komplexním tvaru je

$$\varphi_x = C_1(\beta + i\gamma)^x + C_2(\beta - i\gamma)^x. \quad (7)$$

Vyjádříme-li kořeny  $a_{1,2}$  ve tvaru exponenciálním

$$\beta \pm i\gamma = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \cdot e^{\pm i\mu},$$

kde

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = 1, \quad (8)$$

jak patrně z (6), můžeme (7) psát ve tvaru

$$\varphi_x = C_1 e^{i\mu x} + C_2 e^{-i\mu x}. \quad (9)$$

Ježto úhlová výchylka  $\varphi_x$  je číslo reálné, musí býti obecné konstanty  $C_1$  a  $C_2$  konjugovaná čísla komplexní. Vyjádříme-li si tedy  $C_1$  ve tvaru

$$C_1 = C e^{iv},$$

musí platit

$$C_2 = C e^{-iv},$$

kde  $C$  a  $v$  jsou čísla reálná. Dosadíme-li tyto výrazy do (9) dostaneme

$$\varphi_x = C[e^{i(\mu x + v)} + e^{-i(\mu x + v)}],$$

nebo

$$\varphi_x = A \cos(\mu x + v). \quad (10)$$

Tento vztah vyjadřuje obecné řešení diferenční rovnice (5) pro  $\alpha < 2$ . Integrační konstanty  $A$  a  $v$  závisí obecně na okrajových podmínkách. Veličina  $\mu$  je určena (až na celistvý násobek  $\pi$ ) vztahem (8). Můžeme ji též snadno určit dosazením řešení (10) do diferenční rovnice (5). Vykrátíme-li společného činitele  $A$ , dostaneme tak

$$\cos[\mu(x-1) + v] - (2 - \alpha^2) \cos(\mu x + v) + \cos[\mu(x+1) + v] = 0$$

a po úpravě

$$\cos(\mu x + v)[2 \cos \mu - (2 - \alpha^2)] = 0.$$

Pro libovolné  $\varphi_x$  musí býti (se zřetelem k (10))

$$\cos \mu = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad (11)$$

nebo, použijeme-li vztahu

$$\cos \mu = 1 - 2 \sin^2 \frac{\mu}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

$$\sin \frac{\mu}{2} = \pm \frac{\alpha}{2}. \quad (11.1)$$

Protože podle (4)

$$\frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{I}{c}}, \quad (4.1)$$

má praktický význam jen kladné znaménko v rovnici (11.1). Obecné řešení (10) jsme ovšem stejným právem mohli psát ve tvaru

$$\varphi_x = B \sin(\mu x + v) \quad (10.1)$$

nebo

$$\varphi_x = C \cos \mu x + D \sin \mu x. \quad (10.2)$$

### 3. Poznámky k řešení

Obecné řešení obsahuje, jak patrné ze vztahu (10), po případě (10.1) nebo (10.2), tři neznámé veličiny, z nichž dvě jsou integrační konstanty, na př.  $A$  a  $v$  ve vztahu (10) a třetí je veličina  $\mu$ , na níž závisí zatím neznámá kruhová frekvence vlastních kmitů soustavy. Tato závislost je dána vztahy (4.1) a (11.1) a zní

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{c}{I}} \sin \frac{\mu}{2}. \quad (4.2)$$

Z obecné theorie kmitů je známo, že při vlastních kmitech soustavy nelze určit absolutní velikosti amplitud jednotlivých prvků, nýbrž jen poměrné jejich hodnoty, to je průběh kmitů podél soustavy v libovolném měřítku. Z tohoto poznatku vyplývá, že konstantu  $A$  v rovnici (10) nemůžeme určit. Napíšeme-li si totiž poměr kterýchkoliv dvou úhlových výchylek, konstanta  $A$  se nám vykrátí.

Zbývající dvě neznámé  $\mu$  a  $\nu$  můžeme najít z okrajových podmínek na levém a pravém kraji homogenní soustavy. V obecném případě dostaneme tak dvě rovnice pro  $\mu$  a  $\nu$ , z nichž po eliminaci  $\nu$  vyplývá frekvenční rovnice pro  $\mu$ , jejíž kořeny dosazený do (4.2) udávají kruhové frekvence vlastních kmitů soustavy. Řešení je, jak uvidíme, zvláště jednoduché tehdy, je-li jeden konec homogenní soustavy volný.

Okrajové podmínky se dají vyjádřit buď s pomocí úhlových výchylek  $\varphi$ , nebo kroutících momentů  $M$ . Proto si ještě odvodíme výrazy pro kroutící momenty vlevo a vpravo od obecného kotouče  $x$ . Část hřídele mezi libovolnými dvěma sousedními kotouči, na př.  $x$  a  $x + 1$  je namáhána stálým kroutícím momentem  $c(\varphi_x - \varphi_{x+1})$ , který je roven součtu setrvačných momentů kotoučů po jedné straně hřídele. Podle toho bude hřídel vpravo od kotouče  $x$  (máme-li na mysli jen homogenní soustavu) namáhán momentem

$$\begin{aligned} M_{x,R} &= c(\varphi_x - \varphi_{x+1}) = \sum_{i=0}^x I\omega^2\varphi_i = - \sum_{k=x+1}^{n-1} I\omega^2\varphi_k = \\ &= Ac\{\cos[\mu x + \nu] - \cos[\mu(x+1) + \nu]\} = \\ &= 2Ac \sin\left[\mu\left(x + \frac{1}{2}\right) + \nu\right] \sin\frac{\mu}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Část hřídele vlevo od kotouče  $x$  bude zřejmě namáhána momentem

$$\begin{aligned} M_{x,L} &= c(\varphi_{x-1} - \varphi_x) = M_{x-1,R} = \\ &= 2Ac \sin\left[\mu\left(x - \frac{1}{2}\right) + \nu\right] \sin\frac{\mu}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Protože v diferenčním počtu je první diference (diference prvního řádu) definována vztahem

$$\Delta\varphi_x = \varphi_{x+1} - \varphi_x,$$

je

$$M_{x,R} = -c \Delta\varphi_x,$$

to znamená, že kroutící moment vpravo za  $x$ -tým kotoučem je co do velikosti úměrný první diferenci funkce vyjadřující úhlovou výchylku  $x$ -tého kotouče. Podobně platí

$$M_{x,L} = -c \Delta\varphi_{x-1}.$$

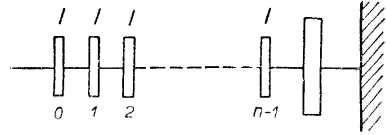
Momenty na okraji homogenní soustavy jsou buď rovny nule, nebo jsou dány setrvačnými momenty připojených kotoučů, nebo závisí na poddajném spojení krajního kotouče s nehybným prostorem.

#### 4. Řešení při různých okrajových podmínkách

##### 4.1. Krajní kotouč homogenní soustavy je volný (obr. 3).

Předpokládejme, že na př. levý krajní kotouč není spojen s žádným dalším kotoučem, a že proto může volně kmitat se soustavou po pravé straně. Okrajová podmínka na pravé straně může být libovolná.

Při matematickém vyjádření okrajové podmínky s pomocí úhlových výchylek kotoučů  $\varphi$  je potíží v tom, že neznáme  $\varphi_0$ . Musíme proto použít vztahu mezi  $\varphi_0$  a  $\varphi_1$ , který vyplývá z rovnováhy setrvačného momentu kotouče 0 a vratného momentu části hřídele mezi kotouči 0 a 1.



Obr. 3.

$$I\omega^2\varphi_0 = c(\varphi_0 - \varphi_1).$$

Použijeme-li označení (4) můžeme tuto rovnici psát ve tvaru

$$(1 - \alpha^2)\varphi_0 - \varphi_1 = 0 \quad (14)$$

a vyjádříme-li  $\alpha$  pomocí  $\mu$  (11), dostaneme konečný tvar okrajové podmínky

$$(2 \cos \mu - 1)\varphi_0 - \varphi_1 = 0. \quad (14.1)$$

Dosadíme-li do ní

$$\varphi_0 = A \cos v,$$

$$\varphi_1 = A \cos(\mu + v),$$

dostaneme

$$A[(2 \cos \mu - 1) \cos v - \cos(\mu + v)] = 0.$$

Má-li vůbec vzniknout kmitání, musí být  $A \neq 0$  a proto musí obsah závorky být roven nule. Po jednoduché úpravě dostaneme tak

$$\cos(\mu - v) - \cos v = 0$$

a konečně

$$2 \sin \frac{\mu}{2} \sin \frac{1}{2}(2v - \mu) = 0.$$

Protože  $\sin \frac{\mu}{2} = \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{I}{c}} \neq 0$  pro  $\omega \neq 0$ , musí být

$$\sin \frac{1}{2}(2v - \mu) = 0,$$

t. j.

$$v = \frac{\mu}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15)$$



Proto

$$\varphi_x = A \cos(\mu x + \nu) = A \cos\left[\mu\left(x + \frac{1}{2}\right) + k\pi\right],$$

nebo jednoduše

$$\varphi_x = \pm A \cos \mu\left(x + \frac{1}{2}\right). \quad (16)$$

Protože nás zajímá jen průběh výchylek v jednom smyslu, má praktický význam jen kladné znaménko. Jednoduchý výsledek  $\nu = \frac{\mu}{2}$ , který platí ve všech případech, kdy jeden konec homogenní soustavy je volný, ať je okrajová podmínka na druhé straně jakákoliv, podstatně zjednodušuje další řešení a umožňuje vypracování jednoduché metody vyšetření frekvencí vlastních kmitů soustavy.

Ukažme si nyní, jak snadno dospějeme k témuž výsledku pomocí krouticích momentů. Je-li levý krajní kotouč homogenní soustavy, označený na obr. 3 nulou, volný, je samozřejmě součet momentů po levé straně roven nule. Dosaďme-li tedy do obecného výrazu (13) pro  $M_{x,L}$  za  $x$  nulu, dostaneme

$$M_{0,L} = 2Ac \sin\left[-\frac{\mu}{2} + \nu\right] \sin \frac{\mu}{2} = 0.$$

Z této rovnice okamžitě plyne podmínka (15) a tím i výraz (16). Jak vidět, je vyjádření okrajové podmínky s pomocí momentů mnohem jednodušší a proto je budeme v dalším výhradně používat. Dosaďme-li do (12) a (13),  $\nu = \frac{\mu}{2}$ , dostaneme

$$M_{x,r} = 2Ac \sin \mu(x + 1) \sin \frac{\mu}{2}, \quad (12.1)$$

$$M_{x,L} = 2Ac \sin \mu x \sin \frac{\mu}{2}. \quad (13.1)$$

Tyto vztahy platí ovšem jen tehdy, je-li jeden konec homogenní soustavy volný.

**4.1.1.** Předpokládejme, že *i* druhý (pravý) krajní kotouč homogenní soustavy je volný. To znamená, že součet momentů po pravé straně posledního kotouče označeného  $n - 1$  je roven nule. Dosaďme-li tedy do (12.1)  $x = n - 1$ , dostaneme

$$M_{n-1,r} = 0 = 2Ac \sin \mu n \sin \frac{\mu}{2}, \quad (17)$$

což je frekvenční rovnice uvažované soustavy. Její kořeny musí vyhovovat podmínce

$$\mu_i = \frac{i\pi}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Hodnota  $i = 0$  nemá praktického významu, protože jí přísluší  $\omega = 0$ . Kruhové frekvence příslušné kořenům frekvenční rovnice (17) jsou podle (4.2), [2], [3]

$$\omega_i = 2 \sqrt{\frac{c}{I}} \sin \frac{i\pi}{2n}, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1). \quad (18)$$

Často se pro jednoduchost považuje homogenní soustava za spojitý hřídel o torsní tuhosti

$$c_n = \frac{c}{n},$$

a momentu setrvačnosti

$$I_n = In.$$

Přesně to platí ovšem jen v limitě pro  $n \rightarrow \infty$  a proto příslušnou frekvenci najdeme [2] jako limitu výrazu (18), t. j.

$$\omega_{ni} = 2 \sqrt{\frac{c_h}{I_h}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{i\pi}{2n}}{\frac{1}{n}} = i\pi \sqrt{\frac{c_h}{I_h}}. \quad (18.1)$$

Podle [2] najdeme snadno chybu, jíž se dopustíme při konečném  $n$  ze vztahu (18). Vložíme-li tam

$$\sin \frac{i\pi}{2n} \approx \frac{i\pi}{2n},$$

dostaneme přímo (18.1). Pripustíme-li na př. chybu 2%, pak musí být

$$\frac{i\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{9},$$

t. j.

$$n \geq 4,5i.$$

**4.1.2. Jeden konec hřídele je vetknut.**

Část hřídele mezi posledním kotoučem homogenní soustavy a místem vetknutí má torsní tuhost  $c_v$  (obr. 4). Momentová výminka za posledním kotoučem je

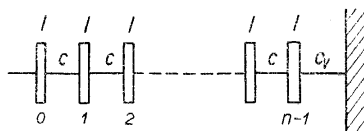
$$M_{n-1,r} = c_v \varphi_{n-1} \quad (19)$$

a po dosazení  $M_{x,r}$  a  $\varphi_x$  ze vztahů (10) a (12.1) pro  $x = n-1$ ,

$$2Ac \sin \mu n \sin \frac{\mu}{2} = c_v A \cos \mu \left( n - \frac{1}{2} \right).$$

Označíme-li poměrnou tuhost vetknutí

$$\frac{c_v}{c} = \gamma_v,$$



Obr. 4.

bude poslední rovnice znít

$$2 \sin \mu n \sin \frac{\mu}{2} = \gamma_v \cos \mu \left( n - \frac{1}{2} \right) \quad (19.1)$$

a po úpravě

$$\cos \mu n \cos \frac{\mu}{2} \left[ 2 - \frac{\gamma_v}{\gamma_v} - \operatorname{tg} \mu n \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \right] = 0. \quad (19.2)$$

Vyloučíme-li případy, pro které  $\cos \mu n \cos \frac{\mu}{2} = 0$ , protože by  $\mu$  nezáviselo na  $\gamma_v$ , je frekvenční rovnice

$$\operatorname{tg} \mu n \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = 2 \frac{\gamma_v}{2 - \gamma_v}. \quad (20)$$

Tato rovnice má základní význam a udává řešení všech případů, kde druhá okrajová podmínka je tvaru

$$M_{n-1,p} = c \gamma_v \varphi_{n-1}. \quad (19.3)$$

Pro obecné hodnoty  $\gamma_v$  nelze kořeny transcendentní rovnice (20) najít v uzavřeném tvaru a musíme se omezit na řešení přibližné a to buď grafické, nebo postupným přibližováním na základě odhadnutých hodnot  $\mu$ . O grafickém znázornění funkce  $F(\lambda) = \operatorname{tg} \mu n \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}$  bude pojednáno v následujícím odstavci.

Je-li ve zvláštním případě  $c_v = c$ , jest

$$\operatorname{tg} \mu n \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = 1,$$

t. j.

$$\frac{\mu_i}{2} (2n + 1) = (2i - 1) \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a příslušné kruhové frekvence jsou [3]

$$\omega_i = 2 \sqrt{\frac{c}{I}} \sin \left( \frac{2i - 1}{2n + 1} \cdot \frac{\pi}{2} \right). \quad (21)$$

Kdyby poslední kotouč byl nehybný, t. j.  $c_v = \infty$ , zněla by frekvenční rovnice  $\operatorname{tg} \mu n \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = -1$  a kruhové frekvence vlastních kmitů by byly

$$\omega_i = 2 \sqrt{\frac{c}{I}} \sin \left( \frac{2i - 1}{2n - 1} \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (22)$$

Kdyby konečně  $c_v = 2c$ , platily by vztahy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \mu n \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} &= \infty, \\ \mu_i &= \frac{2i - 1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ \omega_i &= 2 \sqrt{\frac{c}{I}} \sin \left( \frac{2i - 1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

4.1.3. Jeden krajní kotouč homogenní soustavy je spojen hřídelem o torsní tuhosti  $c_s$  se setrvačnickem o momentu setrvačnosti  $I_s$  (obr. 5). Okrajová podmínka s pravé strany je

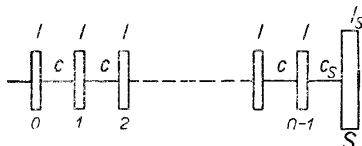
$$M_{n-1,p} + I_s \omega^2 \varphi_s = 0. \quad (24)$$

Je-li  $M_{n-1,p}$  je součet setrvačných momentů všech kotoučů homogenní soustavy, vyjadřuje hození podmínka vlastně momentovou výminku rovnováhy celé torsní soustavy, na kterou nepůsobí žádné vnější momenty. Neznámý úhel  $\varphi_s$  najdeme z podmínky rovnováhy mezi setrvačným momentem setrvačnicku a vratným momentem příslušného spojovacího hřídele

$$I_s \omega^2 \varphi_s = c_s (\varphi_s - \varphi_{n-1}).$$

Označíme-li analogicky ke vztahu (4)

$$\frac{I_s \omega^2}{c_s} = \alpha_s^2, \quad (25)$$



můžeme psát jednoduše

$$\varphi_s = \frac{\varphi_{n-1}}{1 - \alpha_s^2}. \quad (26)$$

Obr. 5.

Označíme-li ještě podobně jako v předchozím případě 4.1.2 poměrnou tuhost poddajného spojení setrvačnicku s homogenní soustavou

$$\frac{c_s}{c} = \gamma_s$$

a dosadíme-li vztahy (25) a (26) do (24), dostaneme

$$M_{n-1,p} = c \gamma_s \frac{\alpha_s^2}{\alpha_s^2 - 1} \varphi_{n-1}. \quad (24.1)$$

Srovnáme-li (27) s (19.3), vidíme, že výraz

$$\gamma_s \frac{\alpha_s^2}{\alpha_s^2 - 1} = \varkappa_s$$

má význam poměrné tuhosti, právě tak jako  $\gamma_p$  v (19.3). Zásadní rozdíl je ovšem v tom, že  $\varkappa_s$  závisí prostřednictvím  $\alpha_s$  (25) na kruhové frekvenci vlastních kmitů  $\omega$  a na dynamických vlastnostech soustavy, t. j. na  $I_s$  a  $c_s$ . Zavedeme proto pro  $\varkappa_s$  označení poměrná dynamická tuhost. Označíme-li ještě poměr

$$\frac{I}{I_s} = \vartheta_s,$$

lze vztahy (25) a (27) psát jednoduše

$$\alpha_s^2 = \frac{I \omega^2}{c} \cdot \frac{c}{c_s} \cdot \frac{I_s}{I} = \frac{\alpha^2}{\gamma_s \vartheta_s}, \quad (25.1)$$

$$\varkappa_s = \frac{\gamma_s \alpha^2}{\alpha^2 - \gamma_s \vartheta_s}. \quad (27.1)$$

Ze vztahu (27.1) je jasně patrna závislost  $\kappa_s$  na bezrozměrné frekvenci  $\alpha$  a na poměrných číslech  $\gamma_s$  a  $\vartheta_s$ . Rovnici (24.1) můžeme nyní jednoduše psát

$$M_{n-1,p} = c\kappa_s \rho_{n-1}. \quad (24.2)$$

Dostali bychom ji z (19.3), kdybychom zaměnili  $\gamma_v$  za  $\kappa_s$ . Proto můžeme analogicky ke (20) psát ihned frekvenční rovnici

$$\operatorname{tg} \mu n \cdot \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{\kappa_s}{2 - \kappa_s}. \quad (20.1)$$

Transcendentní rovnici (20.1) lze snadno řešit graficky, ježto obě strany rovnice jsou funkcemi téže proměnné  $\alpha$ . Označíme-li levou stranu  $F_n(\alpha)$  a pravou  $\Phi_{01}(\alpha)$ , jsou tyto funkce definovány takto:

$$F_n(\alpha) = \operatorname{tg} \mu n \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}, \quad \sin \frac{\mu}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad (28)$$

$$\Phi_{01}(\alpha) = \frac{\kappa_s}{2 - \kappa_s}, \quad \kappa_s = \frac{\gamma_s \alpha^2}{\alpha^2 - \gamma_s \vartheta_s}$$

a po dosazení a úpravě

$$\Phi_{01}(\alpha) = \frac{\gamma_s \alpha^2}{(2 - \gamma_s) \alpha^2 - 2\gamma_s \vartheta_s} = k_s \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 2k_s \vartheta_s}, \quad (29)$$

kde

$$k_s = \frac{\gamma_s}{2 - \gamma_s},$$

a index 01 u  $\Phi(\alpha)$  značí, že jeden kraj homogenní soustavy je volný (0), a ke druhému je připojen jeden kotouč (1).

Ke grafickému znázornění funkcí  $F_n(\alpha)$  a  $\Phi_{01}(\alpha)$  je výhodné znáti jejich charakteristické vlastnosti, které nám nakreslení příslušných křivek usnadní, po případě ušetří vůbec kreslení některých větví. Protože je vždy  $\alpha < 2$ , stačí sledovat průběh funkcí jen v intervalu  $0 \leq \alpha < 2$ .

Zabývejme se nejprve funkcí  $F_n(\alpha)$ , která má širší význam. Jelikož v uvedeném intervalu je  $\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \neq 0$ , bude mít  $F_n(\alpha)$  nulové body [ $F_n(\alpha) = 0$ ] v místech pro něž

$$\operatorname{tg} \mu n = 0,$$

t. j. pro

$$\mu_i = \frac{i\pi}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, (n - 1),$$

(pro  $i = n$  by bylo  $\mu n = \frac{\pi}{2}$  a  $\alpha_n = 2$ , což odporuje našemu požadavku  $\alpha < 2$ ).

Těmto hodnotám  $\mu_i$  odpovídají

$$\alpha_{0i} = 2 \sin \frac{i\pi}{2n}. \quad (30)$$

Ježto dále  $\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}$  v intervalu  $0 \leq \alpha < 2$  je konečný, bude mít čára  $F_n(\alpha)$  asymptoty v místech, kde

$$\operatorname{tg} \mu n = \pm \infty,$$

t. j. pro

$$\mu_i = \frac{2i-1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Těmto hodnotám přísluší

$$\alpha_{asi} = 2 \sin \left( \frac{2i-1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \right). \quad (31)$$

Jak patrně, bude mít čára  $F_n(\alpha)$   $n$  nulových bodů a stejný počet asymptot. Pro odhad kořenů  $\alpha$  často stačí nakreslit čáru  $F_n(\alpha)$  jen od ruky. K tomuto účelu je užitečné znát sklon tečny k čáře  $F_n(\alpha)$  v nulových bodech. Ježto se jedná o funkci složenou, je

$$\frac{dF_n(\alpha)}{d\alpha} = \frac{dF_n(\alpha)}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\alpha}.$$

Po provedení příslušných derivací a s ohledem na to, že v nulových bodech je  $\operatorname{tg} \mu n = 0$ ,  $\cos^2 \mu n = 1$ , najde se snadno

$$\left( \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \right)_0 = \frac{n}{2} \frac{\sin \frac{\mu}{2}}{\cos^2 \frac{\mu}{2}} = \frac{2n\alpha_0}{4 - \alpha_0^2}. \quad (32)$$

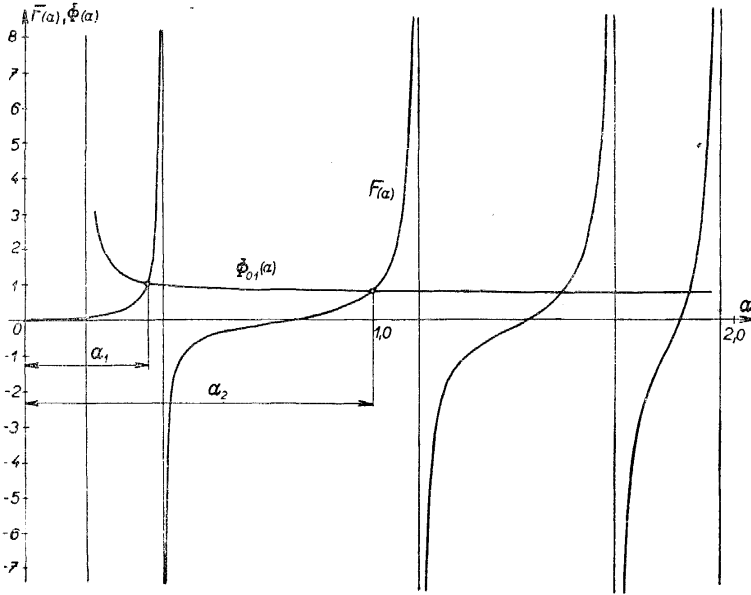
Čára  $F_n(\alpha)$  má podobný charakter jako tangentoida (obr. 6). Rozdíl je v tom, že první větev má v nulovém bodě tečnu vodorovnou a sklon tečny v nulových bodech dalších větví s rostoucím  $\alpha$  stoupá (32), nulový bod nepřulí vzdálenost asymptot příslušné větve, nýbrž je posunut ve směru rostoucího  $\alpha$  a vzdálenosti sousedních asymptot se s rostoucím  $\alpha$  zmenšují. Čáry  $F_n(\alpha)$  lze pro různé počty kotoučů  $n$  homogenní soustavy (t. j. pro obvyklé počty klik zalomených hřídelů spalovacích motorů) nakreslit jednou pro vždy na zásobní listy (rozmnožit), protože funkce  $F_n(\alpha)$  je bezrozměrná a nezávisí tudíž na rozměrech motoru.

Funkce  $\Phi_{01}(\alpha)$  závisí jak patrně z (29) na dynamických vlastnostech torsní soustavy a je proto třeba ji v každém řešeném případě kreslit znovu. Výhodou tu je její jednoduchý průběh. Čára  $\Phi_{01}(\alpha)$  prochází počátkem, kde má vodorovnou tečnu a odtud klesá (má záporné pořadnice) až do místa

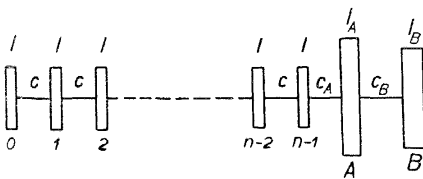
$$\alpha_{as} = \sqrt{2k_s \vartheta_s} = \sqrt{\frac{I}{\frac{I_s}{c} - \frac{1}{2}}}, \quad (33)$$

kde má asymptotu. Pro  $\alpha > \alpha_s$  je  $\Phi_{01}(\alpha) > 0$ . Je-li  $c_s = 2c$  je  $\alpha_{as} = \infty$ , pro  $c_s > c$  není  $\alpha_{as}$  reálné a čára  $\Phi_{01}(\alpha)$  asymptotu nemá. Asymptota padne zaručeně mimo naši pracovní oblast, je-li  $\alpha_{as} \geq 2$ , t. j. pro

$$\frac{I}{I_s} \geq 4 \frac{c}{c_s} - 2, \quad c_s < 2c.$$



Obr. 6.



Obr. 7.

Ze vztahu (33) je vidět, že při stálém poměru  $\frac{c}{c_s}$  závisí poloha asymptoty jen na poměru  $\frac{I}{I_s}$  a naopak.

Kořeny frekvenční rovnice  $\alpha_i$  jsou dány úsečkami průsečíků čar  $F_n(\alpha)$  a  $\Phi_{01}(\alpha)$ . Příslušné kruhové frekvence vlastních kmitů se pak vypočítají ze vztahů

$$\omega_i = \alpha_i \sqrt{\frac{c}{I}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

Grafické vyšetření kořenů  $\alpha_i$  pro homogenní soustavu se čtyřmi kotouči a setrvačníkem je vyznačeno na obr. 6. Protože funkce  $\Phi_{01}(\alpha)$  závisí jen na pomě-

rech  $\frac{c}{c_s}$  a  $\frac{I}{I_s}$ , lze změnou těchto poměrů snadno docílit změnu frekvence vlastních kmitů.

**4.1.4.** *K jedné straně homogenní soustavy jsou připojeny dva obecné kotouče (obr. 7) o momentech setrvačnosti  $I_A$  a  $I_B$  (na př. setrvačnick a rotor generátoru, nebo lodní šroub). Příslušné spojovací hřídele mají tuhosti  $c_A$  a  $c_B$ . Momentová výminka rovnováhy (okrajová podmínka zprava) je*

$$M_{n-1,p} + I_A \omega^2 \varphi_A + I_B \omega^2 \varphi_B = 0. \quad (35)$$

Protože můžeme, jak známo, vypočítat jenom poměrné úhlové výchylky kotoučů, upravme si (35) takto

$$M_{n-1,p} + \left( I_A \omega^2 + I_B \omega^2 \frac{\varphi_B}{\varphi_A} \right) \frac{\varphi_A}{\varphi_{n-1}} \cdot \varphi_{n-1} = 0. \quad (35.1)$$

Označíme-li ještě podobně jako v předchozím odstavci 4.1.3 (25.1)

$$\begin{aligned} I_A \omega^2 &= c_A \alpha_A^2, & I_B \omega^2 &= c_B \alpha_B^2, \\ \alpha_A^2 &= \frac{\alpha^2}{\gamma_A \vartheta_A}, & \alpha_B^2 &= \frac{\alpha^2}{\gamma_B \vartheta_B}, \end{aligned} \quad (36)$$

dostaneme po dosazení a úpravě

$$M_{n-1,p} + c \alpha^2 \left( \frac{1}{\vartheta_A} + \frac{1}{\vartheta_B} \cdot \frac{\varphi_B}{\varphi_A} \right) \frac{\varphi_A}{\varphi_{n-1}} \cdot \varphi_{n-1} = 0 \quad (35.2)$$

nebo jednoduše

$$M_{n-1,p} = c \kappa_{AB} \varphi_{n-1}, \quad (35.3)$$

kde

$$\kappa_{AB} = - \alpha^2 \left( \frac{1}{\vartheta_A} + \frac{1}{\vartheta_B} \frac{\varphi_B}{\varphi_A} \right) \frac{\varphi_A}{\varphi_{n-1}}. \quad (37)$$

Tím jsme opět upravili okrajovou podmínku (35) na tvar (19.3), které odpovídá řešení (20). Nyní zbývá jen upravit výraz (37). Poměry úhlových výchylek můžeme určit z rovnic:

$$\begin{aligned} I_B \omega^2 \varphi_B &= c_B (\varphi_B - \varphi_A), \\ I_A \omega^2 \varphi_A &= c_B (\varphi_A - \varphi_B) + c (\varphi_A - \varphi_{n-1}). \end{aligned}$$

Použijeme-li označení (36), plyne z posledních dvou rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_B}{\varphi_A} &= \frac{1}{1 - \alpha_B^2} = - \frac{\gamma_B \vartheta_B}{\alpha^2 - \gamma_B \vartheta_B}, \\ \frac{\varphi_A}{\varphi_{n-1}} &= \frac{1}{1 - \alpha_A^2 + \frac{\gamma_B}{\gamma_A} \cdot \frac{\alpha_B^2}{\alpha^2 - 1}} = \\ &= \frac{\gamma_A \vartheta_A (\alpha^2 - \gamma_B \vartheta_B)}{\alpha^4 - \alpha^2 [\gamma_A \vartheta_A + \gamma_B (\vartheta_A + \vartheta_B)] + \gamma_A \gamma_B \vartheta_A \vartheta_B} \end{aligned}$$



Dosadíme-li tyto poměry do (37), dostaneme po jednoduché úpravě

$$\kappa_{AB} = \frac{\gamma_A \alpha^2 [\alpha^2 - \gamma_B (\vartheta_A + \vartheta_B)]}{\alpha^4 - \alpha^2 [\gamma_A \vartheta_A + \gamma_B (\vartheta_A + \vartheta_B)] + \gamma_A \gamma_B \vartheta_A \vartheta_B}. \quad (37.1)$$

Protože frekvenční rovnice je typu (20), je

$$\Phi_{02}(x) = \frac{\kappa_{AB}}{2 - \kappa_{AB}}$$

a po dosazení

$$\Phi_{02}(x) = \frac{\gamma_A \alpha^2 [\alpha^2 - \gamma_B (\vartheta_A + \vartheta_B)]}{(2 - \gamma_A) \alpha^4 - [(2 - \gamma_A) \gamma_B (\vartheta_A + \vartheta_B) + 2\gamma_A \vartheta_A] \alpha^2 + 2\gamma_A \gamma_B \vartheta_A \vartheta_B}. \quad (38)$$

Pro numerický výpočet se hodí lépe tvar

$$\Phi_{02}(x) = \frac{\gamma_A x^2 (x^2 - \varepsilon_B)}{b_4 x^4 - b_2 x^2 + b_0}. \quad (38.1)$$

K jednoduchému vyjádření konstant v (38.1) je výhodné, kromě zavedení poměrných čísel

$$\gamma_A = \frac{c_A}{c}, \quad \gamma_B = \frac{c_B}{c}, \quad \vartheta_A = \frac{I}{I_A}, \quad \vartheta_B = \frac{I}{I_B},$$

označiti ještě

$$\delta_A = \gamma_A \vartheta_A, \quad \delta_B = \gamma_B \vartheta_B.$$

Potom

$$\begin{aligned} \varepsilon_B &= \gamma_B (\vartheta_B + \vartheta_A) = \delta_B + \gamma_B \vartheta_A, & b_2 &= (2 - \gamma_A) \varepsilon_B + 2\delta_A, \\ b_4 &= 2 - \gamma_A, & b_0 &= 2\delta_A \delta_B. \end{aligned} \quad (39)$$

Z rovnic (38) a (38.1) lze snadno vyčíst charakteristické vlastnosti  $\Phi_{02}(x)$ . Čára  $\Phi_{02}(x)$  má jeden nulový bod v počátku ( $x_{01} = 0$ ), kde má tečnu vodorovnou a druhý pro  $\alpha_{02} = \varepsilon_B$ . Další průběh čáry  $\Phi_{02}(x)$  závisí podstatně na tom, je-li  $2 - \gamma_A \cong 0$ , t. j.  $2c \cong c_A$ .

1. Je-li  $2c > c_A$ , je  $b_4 > 0$  a křivka  $\Phi_{02}(x)$  má dvě asymptoty, jejichž polohu udávají kořeny rovnice

$$b_4 x^4 - b_2 x^2 + b_0 = 0.$$

Protože všechna poměrná čísla jsou kladná, jsou obě asymptoty při  $b_4 > 0$  reálné. Mezi první a druhou asymptotou se  $\Phi_{02}(x)$  mění z kladných hodnot do záporných a prochází nulou v místě  $\alpha_{02}$ . Za druhou asymptotou je  $\Phi_{02} > 0$ .

2. Je-li  $2c < c_A$ , je  $b_4 < 0$ , čára  $\Phi_{02}(x)$  má jen jednu asymptotu a mezi počátkem a touto asymptotou je  $\Phi_{02}(x) < 0$ . Za asymptotou je  $\Phi_{02}(x) > 0$ , za nulovým bodem je  $\Phi_{02}(x) < 0$ .

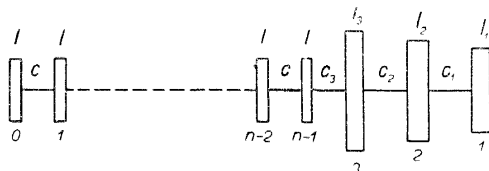
3. Je-li  $2c = c_A$ , je  $2 - \gamma_A = b_4 = 0$  a

$$\Phi_{02}(x) = -\frac{\gamma_A x^2 (x^2 - \varepsilon_B)}{b_2 x^2 - b_0} = -\frac{\alpha^2 (x^2 - \varepsilon_B)}{2\vartheta_A (x^2 - \delta_B)}. \quad (40)$$

Nejčastěji je  $2c > c_i$ . Zajímají-li nás jen některé frekvence (první a druhá) není třeba celý průběh  $\Phi_{02}(\alpha)$  kreslit. Stačí zjistit asymptoty a nulové body, příslušné větve nakreslit jen od oka a spočítat tři nebo čtyři body v okolí očekávaného průsečíku.

**4.1.5.** *Po jedné straně homogenní soustavy je více obecných kotoučů.* Tak tomu bývá u složitějších torsních soustav, jako je na př. hnací mechanismus motorových vozidel. Postup je stejný jako v předchozích případech, jen racionální lomená funkce k vyjádření  $\Phi(\alpha)$  je vyššího stupně. Je potom vhodnější číslovat přídavné kotouče od volného konce.

Na obr. 8 je vyznačena taková soustava s třemi přídavnými kotouči. Je-li  $m$  přídavných kotoučů, je okrajová podmínka podobně jako dříve



Obr. 8.

$$M_{n-1,p} + I_1\omega^2\varphi_1 + I_2\omega^2\varphi_2 + \dots + I_m\omega^2\varphi_m = 0, \quad (41)$$

nebo jednodušeji

$$M_{n-1,p} + \sum_{i=1}^m I_i\omega^2\varphi_i = 0.$$

Souvislost přídavné soustavy se základní soustavou homogenní si vyjádříme podobně jako v odstavci 4.1.4 poměry úhlových výchylek  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  k úhlové výchylce sousedního (krajního) kotouče homogenní soustavy označeného  $n-1$ . Můžeme si také myslet, že tento kotouč patří k přídavné soustavě s označením  $m+1$ . Vytkneme-li tedy ze součtu setrvačných momentů  $\varphi_{m+1}$  dostaneme

$$M_{n-1,p} + \varphi_{m+1} \sum_{i=1}^m I_i\omega^2 \frac{\varphi_i}{\varphi_{m+1}} = 0. \quad (41.1)$$

Se zřetelkem ke známým vztahům

$$I_i\omega^2 = c_i\alpha_i^2 = c\gamma_i\alpha_i^2 = c\gamma_i \frac{\alpha^2}{\gamma_i\vartheta_i} = c \frac{\alpha^2}{\vartheta_i},$$

a protože  $\varphi_{m+1} = \varphi_{n-1}$ , jak shora uvedeno, můžeme (41.1) upravit na tvar

$$M_{n-1,p} = -\varphi_{n-1}c\alpha^2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{\vartheta_i} \frac{\varphi_i}{\varphi_{m+1}}.$$

Jelikož analogicky k (35.3) musí platit

$$M_{n-1,p} = -c\alpha_m\varphi_{n-1},$$

je

$$\alpha_m = -\alpha^2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{\vartheta_i} \cdot \frac{\varphi_i}{\varphi_{m+1}}. \quad (42)$$

Poměry úhlových výchylek najdeme postupnou eliminací z podmínek rovnováhy:

$$\begin{aligned} I_1 \omega^2 \varphi_1 &= c_1(\varphi_1 - \varphi_2), \\ I_2 \omega^2 \varphi_2 &= c_2(\varphi_2 - \varphi_3) + c_1(\varphi_2 - \varphi_1), \\ &\dots \dots \dots \\ I_m \omega^2 \varphi_m &= c_m(\varphi_m - \varphi_{m+1}) + c_{m-1}(\varphi_m - \varphi_{m-1}). \end{aligned} \quad (43)$$

Použijeme-li opět označení  $I_i \omega^2 = \alpha_i^2 c_i$  a dále pro jednoduchost  $\gamma_i \vartheta_i = \delta_i$ , t. j.  $\alpha^2 = \alpha_i^2 \delta_i$ , dostaneme z první z rovnic (43)

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = - \frac{\delta_1}{\alpha^2 - \delta_1}.$$

Označíme-li  $f_2(\alpha) = f_2 = \alpha^2 - \delta_1$ , dostaneme z druhé rovnice

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_3} = - \frac{\delta_2 f_2}{f_2(\alpha^2 - \delta_2 - \vartheta_2 \gamma_1) - \delta_1 \gamma_1 \vartheta_2} = - \frac{\delta_2 f_2}{f_3}.$$

Z třetí

$$\frac{\varphi_3}{\varphi_4} = - \frac{\delta_3 f_3}{f_3(\alpha^2 - \delta_3 - \vartheta_3 \gamma_2) - \delta_2 \gamma_2 \vartheta_3 f_2} = - \frac{\delta_3 f_3}{f_4},$$

atd.

Jak patrně, platí pro poměr úhlových výchylek sousedních kotoučů obecný vztah

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}} = - \delta_i \frac{f_i}{f_{i+1}}, \quad (44)$$

při čemž funkce  $f_i = f_i(\alpha)$  jsou dány rekurentními vzorci

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, \\ f_2 &= \alpha^2 - \delta_1, \\ f_3 &= f_2(\alpha^2 - \delta_2 - \vartheta_2 \gamma_1) - \delta_1 \gamma_1 \vartheta_2 f_1, \\ f_4 &= f_3(\alpha^2 - \delta_3 - \vartheta_3 \gamma_2) - \delta_2 \gamma_2 \vartheta_3 f_2, \\ &\dots \dots \dots \\ f_i &= f_{i-1}(\alpha^2 - \delta_{i-1} - \vartheta_{i-1} \gamma_{i-2}) - \delta_{i-2} \gamma_{i-2} \vartheta_{i-1} f_{i-2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Použití těchto obecných vztahů si ukážeme pro homogenní soustavu se třemi přídavnými kotouči, t. j. pro  $m = 3$ . Z rovnic (44) plyne

$$\frac{\varphi_3}{\varphi_4} = - \delta_3 \frac{f_3}{f_4}; \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_4} = \delta_2 \delta_3 \frac{f_2}{f_4}; \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_4} = - \delta_1 \delta_2 \delta_3 \frac{f_1}{f_4}$$

a po dosazení do (42) s použitím závislosti  $\delta_i = \gamma_i \vartheta_i$

$$\kappa_3 = \frac{\gamma_3 \alpha^2}{f_4} (\delta_2 \gamma_1 \vartheta_3 f_1 - \gamma_2 \delta_3 f_2 + f_3). \quad (46)$$

Vyjádříme-li  $f_i$  s pomocí  $\alpha$  (45), dostaneme konečně

$$\Phi_{03}(\alpha) = \frac{\kappa_3}{2 - \kappa_3} = \frac{\gamma_3 \alpha^2 (\alpha^4 - a_2 \alpha^2 + a_0)}{b_6 \alpha^6 - b_4 \alpha^4 + b_2 \alpha^2 - b_0}. \quad (47)$$

Označíme-li opět

$$\varepsilon_1 = \delta_1 + \gamma_1 \vartheta_2,$$

$$\varepsilon_2 = \delta_2 + \gamma_2 \vartheta_3,$$

bude

$$\begin{aligned} a_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ a_0 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \gamma_1 \delta_2 \vartheta_3, \\ b_6 &= 2 - \gamma_3, \\ b_4 &= (2 - \gamma_3) a_2 + 2 \delta_3, \\ b_2 &= (2 - \gamma_3) a_0 + 2 \delta_3 (\delta_2 + \varepsilon_1), \\ b_0 &= 2 \delta_1 \delta_2 \delta_3. \end{aligned} \tag{48}$$

Kdybychom do vztahů (48) dosadili  $c_1 = 0$ , t. j.  $\gamma_1 = \delta_1 = \varepsilon_1 = 0$ , dostali bychom, jak se lze snadno přesvědčit, vztahy pro homogenní soustavu se dvěma přídavnými kotouči.

Jak vidět, nečiní řešení soustavy s několika přídavnými kotouči žádných potíží, jen nalezení obecných vztahů pro koeficienty racionální lomené funkce vyjadřující  $\Phi(x)$  je při větším počtu těchto kotoučů pracnější, ale za to je lze stanovit jednou provždy. Rozbor průběhu  $\Phi_{03}(x)$  se provede podobně jako v předchozích případech, nejlépe na konkrétním případě s číselnými hodnotami konstant. Výpočet číselných hodnot mnohočlenů pro proměnnou  $x$  se provede velmi snadno Hornerovým schematem.

**4.2. Levý kraj homogenní soustavy není volný.** Neplatí potom jednoduchý vztah (15) mezi  $\mu$  a  $\nu$ , t. j.  $\nu = \frac{\mu}{2} + k\pi$ , ani jednoduchý výraz (16) pro  $\varphi_x$ .

**4.2.1.** Předpokládejme, že  $k$  levému kraji je připojen kotouč  $T$  (na př. torsní tlumič) podle obr. 9.

Okrajová podmínka zní

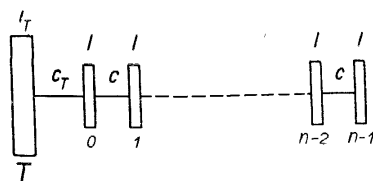
$$I_T \omega^2 \varphi_T = M_{0,L} \tag{49}$$

a po obvyklé úpravě [(25), (26)]

$$-c \alpha_T \varphi_0 = M_{0,L}, \tag{50}$$

kde

$$\alpha_T = \gamma_T \frac{\alpha_T^2}{\alpha_T^2 - 1}.$$



Obr. 9.

Vyjádríme-li nyní  $\varphi_0$  a  $M_{0,L}$  v závislosti na  $\mu$  a  $\nu$  vztahy

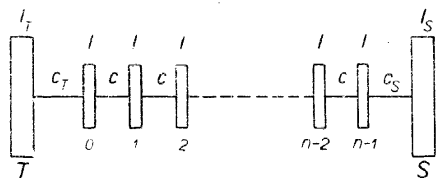
$$\varphi_0 = A \cos \nu,$$

$$M_{0,L} = 2Ac \sin \left( \nu - \frac{\mu}{2} \right) \sin \frac{\mu}{2},$$

a dosadíme-li tyto výrazy do (50), dostaneme po úpravě

$$\cos(\mu - \nu) - (1 - \alpha_r) \cos \nu = 0. \quad (51)$$

To je základní vztah mezi  $\mu$  a  $\nu$  pro všechny případy, kdy k levé straně homogenní soustavy je připojen jeden kotouč ( $T$ ) a odpovídá okrajové podmínce (49).



Obr. 10.

4.2.2. K levé straně homogenní soustavy je připojen kotouč  $T$  (tlumič) a k pravé kotouč  $S$  (setrvačník) podle obr. 10.

Okrajová podmínka zprava je

$$M_{n-1,p} + I_s \omega^2 \varphi_s = 0.$$

Dosadíme-li do ní podle (12)

$$M_{n-1,p} = 2Ac \sin \left[ \mu \left( n - \frac{1}{2} \right) + \nu \right] \sin \frac{\mu}{2},$$

jakož i

$$I_s \omega^2 \varphi_s = -c \alpha_s \varphi_{n-1}$$

a dělíme-li obě strany součinem  $Ac$ , dostaneme

$$2 \sin \left[ \mu \left( n - \frac{1}{2} \right) + \nu \right] \sin \frac{\mu}{2} = \alpha_s \cos [\mu(n-1) + \nu] \quad (52)$$

a po úpravě

$$\cos(\mu n + \nu) - (1 - \alpha_s) \cos [\mu(n-1) + \nu] = 0. \quad (52.1)$$

Abychom mohli pohodlně vyloučit  $\nu$  z rovnic (51) a (52.1) separujeme členy  $s \cos \nu$  a  $\sin \nu$  a zavedme pro jednoduchost označení

$$\lambda_r = 1 - \alpha_r \quad \text{a} \quad \lambda_s = 1 - \alpha_s.$$

Dostaneme tak

$$(\cos \mu - \lambda_r) \cos \nu + \sin \mu \sin \nu = 0,$$

$$[\cos \mu n - \lambda_s \cos \mu(n-1)] \cos \nu - [\sin \mu n - \lambda_s \sin \mu(n-1)] \sin \nu = 0.$$

Tyto dvě lineární homogenní rovnice pro neznámé  $\cos \nu$  a  $\sin \nu$  mohou mít řešení od nuly různé jen tehdy, když determinant soustavy je roven nule. Tato podmínka vyjadřuje hledanou frekvenční rovnici a zní [3]

$$\sin \mu(n+1) - (\lambda_s + \lambda_r) \sin \mu n + \lambda_s \lambda_r \sin \mu(n-1) = 0, \quad (53)$$

kde

$$\begin{aligned} \sin \frac{\mu}{2} &= \frac{\alpha}{2}, \\ \lambda_r &= \frac{(1 - \gamma_r) \alpha^2 - \delta_r}{\alpha^2 - \delta_r}, \\ \lambda_s &= \frac{(1 - \gamma_s) \alpha^2 - \delta_s}{\alpha^2 - \delta_s}, \end{aligned}$$

při čemž veličiny  $\gamma$  a  $\delta$  mají obvyklý význam.

Jak patrné je levá strana frekvenční rovnice (53) funkcí  $\alpha$ . Pro libovolnou hodnotu  $\alpha$  můžeme tedy psát

$$\psi_{11}(\alpha) = \sin \mu(n+1) - (\lambda_s + \lambda_r) \sin \mu n + \lambda_s \lambda_r \sin \mu(n-1). \quad (53.1)$$

Je-li  $\alpha_i$  jedním z kořenů rovnice (53), je

$$\psi_{11}(\alpha_i) = 0.$$

Sestrojíme-li tedy čáru  $\eta = \psi(\alpha)$ , pak vzdálenosti nulových bodů této čáry (průsečíků s osou  $\alpha$ ) od počátku udávají kořeny frekvenční rovnice  $\psi_{11}(\alpha) = 0$ . Aby výpočet nebyl příliš pracný, je třeba znát přibližnou hodnotu příslušného kořenu  $\alpha_i$  a tu můžeme vzít o něco menší, než vyjde pro danou soustavu bez kotouče  $T$ .

**4.2.3.** *K pravé straně homogenní soustavy jsou připojeny dva těžké kolouče, na př. setrvačnick a rotor generátoru (obr 11).*

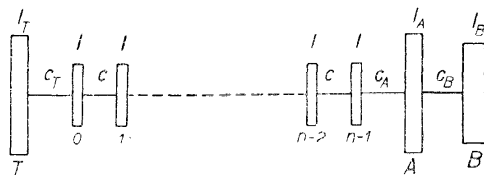
Okrajová podmínka zprava je stejná, jako v případě 4.1.4, proto platí i zde (35.3) a (37). Rozdíl je jen ve vyjádření  $M_{n-1, \nu}$  a  $\varphi_{n-1}$ , které je třeba dosadit do (35.3) a které tu závisí na obecné hodnotě  $\nu$ . Po provedeném dosazení dostaneme rovnici, která se liší od (52) jen indexem u  $\alpha$ . Platí tedy i frekvenční rovnice (53) zaměníme-li v ní  $\lambda_s$  za  $\lambda_{AB} = 1 - \alpha_{AB}$ . Frekvenční rovnice tedy zní  $\psi_{12}(\alpha) = 0$ , kde

$$\psi_{12}(\alpha) = \sin \mu(n+1) - (\lambda_{AB} + \lambda_r) \sin \mu n + \lambda_{AB} \lambda_r \sin \mu(n-1). \quad (53.3)$$

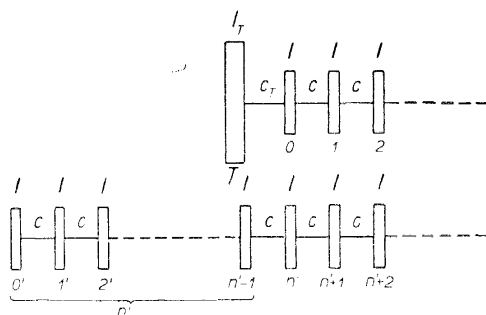
Výraz pro  $\lambda_{AB}$  dostaneme s pomocí (37.1):

$$\lambda_{AB} = \frac{(1 - \gamma_A) \alpha^4 - [(1 - \gamma_A) \varepsilon_B + \delta_A] \alpha^2 + \delta_A \delta_B}{\alpha^4 - (\varepsilon_B + \delta_A) \alpha^2 + \delta_A \delta_B}.$$

**4.3.** Jak patrné z odstavce 4.2, není řešení frekvenční rovnice typu (53) již tak pohodlné, jako řešení rovnice (20.1), protože jenom jeden její člen nezávisí na připojených kotoučích. Pokusme se proto upravit rovnici (53) na tvar (20.1), na př. tím, že danou soustavu převedeme na soustavu s jedním koncem volným.



Obr. 11.



Obr. 12.

Předpokládejme tedy, že obecný kotouč zleva  $T$  (tlumič) o hodnotách  $I_T, c_T$  (obr. 12) lze nahradit dalšími  $n'$  kotouči, shodnými co do  $I$  a  $c$  s kotouči původní homogenní soustavy (o  $n$  kotoučích). Tím vznikne nová, náhradní homogenní soustava o  $n + n'$  kotoučích s levým koncem volným. Přídavná homogenní soustava (o  $n'$  kotoučích) musí mít za vlastních kmitů na původní soustavu týž dynamický účinek jako kotouč  $T$ . Účinek  $T$  se na původní soustavu přenáší kroučícím momentem

$$c_T(\varphi_T - \varphi_0) = I_T \omega^2 \varphi_T.$$

Stejný moment musí za vlastních kmitů vyvinout i přídavná homogenní soustava. Musí tedy platit pro tuto soustavu

$$I_T \omega^2 \varphi_T = M_{n'-1,p}.$$

Pro původní soustavu musí ovšem současně platit

$$I_T \omega^2 \varphi_T = -c_T \varphi_0.$$

Protože kotouč 0 původní soustavy musí mít stejnou úhlovou výchylku jako kotouč  $n'$  soustavy náhradní, t. j.  $\varphi_0 = \varphi_{n'}$ , lze poslední rovnici pro náhradní soustavu psát

$$-c_T \varphi_{n'} = M_{n'-1,p}. \quad (54)$$

Po dosazení  $\varphi_{n'}$  podle (10) a  $M_{n'-1,p}$  podle (12), dostaneme

$$-c_T A \cos \mu \left( n' + \frac{1}{2} \right) = 2Ac \sin \mu n' \sin \frac{\mu}{2}$$

a po zkrácení  $Ac$  a rozepsání levé strany

$$-z_T \left[ \cos \mu n' \cos \frac{\mu}{2} - \sin \mu n' \sin \frac{\mu}{2} \right] = 2 \sin \mu n' \sin \frac{\mu}{2}$$

a po úpravě

$$\operatorname{tg} \mu n' \cdot \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = -\frac{z_T}{2 - z_T}. \quad (55)$$

Veličina  $n'$  tu patrně zastupuje integrační konstantu  $v$ . Abychom ji vyloučili, potřebujeme vyjádřit okrajovou podmínku s druhé strany, v našem případě z pravé. Předpokládejme pro jednoduchost, že pravý konec homogenní soustavy je volný. Potom musí platit

$$M_{n' \cdot n \cdot 1,p} = 0$$

a po dosazení z (12)

$$2Ac \sin \mu(n' + n) \sin \frac{\mu}{2} = 0.$$

Protože  $2Ac \sin \frac{\mu}{2} \neq 0$ , vyhovuje této rovnici

$$\mu(n' + n) = i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

t. j.

$$\mu n' = -\mu n + i\pi$$

a

$$\operatorname{tg} \mu n' = -\operatorname{tg} \mu n.$$

Po dosazení do (55) dostaneme (20.1), čímž jsme si zatím alespoň na jednom příkladu ověřili správnost našeho postupu.

**4.3.1.** Předpokládejme nyní, že na pravé straně je setrvačnick  $S$  ( $I_s, c_s$ ). Příslušná okrajová podmínka je jako (24), t. j.

$$M_{n'+n-1,p} + I_s \omega^2 \varphi_s = 0,$$

čili se zřetelem na (20.1)

$$\operatorname{tg} \mu(n' + n) \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{\varkappa_s}{2 - \varkappa_s}. \quad (56)$$

Rozvedeme-li levou stranu rovnice (56) a dosadíme-li (55) dostaneme po úpravě

$$\operatorname{tg} \mu n \cdot \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{\varkappa_s + \varkappa_T - \varkappa_s \varkappa_T}{2 - (\varkappa_s + \varkappa_T) - \frac{\varkappa_s \varkappa_T}{\alpha^2}},$$

tedy

$$\Phi_{11}(x) = \frac{\alpha^2(\varkappa_s + \varkappa_T - \varkappa_s \varkappa_T)}{2(\alpha^2 - \varkappa_s \varkappa_T) - \alpha^2(\varkappa_s + \varkappa_T - \varkappa_s \varkappa_T)}. \quad (57)$$

Dosadíme-li sem

$$\varkappa_s = \gamma_s \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \delta_s} \quad \text{a} \quad \varkappa_T = \gamma_T \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \delta_T},$$

dostaneme

$$\Phi_{11}(x) = \frac{\alpha^2(a_2 \alpha^2 - a_0)}{b_4 \alpha^4 - b_2 \alpha^2 + b_0}. \quad (58)$$

Označíme-li

$$\gamma_s + \gamma_T - \gamma_s \gamma_T = \gamma_{ST},$$

lze konstanty  $a$  a  $b$  jednoduše vyjádřit takto

$$\begin{aligned} a_2 &= \gamma_{ST}, \\ a_0 &= \gamma_s \delta_T + \gamma_T \delta_s, \\ b_4 &= 2 - \gamma_{ST}, \\ b_2 &= (2 - \gamma_T) \delta_s + (2 - \gamma_s) \delta_T + 2\gamma_s \gamma_T, \\ b_0 &= 2\delta_s \delta_T. \end{aligned} \quad (59)$$

**4.3.2.** Jsou-li k pravé straně homogenní soustavy připojeny dva obecné kotouče  $A$  a  $B$  (a k levé jeden  $T$ , obr. 11), pak okrajová podmínka zprava je

$$M_{n'+n-1,p} + I_A \omega^2 \varphi_A + I_B \omega^2 \varphi_B = 0$$

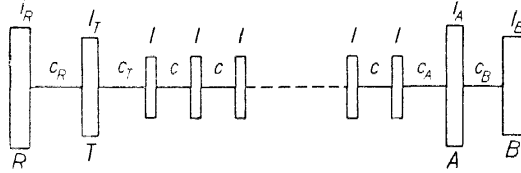


a řešení je analogicky jako v odstavci 4.1.4 typu (20), t. j.

$$\operatorname{tg} \mu(n' + n) \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{\varkappa_{AB}}{2 - \varkappa_{AB}}, \quad (60)$$

kde  $\varkappa_{AB}$  je dáno rovnicí (37.1), která s naším zjednodušeným označením má tvar

$$\varkappa_{AB} = \frac{\gamma_A \alpha^2 (\alpha^2 - \varepsilon_B)}{\alpha^4 - (\delta_A + \varepsilon_B) \alpha^2 + \delta_A \delta_B}. \quad (61)$$



Obr. 13.

Srovnáme-li (60) s (57), vidíme, že

$$\Phi_{12}(x) = \frac{\alpha^2(\varkappa_{AB} + \varkappa_T - \varkappa_{AB}\varkappa_T)}{2(\alpha^2 - \varkappa_{AB}\varkappa_T) - \alpha^2(\varkappa_{AB} + \varkappa_T - \varkappa_{AB}\varkappa_T)}. \quad (62)$$

Dosadíme-li sem výrazy pro  $\varkappa$  jako funkce  $\alpha$ , dostaneme podobně jako dříve

$$\Phi_{12}(x) = \frac{\alpha^2(a_4x^4 - a_2x^2 + a_0)}{b_6x^6 - b_4x^4 + b_2x^2 - b_0}, \quad (63)$$

kde

$$\begin{aligned} a_4 &= \gamma_{AT} = \gamma_A + \gamma_T - \gamma_A\gamma_T, \\ a_2 &= \gamma_{AT}\varepsilon_B + \gamma_A\delta_T + \gamma_T\delta_A, \\ a_0 &= \gamma_A\delta_T\varepsilon_B + \gamma_T\delta_A\delta_B = \delta_A\delta_B\delta_T \frac{\sum I}{I}, \end{aligned}$$

$$(\sum I = I_A + I_B + I_C),$$

a dále

$$\begin{aligned} b_6 &= 2 - \gamma_{AT}, \\ b_4 &= (2 - \gamma_{AT})\varepsilon_B + (2 - \gamma_T)\delta_A + (2 - \gamma_A)\delta_T + 2\gamma_A\gamma_T, \\ b_2 &= (2 - \gamma_T)\delta_A\delta_B + (2 - \gamma_A)\delta_T\varepsilon_B + 2(\delta_A\delta_T + \gamma_A\gamma_T\varepsilon_B), \\ b_0 &= 2\delta_A\delta_B\delta_T, \\ \varepsilon_B &= \delta_B + \gamma_B\delta_A. \end{aligned} \quad (64)$$

**4.3.3.** K oběma krajům homogenní soustavy jsou připojeny dva kotouče. K jedné A, B, ke druhé T, R (obr. 13).

Pro  $\Phi(x)$  platí tu zřejmě rovnice analogická rovnici (62) jen s tím rozdílem, že veličinu  $\varkappa_T$  musíme nahradit veličinou  $\varkappa_{TB}$ , t. j. poměrnou dynamickou tu-

hostí soustavy kotoučů  $T$  a  $R$ . Nahradíme-li i v (61) indexy  $A, B$  indexy  $T, R$ , dostaneme

$$\varkappa_{TR} = \frac{\gamma_T \alpha^2 (\alpha^2 - \varepsilon_R)}{\alpha^4 - (\delta_T + \varepsilon_R) \alpha^2 + \delta_T \delta_R}. \quad (65)$$

Dosadíme-li tedy výrazy (61) a (65) do (62) se zmíněnou záměnou  $\varkappa_T$  za  $\varkappa_{TR}$ , dostaneme

$$\Phi_{22}(x) = \frac{\alpha^2 (a_6 \alpha^6 - a_4 \alpha^4 + a_2 \alpha^2 - a_0)}{b_8 \alpha^8 - b_6 \alpha^6 + b_4 \alpha^4 - b_2 \alpha^2 + b_0}, \quad (66)$$

kde příslušné konstanty jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} a_6 &= \gamma_{AT} = \gamma_A + \gamma_T - \gamma_A \gamma_T, \\ a_4 &= \gamma_{AT}(\varepsilon_B + \varepsilon_R) + \gamma_A \delta_T + \gamma_T \delta_A, \\ a_2 &= \gamma_{AT} \varepsilon_B \varepsilon_R + \gamma_A \delta_T (\delta_R + \varepsilon_R) + \gamma_T \delta_A (\delta_B + \varepsilon_R), \\ a_0 &= \gamma_A \delta_T \delta_R \varepsilon_B + \gamma_T \delta_A \delta_B \varepsilon_R = \delta_T \delta_A \delta_B \delta_R \frac{\Sigma I}{I}, \\ b_8 &= 2 - \gamma_{AT}, \\ b_6 &= (2 - \gamma_{AT})(\varepsilon_B + \varepsilon_R) + (2 - \gamma_A) \delta_T + (2 - \gamma_T) \delta_A + 2\gamma_A \gamma_T, \\ b_4 &= (2 - \gamma_{AT}) \varepsilon_B \varepsilon_R + (2 - \gamma_A) \delta_T (\delta_R + \varepsilon_R) + (2 - \gamma_T) \delta_A (\delta_B + \varepsilon_R) + \\ &\quad + 2[\delta_A \delta_T + \gamma_A \gamma_T (\varepsilon_B + \varepsilon_R)], \\ b_2 &= (2 - \gamma_A) \delta_T \delta_R \varepsilon_B + (2 - \gamma_T) \delta_A \delta_B \varepsilon_R + 2[\delta_A \delta_T (\delta_B + \delta_R) + \gamma_A \gamma_T \varepsilon_B \varepsilon_R], \\ b_0 &= 2\delta_A \delta_B \delta_T \delta_R, \\ \varepsilon_B &= \delta_B + \gamma_B \vartheta_A, \\ \varepsilon_R &= \delta_R + \gamma_R \vartheta_T. \end{aligned} \quad (67)$$

Frekvenční rovnici (53) lze samozřejmě upravit na tvar (20.1), po případě (57) i cestou ryze matematickou. Rozepíšeme-li trigonometrické funkce součtu v rovnici (53), dostaneme po jednoduché úpravě postupně

$$\begin{aligned} (1 + \lambda_s \lambda_T) \sin \mu n \cos \mu + (1 - \lambda_s \lambda_T) \cos \mu n \sin \mu - (\lambda_s + \lambda_T) \sin \mu n &= 0, \\ \cos \mu n \{ \operatorname{tg} \mu n [\lambda_s + \lambda_T - (1 + \lambda_s \lambda_T) \cos \mu] - (1 - \lambda_s \lambda_T) \sin \mu \} &= 0. \end{aligned}$$

Protože hledaná frekvence vlastních kmitů, závisí nutně na připojených kotoučích, musí být obsah složené závorky roven nule, t. j. musí platit

$$\operatorname{tg} \mu n [\lambda_s + \lambda_T - (1 + \lambda_s \lambda_T) \cos \mu] = 1 - \lambda_s \lambda_T \sin \mu.$$

Dosadíme-li sem podle (11)

$$\cos \mu = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

a

$$\sin \mu = \frac{2 \sin^2 \frac{\mu}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}} = \frac{\alpha^2}{2 \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}}.$$

dostaneme po úpravě

$$\operatorname{tg} \mu n \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{\alpha^2(1 - \lambda_s \lambda_T)}{2(\lambda_s + \lambda_T) - (1 + \lambda_s \lambda_T)(2 - \alpha^2)}.$$

Zavedeme-li do této rovnice  $\kappa_s$  a  $\kappa_T$  vztahy (52.2), dostaneme konečně

$$\operatorname{tg} \mu n \cdot \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{\alpha^2(\kappa_s + \kappa_T - \kappa_s \kappa_T)}{2(\alpha^2 - \kappa_s \kappa_T) - \alpha^2(\kappa_s + \kappa_T - \kappa_s \kappa_T)},$$

což souhlasí se vztahem (57).

### 5. Přehled výsledků

Z dosažených výsledků vyplývá, že pro homogenní soustavu, k níž jsou vlevo i vpravo připojeny další obecné kotouče, lze frekvenční rovnici dát tvar

$$F(\alpha) = \Phi(\alpha),$$

kde  $F(\alpha)$  závisí jen na homogenní soustavě a  $\Phi(\alpha)$  jen na připojených kotoučích. Je-li funkce  $F(\alpha)$  definována vztahy

$$F(\alpha) = \operatorname{tg} \mu n \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}, \quad \sin \frac{\mu}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

kde  $n$  je počet kotoučů homogenní soustavy, pak obecný výraz pro funkci  $\Phi(\alpha)$  má tvar

$$\Phi(\alpha) = \frac{\alpha^2(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1 \kappa_2)}{2(\alpha^2 - \kappa_1 \kappa_2) - \alpha^2(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1 \kappa_2)}. \quad (68)$$

Veličiny  $\kappa_1$  a  $\kappa_2$  jsou funkcemi  $\alpha$  a vyjadřují poměrné dynamické tuhosti poddajných spojení obou konců homogenní soustavy s připojenými soustavami obecných kotoučů. Je-li jeden konec homogenní soustavy volný, pak jedna z poměrných dynamických tuhostí je rovna nule. Je-li tedy na př.  $\kappa_1 = 0$  a  $\kappa_2 = \kappa$ , zjednoduší se (68) na

$$\Phi(\alpha) = \frac{\kappa}{2 - \kappa}.$$

Jsou-li oba konce volné, je  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  a

$$\Phi(\alpha) = 0.$$

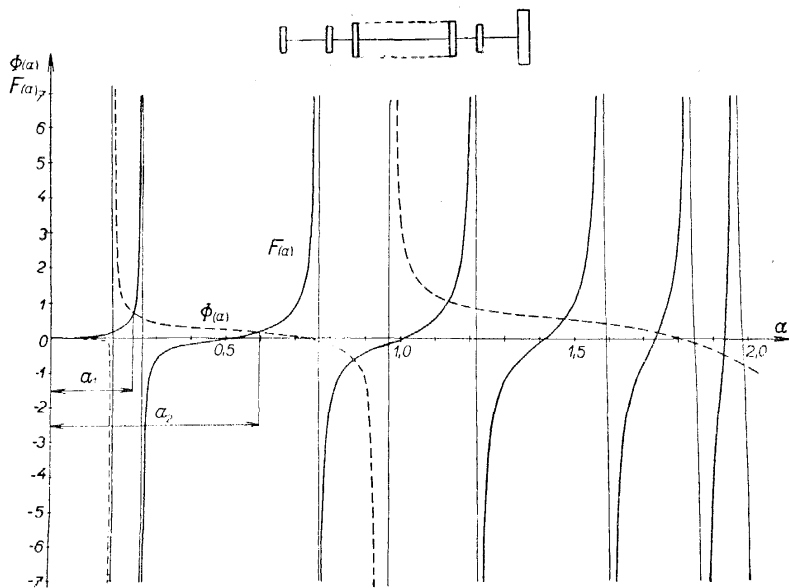
V obecném případě po dosazení  $\kappa_1(\alpha)$  a  $\kappa_2(\alpha)$  je funkce  $\Phi(\alpha)$  racionální lomená, tvaru

$$\Phi(\alpha) = \frac{\alpha^2 g_1(\alpha)}{g_2(\alpha)}, \quad (69)$$

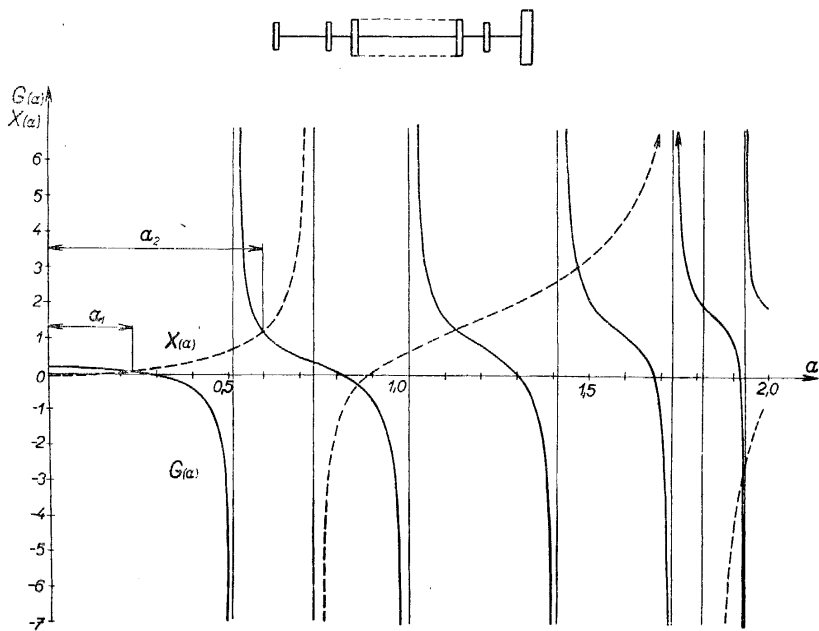
kde  $g_1(\alpha)$  a  $g_2(\alpha)$  jsou mnohočleny, jejichž konstanty závisí na poměrných hodnotách parametrů soustavy. Na př. pro homogenní soustavu s připojeným jedním kotoučem po jedné straně a s dvěma kotouči po druhé straně (případ 1, 2) je

$$\Phi_{12}(\alpha) = \frac{\alpha^2(a_4 \alpha^4 - a_2 \alpha^2 + a_0)}{b_6 \alpha^6 - b_4 \alpha^4 + b_2 \alpha^2 - b_0}, \quad (63)$$

kde koeficienty  $a_i$  a  $b_i$  jsou dány vztahy (64).



Obr. 14.



Obr. 15.

Frekvenční rovnici  $F(\lambda) = \Phi(x)$  lze samozřejmě psát i ve tvaru (podle 68)

$$\frac{1}{F(\lambda)} = \frac{1}{\Phi(x)} = \frac{2(\lambda^2 - \kappa_1\kappa_2)}{\lambda^2(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1\kappa_2)} - 1,$$

nebo

$$\frac{\lambda^2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{F(\lambda)} \right] = \frac{\lambda^2 - \kappa_1\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_1\kappa_2}. \quad (70)$$

Označíme-li levou stranu (70)  $G(\lambda)$  a pravou  $\chi(x)$ , je

$$G(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} \left( 1 + \operatorname{ctg} \mu n \cdot \operatorname{ctg} \frac{\mu}{2} \right), \quad \sin \frac{\mu}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad (71)$$

a funkce  $\chi(x)$  s použitím (69)

$$\chi(x) = \frac{\alpha^2 g_1(x) + g_2(x)}{2g_1(x)}. \quad (72)$$

Na př. pro případ 1, 2 (63) je potom

$$\chi_{12}(\lambda) = \frac{h_6 \lambda^6 - h_4 \lambda^4 + h_2 \lambda^2 - h_0}{a_4 \lambda^4 - a_2 \lambda^2 + a_0},$$

při čemž podle (63) a (72) je

$$h_i = \frac{1}{2}(b_i + a_{i-2}), \quad h_0 = \frac{1}{2}b_0,$$

a s použitím vztahů (64)

$$\begin{aligned} h_6 &= 1, \\ h_4 &= \delta_A + \delta_T + \gamma_A \gamma_T + \varepsilon_B, \\ h_2 &= \delta_A(\delta_B + \delta_T) + \varepsilon_B(\delta_T + \gamma_A \gamma_T), \\ h_0 &= \delta_A \delta_B \delta_T. \end{aligned}$$

Podobné vztahy se lehce najdou i pro ostatní případy. Příklad grafického řešení frekvenčních rovnic  $F(\lambda) = \Phi(x)$  a  $G(\lambda) = \chi(x)$  pro týž případ je vyznačen na obr. 14 a obr. 15. Z těchto diagramů je patrné, že počet průsečíků čar  $F(\lambda)$  a  $\Phi(x)$  případně čar  $G(\lambda)$  a  $\chi(x)$ , jejichž úsečky udávají kořeny frekvenční rovnice, je menší, než počet všech kořenů frekvenční rovnice, jichž je o jednu méně než počet všech kotoučů. Z toho plyne, že předpoklad  $\alpha < 2$  platí jen pro část kořenů. Pro ostatní, vyšší kořeny (které mají jen theoretický význam), bychom musili předpokládat  $\alpha > 2$ .

## Závěr

K dosaženým výsledkům by se mohlo dojít i jinými cestami, na př. přímým řešením soustavy lineárních rovnic typu (5). Vyhodou použití diferenčního

počtu je však jednoduchost, přehlednost a elegance řešení, jakož i jednoduchý výsledný tvar frekvenční rovnice. Při odvození provedeném za obvyklých předpokladů, uvedených v úvodu, nebylo třeba sáhnout k žádným dalším omezením a proto lze celou řadu nižších kořenů frekvenční rovnice nalézt pouhým nakreslením čáry  $\Phi(\alpha)$  do připravených diagramů  $F(\alpha)$ , případně čáry  $\chi(\alpha)$  do diagramů  $G(\alpha)$ . Z téhož důvodu by bylo možné přesnost výpočtu libovolně stupňovat postupným přibližováním. Není toho však třeba, protože pouhé grafické řešení dává, jak bylo zjištěno mnoha provedenými kontrolními výpočty, výsledky přesnější než jiné obvyklé metody. Odpadá tu vyhledávání přibližné hodnoty hledané frekvence, jež je nutné u zkusmých method, jakož i opakování řešení za účelem docílení přesnějších výsledků. Protože pro praktickou potřebu je obvykle třeba znát jen první dvě kritické úhlové rychlosti, není třeba kreslit celý průběh čar  $\Phi(\alpha)$ , případně  $\chi(\alpha)$ , nýbrž jen jejich dva krátké úseky v okolí vyšetřovaných kořenů frekvenční rovnice. Ve kterých mezích tyto kořeny, t. j. hledané průsečíky čar  $\Phi(\alpha)$  a  $F(\alpha)$  leží, lze snadno posoudit z průběhu větví čar  $F(\alpha)$ , jakož i z nulových bodů a asymptot čar  $\Phi(\alpha)$ , případně čar  $\chi(\alpha)$  a  $G(\alpha)$ . Tyto čáry lze potom nakreslit od oka a v okolí každého průsečíku stačí vypočítat 3 až 4 hodnoty funkce  $\Phi(\alpha)$ , resp.  $\chi(\alpha)$ . Výpočet číselných hodnot mnohočlenů v racionální lomené funkci vyjadřující  $\Phi(\alpha)$ , nebo  $\chi(\alpha)$  se velmi zjednoduší a urychlí, užije-li se k tomu Hornerova schématu.

Ke konci považuji za svou milou povinnost poděkovati na tomto místě prof. Ing. Dr. J. Kožešníkovi, členu koresp. ČSAV, který rukopis této práce s nevšední ochotou přečetl a doporučil mi některé dodatky ke koncům odstavců 3 a 4.1.1. Při této příležitosti jsem se dozvěděl, že Dr. Kožešník dospěl k podobným výsledkům jinou cestou ve své bohužel neuvěřitelné práci „Kroutové kmitání hřídelů na podkladě operátorového počtu Steinmetz-Heavisideova“, která byla v r. 1933 odměněna cenou MAP.

#### POUŽITÁ LITERATURA

- [1] *F. Budinský*: Praktický výpočet frekvence vlastních torsních kmitů řadových pístových motorů. Interní zpráva ČKD: Ú/TVS 0311, 1946, 60 str.
- [2] *J. Kožešník*: Vybrané statě z pružnosti a pevnosti. Skripta ČVUT, SNTL, Praha 1952, 13 str.
- [3] *T. v. Kármán-M. A. Biot*: Mathematical methods in engineering. McGraw Hill Co., New York 1940, 505 str.

## Резюме

### ПРИМЕНЕНИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

ЯРОСЛАВ ЯНАТКА (Jaroslav Janatka)

(Поступило в редакцию 7/X 1955 г.)

В статье приводится новый, простой метод определения собственных крутильных колебаний общей системы со многими степенями свободы, которая содержит ряд равных между собой элементов-однородную систему. С математической точки зрения задача сводится к решению краевой проблемы разностного уравнения однородной системы, причем краевые условия зависят от динамических жесткостей податливых связей, которые связывают обе части однородной системы с добавочными дисками. Частоты собственных колебаний всей системы пропорциональны корням частотного уравнения однородной системы. Частотное уравнение можно всегда преобразовать так, что одна его часть зависит только от числа дисков однородной системы, а вторая — только от динамических жесткостей присоединенных систем. Это единное преобразование разностного уравнения позволяет решить уравнение простыми графическими методами состоящими в нахождении точек пересечения двух систем линий. Так как одна из систем зависит только от числа дисков однородного уравнения, то для встречающихся наиболее часто количеств дисков можно ее нарисовать раз навсегда. Значит, решение сводится к начертанию второй системы линий, которая является графиком дробной рациональной функции, коэффициенты которой зависят от параметров крутильной системы. Решение важных для практики случаев, т. е. исследование наименьших корней частотного уравнения, очень просто, потому что можно легко дать оценку того, как будет пробегать одна или две ветви второй системы линий, а в вычислениях можно ограничиться на несколько точек, находящихся в окрестности ожидаемых точек пересечения.

## Summary

### DETERMINATION OF FREE TORSIONAL VIBRATIONS BY MEANS OF DIFFERENCE EQUATIONS

JAROSLAV JANATKA

(Received October 7, 1955.)

This paper presents a new simple method of calculating the natural frequencies of a torsional system with many degrees of freedom, which contains a series of identical units — a homogeneous system. From the mathematical point

of view it is a solution of the boundary problem of the difference equation of a homogeneous system, where the boundary conditions depend on the dynamic spring constants of the flexible couplings, which couple both sides of the homogeneous system with other disks.

The frequencies of the free vibrations of the whole torsional system are then proportional to the roots of the frequency equation of the homogeneous system. It is then possible, in all conditions to arrange the frequency equation in such a way, that one of its sides depends on the number of disks of the homogeneous system only, while the other side depends only on the dynamical spring constants of the joined systems.

This uniform arrangement of the frequency equation enables a simple graphical solution, consisting of finding the points of intersection of two families of curves. Since one family of curves depends only on the number of the disks of the homogeneous system, it is possible once and for all to plot it for a usual number of disks. The solution is then reduced to plotting the second family of curves, which is a graphical representation of rational fractional function, the coefficients of which depend on the parameters of the torsional system. The solution of the practically important cases, i. e. the finding of the smallest roots of the frequency equation is very simple, as it is possible to estimate the course of one or two branches of the second family of curves and restrict the calculation to a few points in the neighbourhood of the expected intersection points.