

Aplikace matematiky

Jindřich Nečas

Vliv vnější teploty na napjatost přehrad a jiných betonových masivů

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 2, 103–118

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102521>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VLIV VNĚJŠÍ TEPLoty NA NAPJATOST PŘEHRAD A JINÝCH BETONOVÝCH MASIVŮ

JINDŘICH NEČAS

(Došlo dne 1. listopadu 1955.) DT:627.821:627.824.7:539.319.096

V této práci je podána metoda výpočtu tepelných napjatostí v betonových masivech vlivem změn vnější teploty. K ilustraci je uvedeno několik příkladů.

Mohutné betonové masivy, s kterými se setkáváme ve stavebnictví při stavbě přehrad, plavebních komor a jinde, mají s hlediska pevnosti svůj zvláštní charakter. Na vznik trhlin v těchto masivech nemá vliv pouze vnější zatížení, ale také oteplování těchto masivů, a to jak působením vnitřních zdrojů, tak vnějších teplotních a klimatických změn. Dá se říci, že v některých případech je důležitější znáti tepelné napjatosti betonového masivu, než napjatosti vzniklé působením vnějších sil.

V dalším, vzhledem k účelu tohoto článku, budeme zkoumati gravitační přehradu. To ovšem naprosto neznamená, že uvedených výsledků se nedá užítí všude tam, kde předpoklady jejich aplikability budou stejné jako v tomto případě.

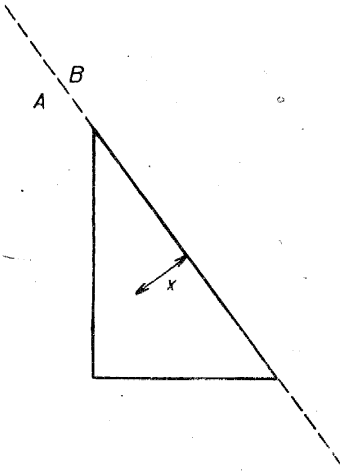
Oteplení přehrady vzniká buď hydratačním teplem, jež se vyvíjí při kladení betonu, nebo působením vnějšího prostředí. Budeme se zabývatí případem druhým. Vzhledem k tomu, že je možno superponovati oteplení přehrady vzniklé vnitřními zdroji oteplením vzniklým vlivem vnějšího prostředí, je možno formulovati náš problém za toho předpokladu, že přehrada je vychladlá. Experimentální ověření výsledků, které takto obdržíme, se musí proto dítí až po vychladnutí zdiva, což může býti i za 5–10 let po vybudování přehrady.

Oteplení přehrady způsobí její tepelnou napjatost. Napětí, na př. normální, může v některých místech býti kladné a překročiti poměrně nízkou mez pevnosti. V takových místech se v přehradě objeví trhliny. Předem uvedme, že výpočet napětí byl učiněn i vzhledem k dotvarování betonu. Nedbání vlivu

dilatačních spár skresluje částečně napětí, zejména napětí normální, působící ve směru šířky gravitačních bloků; k zachycení jejich vlivu se vrátíme v pozdějším pojednání.

1. Výpočet teploty

Učinné některé pracovní předpoklady. Protože vliv teplotních změn směrem do nitra přehrady se prudce zmenšuje, je možno s dostatečnou přesností, která plně vyhovuje praxi (o čemž se ostatně přesvědčíme srovnáním s experimentem), uvažovati přehradu jako poloprostor. Hranici poloprostoru bude buď vzdušný nebo návodní líc, podle toho, v kterých místech přehrady budeme zkoumati tepelné změny.



Obr. 1. Záměna přehrady poloprostorem.

Budeme tedy uvažovati poloprostor A — přehradu a poloprostor B , prostředí sousedící s přehradou. V poloprostoru B je známa teplota jako funkce času $o(t)$. Hledáme-li distribuci teploty A v čase $t \geq t_0$ musíme znáti ještě počáteční teplotu $p(x)$, jež je funkcí místa, t. j. vzdálenosti vyšetřovaného bodu od hranice poloprostoru. Hledaná teplota poloprostoru $u(t, x)$ je funkcí x a t . Protože ve velké vzdálenosti od hranice poloprostoru (která není zase tak veliká, aby přesáhla polovinu šířky přehrady, pokud se pohybujeme v dostatečné vzdálenosti od koruny a základové spáry), se teplota prakticky nemění, budeme

předpokládati, že hledaná teplota $u(t, x)$ v nekonečnu, t. j. dostatečně uvnitř přehrady, je konstantní a rovna p_0 .

Důležitý je druh vlivu působení B na A na jejich společné harnici. Buď nastává takový případ, že teplota na hranici A je totožná s teplotou v B , nebo tok teploty do poloprostoru A je úměrný rozdílu teplot na hranicích poloprostoru B a A . (Může býti dán také tok teploty do A , což nastane při zachycení vlivu slunečního záření.)

Teplota $u(t, x)$ vyhovuje rovnici pro vedení tepla: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \frac{\partial u}{\partial t}$, kde $a = \frac{c\varrho}{\lambda}$, c je specifické teplo kcal/kg °C, ϱ je specifická váha kg/m³, λ tepelná vodivost kcal/kg °C.¹⁾

¹⁾ Numerické hodnoty těchto konstant jsou $c = 0,20$ až $0,27$, $\varrho = 2200$ až 2400 , $\lambda = 1,1$ až $2,5$. V našich výpočtech budeme používat: $c = 0,22$, $\varrho = 2350$, $\lambda = 1,2$.

Formulace jakož i řešení první varianty našeho úkolu je následující:

Varianta 1. *Buďte dány funkce $o(t)$, $p(x)$. Funkce $o(t)$ je definována pro $0 \leq t < \infty$, je v tomto intervalu spojitá a ohraničená. Funkce $p(x)$ má tytéž vlastnosti a navíc platí: $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0$. Dále platí: $o(0) = p(0)$. Hledáme funkci dvou proměnných $u(t, x)$, která je spojitá jakožto funkce dvou proměnných v intervalu: $0 \leq t < \infty$, $0 \leq x < \infty$, platí o ní: $u(t, 0) = o(t)$, $u(0, x) = p(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$ stejnoměrně pro každý konečný interval t a vyhovuje rovnici pro vedení tepla: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \frac{\partial u}{\partial t}$.*

Jediné řešení varianty 1. je dáno vzorcem:

$$u(t, x) = \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} o(\tau) d\tau + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\tau)^2 a}{4t}} - e^{-\frac{(x+\tau)^2 a}{4t}} \right) p(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Zde τ je integrační proměnná, $o(\tau)$ a $p(\tau)$ jsou funkce shora uvedeného fyzikálního významu.

Důkaz vzorce (1) prováděti nebudem; je uveden v dodatku.

Jistou výhodou (1) je, že dává možnost vypočítati jak neustálý stav tepelné distribuce, tak ustálený stav tepelné distribuce, je-li $o(t)$ funkce periodická. Jestliže $\frac{2\pi}{\omega}$ je její perioda, potom funkci $v(t, x)$, jež udává ustálený stav, dostaneme takto: $v(t, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u\left(t + \frac{2\pi}{\omega} k, x\right)$. V případě, že $o(t) = \sin \omega t$, dostáváme jednoduchý vzorec:

$$v(t, x) = e^{-\sqrt{\frac{a\omega}{2}} x} \sin\left(\omega t - x \sqrt{\frac{a\omega}{2}}\right). \quad (2)$$

Vidíme, že (2) nezávisí na počáteční teplotě, což je s fyzikálního hlediska samozřejmé. Odvození vzorce (2) ponecháváme rovněž do dodatku. Snadno se přesvědčíme, že $v(t, x)$ vyhovuje rovnici pro vedení tepla.

Poznamenejme ještě, že formulace varianty 1. obsahuje předpoklad $p_0 = 0$. To není na úkor obecnosti, neboť na distribuci teploty se můžeme dívat jako na distribuci odchylky teploty od střední roční. Protože jádro přehrady se na této teplotě udržuje, je $p_0 = 0$.

Příklad 1. Vnější teplotu předpokládejme danou funkcí:

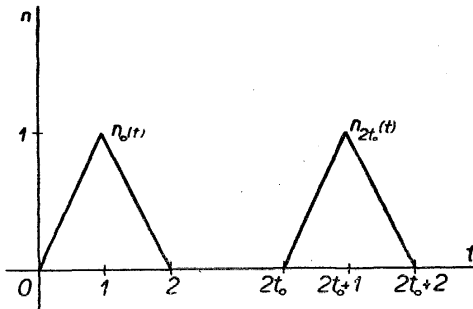
$$o(t) = A_D \sin \frac{\pi}{12} t + A_R \sin \frac{\pi}{12.365} t + N(t). \quad (3)$$

Funkce $N(t)$ zachycuje náhodné tepelné nárazy. Taková náhodná tepelná změna se dá s dostatečnou přesností aproximovati lineární kombinací funkcí

n_{2t_0} definovaných takto: je-li $0 \leq t \leq 2t_0$, kde $2t_0$ znamená počet hodin od začátku pozorování, tu $n_{2t_0}(t) = 0$, je-li $2t_0 \leq t \leq 2t_0 + 1$: $n_{2t_0}(t) = t - 2t_0$,

je-li $2t_0 + 1 \leq t \leq 2(t_0 + 1)$: $n_{2t_0}(t) = 2(t_0 + 1) - t$, je-li $t \geq 2(t_0 + 1)$: $n_{2t_0}(t) = 0$. Funkce $n_{2t_0}(t)$ je zobrazena na obrázku 2.

Aproximace funkcemi $n_{2t_0}(t)$ je znázorněna na obr. 3. Dosadíme do vzorce (1) za $o(t)$, funkci $n_0(t)$, $p(x)$ kladme rovno nule. Dostaneme:



Obr. 2. Grafické znázornění $n_0(t)$ a $n_{2t_0}(t)$.

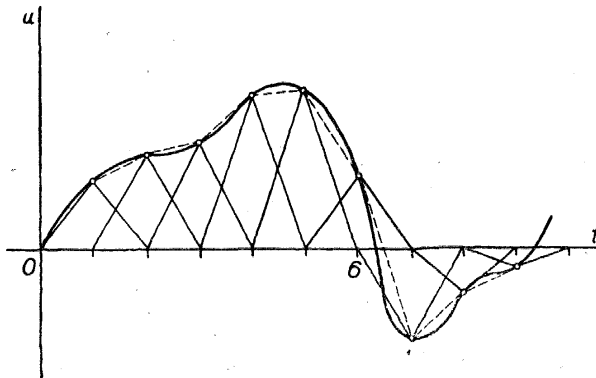
$$u(t, x) = \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} n_0(\tau) d\tau.$$

Jestliže $0 \leq t \leq 1$ potom

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \tau d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} \left(t - \frac{x^2 a}{4s^2}\right) ds = \\ &= \operatorname{erfc} \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} \cdot \left(t + \frac{x^2 a}{2}\right) - \frac{x\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 a}{4t}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Pod funkcí $\operatorname{erfc} x$ máme na mysli tuto funkci:

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-s^2} ds,$$



Obr. 3. Aproximace funkcemi $n_{2t_0}(t)$.

jejíž hodnoty dostaneme lehce z hodnot eror -- funkce $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$, která je tabulovaná na př. v [9]: $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$.

Jestliže $1 \leq t \leq 2$, potom

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \tau d\tau + \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_1^t \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} (2-\tau) d\tau = \\
 &= \operatorname{erfc} \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} \cdot \left(t + \frac{x^2 a}{2} \right) + 2 \operatorname{erfc} \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{t-1}} \cdot \left(1 - t - \frac{x^2 a}{2} \right) + \\
 &\quad + 2 \frac{x\sqrt{a}(t-1)}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 a}{4(t-1)}} - \frac{x\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 a}{4t}}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Tab. 1.

t	$x = 0$	$x = 0,05$	$x = 0,10$	$x = 0,15$	$x = 0,20$
	u	u	u	u	u
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,25	0,250	0,012	0,000	0,000	0,000
0,50	0,500	0,069	0,005	0,000	0,000
0,75	0,750	0,157	0,021	0,002	0,000
1,00	1,000	0,265	0,050	0,006	0,001
1,25	0,750	0,363	0,091	0,016	0,002
1,50	0,500	0,382	0,135	0,031	0,005
1,75	0,250	0,347	0,165	0,049	0,010
2,00	0,000	0,279	0,178	0,067	0,017
2,25	0,000	0,201	0,173	0,080	0,026
2,50	0,000	0,150	0,158	0,088	0,036
2,75	0,000	0,119	0,141	0,091	0,041
3,00	0,000	0,097	0,124	0,091	0,046
3,25	0,000	0,081	0,111	0,088	0,050
3,50	0,000	0,070	0,099	0,084	0,051
3,75	0,000	0,060	0,089	0,080	0,053
4,00	0,000	0,053	0,080	0,076	0,053
4,25	0,000	0,047	0,073	0,071	0,053
4,50	0,000	0,042	0,067	0,069	0,053
4,75	0,000	0,038	0,061	0,064	0,051
5,00	0,000	0,035	0,057	0,060	0,050
5,25	0,000	0,032	0,052	0,057	0,048
6,00	0,000	0,025	0,042	0,048	0,044
7,00	0,000	0,019	0,034	0,040	0,039

Je-li $t \geq 2$, potom dostaneme:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \tau d\tau + \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_1^2 \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} (2-\tau) d\tau = \\
 &= \operatorname{erfc} \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} \cdot \left(t + \frac{x^2 a}{2} \right) + 2 \operatorname{erfc} \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{t-1}} \cdot \left(1 - t - \frac{x^2 a}{2} \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{erfc} \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{t-2}} \cdot \left(2 - t - \frac{x^2 a}{2} \right) - \frac{x\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 a}{4t}} + 2 \frac{x\sqrt{a(t-1)}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 a}{4(t-1)}} - \\
 & - \frac{x\sqrt{a(t-2)}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2 a}{4(t-2)}}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

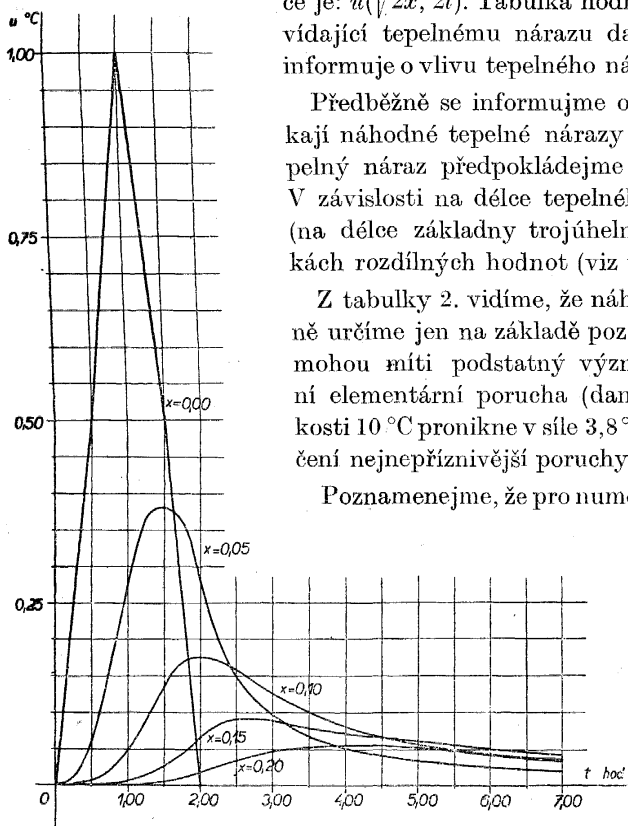
Kdyby přesnost aproximace funkce $N(t)$ funkcemi $n_{2k}(t)$ nebyla dostačující, stačilo by zmenšiti základnu trojúhelníka, který nám představuje funkci $n(t)$. Zmenšeme na př. základnu na 1 hod. Výsledná funkce je: $u(\sqrt{2}x, 2t)$. Tabulka hodnot funkce $u(t, x)$ odpovídající tepelnému nárazu danému funkcí $n_0(t)$ nás informuje o vlivu tepelného nárazu v nitru přehrady.

Předběžně se informujme o tom, jak hluboko vnikají náhodné tepelné nárazy do nitra přehrady. Tepelný náraz předpokládejme ve tvaru funkce $n_0(t)$. V závislosti na délce tepelného nárazu se dosahují (na délce základny trojúhelníka) v různých hloubkách rozdílných hodnot (viz tab. 2).

Z tabulky 2. vidíme, že náhodné vlivy (které přesně určíme jen na základě pozorování v daném místě) mohou mít podstatný význam. Tak na př. měsíční elementární porucha (daná funkcí $n_0(t)$) o velikosti 10°C pronikne v síle $3,8^\circ\text{C}$ až do hloubky 1 m. Určení nejnepříznivější poruchy se musí díti statisticky.

Poznamenejme, že pro numerický výpočet integrálů

(1) je návod převedení $o(t)$ na elementární poruchy vhodný i pro $p(x)$. Tedy jinými slovy: vyjádříme-li $p(x)$ jako lineární kombinaci elementárních poruch, potom integrály (1) lze vyjádřiti podobně jako (5) kombinací elementárních funkcí a funkce erfc .



Obr. 4. Grafické znázornění tabulky 1.

V $o(t)$ daném formulí (3) se dále vyskytují periodické členy. A_D znamená průměrnou amplitudu denního výkyvu teploty, A_R průměrnou amplitudu ročního výkyvu teploty. Funkce $v(t, x)$ odpovídající okrajové podmínce:

$$A_D \sin \frac{\pi}{12} t + A_R \sin \frac{\pi}{12.365} t$$

je rovna podle formule (2)

$$v(t, x) = A_n e^{-\sqrt{\frac{a\pi}{24}} \cdot x} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} t - x \sqrt{\frac{a\pi}{24}}\right) + \\ + A_n e^{-\sqrt{\frac{a\pi}{24 \cdot 365}} \cdot x} \sin\left(\frac{\pi}{12 \cdot 365} t - x \sqrt{\frac{a\pi}{24 \cdot 365}}\right). \quad (7)$$

Tab. 2.

Procent	8	18	32	162 $\frac{\div}{\div}$ $\frac{\div}{\div}$ týden	722 $\frac{\div}{\div}$ $\frac{\div}{\div}$ měsíc	Délka tepelného nárazu
100	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{9}$	$\frac{0}{16}$	$\frac{0}{81}$	$\frac{0}{361}$	Hloubka dosaženo v čase
38	$\frac{0,10}{6}$	$\frac{0,15}{13,5}$	$\frac{0,20}{24}$	$\frac{0,45}{121,5}$	$\frac{0,95}{541,5}$	Hloubka dosaženo v čase
18	$\frac{0,20}{8}$	$\frac{0,30}{18}$	$\frac{0,40}{32}$	$\frac{0,90}{162}$	$\frac{1,90}{722}$	Hloubka dosaženo v čase
9	$\frac{0,30}{12}$	$\frac{0,45}{27}$	$\frac{0,60}{48}$	$\frac{1,35}{243}$	$\frac{2,85}{1083}$	Hloubka dosaženo v čase
5	$\frac{0,40}{16}$	$\frac{0,60}{36}$	$\frac{0,80}{64}$	$\frac{1,80}{324}$	$\frac{3,80}{1444}$	Hloubka dosaženo v čase

Položíme-li $a = 430$ potom z (7) je vidět, že amplituda denního výkyvu teploty klesá do hloubky přehrady jako $e^{-7,502x}$, kdežto amplituda ročního výkyvu teploty jako $e^{-0,393x}$. (Poznamenejme, že maximální hodnoty výkyvu teploty při tepelném nárazu $n_0(t)$ klesají do hloubky přehrady velmi přibližně jako $e^{-x \cdot 16}$.) Kolísání teploty v pevném místě uvnitř přehrady bude také mít tvar sinusovky, s fázovým zpožděním. Na 1 m hloubky přehrady bude pro denní výkyv fázové zpoždění rovno 28,66 hod, pro roční výkyv 22,76 dnů.

Příklad 2. Jest zajímavá otázka, jaký vliv na teplotu odpovídající výše uvedeným periodickým funkcím má nezachycení počáteční podmínky.

Okrajová podmínka budiž: $o(t) = 20 \sin \frac{\pi}{12 \cdot 365} t$, počáteční podmínku kladme: $p(x) \equiv 0$. $A_n = 20$ °C.

Pro $x = 1,65$ m je patrnější ustálení možno pozorovati až za 3 měsíce. Rozdíl od stabilního stavu bude po roce asi 8,9%. Pro výpočet napjatosti nemá rozdíl v teplotách pro většinu skutečných případů žádný význam.

Pro $x = 3,31$ m patrnější ustálení je možno pozorovati až po 5–6 měsících. Po roce bude chyba ještě asi 37%.

Hlavní vliv na napjatost po dostavění přehrady ve větších hloubkách budou mít vnitřní zdroje. Vliv vnější teploty nabude rozhodujícího významu až po 3—5 letech, kdy jak z příkladu patrně bude prakticky dosaženo stabilního stavu. Zásadní vliv na napjatost má počáteční podmínka jenom za speciálních předpokladů.

Tab. 4.

Roční výkyvy.

Hloubka v m	Amplituda tepelných výchylek v %
0	100
0,1	96
0,2	92
0,3	89
0,4	85
0,5	82
1,0	68
1,5	55
2,0	45
2,5	38
3,0	31
3,5	25
4,0	21
4,5	17
5,0	14
5,5	12
6,0	9
6,5	8
7,0	6
7,5	5
8,0	4
8,5	4
9,0	3
9,5	2

Tab. 3.

Denní výkyvy.

Hloubka v m	Amplituda tepelných výchylek v %
0	100
0,01	93
0,02	86
0,03	80
0,04	74
0,05	69
0,10	48
0,15	32
0,20	22
0,25	15
0,30	11
0,35	7
0,40	5
0,45	3
0,50	2
0,55	2
0,60	1

Tab. 5.

Skutečná teplota ve srovnání s teplotou, danou vzorcem (7).

Čas	Teplota spoč. ze vzorce (1) v °C		Teplota ze vzorce (2) v °C	
	$x = 1,65$ m	$x = 3,31$ m	$x = 1,65$ m	$x = 3,31$ m
konec října.....	0	0	6,30	5,10
polovina prosince ...	-3,75	-0,71	-1,35	2,78
konec ledna.....	-9,24	-3,52	-8,32	-1,13
polovina března.....	-10,69	-6,02	-10,32	-5,35
konec dubna.....	-6,63	-6,13	-6,30	-5,10
polovina června.....	+0,83	-3,44	+1,39	-2,78
konec července.....	8,64	0,66	8,32	+1,19
polovina září.....	9,43	3,90	10,32	5,35

Příklad 3. Do jaké míry doposud učiněné předpoklady jsou ve shodě se skutečností nám ukáže srovnání s výsledky získanými experimentálně.

Ve vychladlé přehradě Schrah ve Švýcarsku zaznamenaly elektrické teploměry, zamontované uvnitř přehrady, teploty v podobě sinusovek. Hodnoty odpovídající ročnímu kolísání teploty o amplitudě $16,2^\circ\text{C}$ získané měřením a výpočtem jsou uvedeny v tabulce 6. Příklad 3. také ukazuje, že varianta 1. formulace úkolu bude vcelku lépe vyhovovat než varianta 2., kterou podáme. Pro některý jiný případ však tomu nemusí tak býti. Budeme-li zkoumati jaký vliv mají větrací šachty v přehradě na teplotu uvnitř, s velkou pravděpodobností vzhledem k proudění vzduchu v šachtách bude lépe vyhovovati varianta 2. V tomto případě na okraji musí platiti:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\alpha}{\lambda} (u(t, 0) - o(t)).$$

Zde α je součinitel přestupu tepla na povrchu a je rovný $12,5 \text{ kcal/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$ hod. Formulace jakož i řešení druhé varianty našeho úkolu je následující:

Varianta 2. *Budte dány funkce $o(t)$, $p(x)$. Funkce $o(t)$ je definovaná pro $0 \leq t < \infty$, je v tomto intervalu spojitá a ohraničená. Funkce $p(x)$ má tytéž vlastnosti a navíc platí: $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0$. Hledáme funkci dvou*

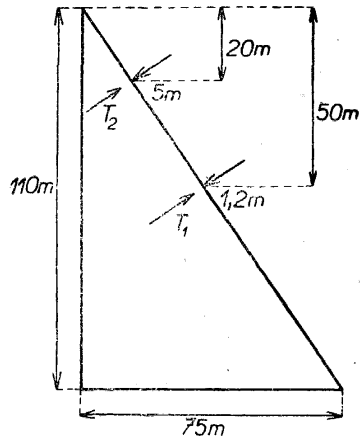
proměnných $u(t, x)$, která je spojitá (jakožto funkce dvou proměnných) v intervalu $0 \leq t < \infty$, $0 \leq x < \infty$, má derivaci $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$ spojitou v intervalu $0 < t < \infty$, $0 \leq x < \infty$, platí o ní, že

$u(0, x) = p(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\alpha}{\lambda} (u(t, 0) - o(t))$ pro $t > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$ stejnoměrně pro každý konečný interval t a vyhovuje rovnici pro vedení tepla:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Jediné řešení varianty 2. je dáno vzorcem:

$$u(t, x) = \frac{\alpha}{\lambda \sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} o(\tau) d\tau - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \frac{e^{\frac{x\alpha}{\lambda}}}{a} \int_0^t e^{-\frac{\alpha^2(t-\tau)}{\lambda^2 a}} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{a}} \right) \cdot o(\tau) d\tau + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x+\tau)^2 a}{4t}} + e^{-\frac{(x-\tau)^2 a}{4t}} \right) p(\tau) d\tau -$$



Obr. 5. Umístění teploměrů v přehradě.

$$-\frac{\alpha}{\lambda} e^{\frac{\alpha^2 t}{\lambda^2 a}} \int_0^{\infty} e^{\frac{\alpha}{\lambda}(x+\tau)} \operatorname{erfc} \left(\frac{(x+\tau)\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{a}} \right) p(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Tab. 6.

Číslo teploměru	Vzdálenost od vzduš. líce	Ampl. exper. zjištěná	Ampl. theor. zjištěná	Fáz. zpožd. exp.	Fáz. zpožd. theoret.
1	1,2 m	7,2 °C	6,2 °C	30 dní	27 dní
2	5,0 m	1,9 °C	2,3 °C	asi 3 měsíce	114 dní

Důkaz tohoto vzorce necháváme do dodatku. Integrály ve formuli (8) jsou snadno vypočitatelné, je-li $o(t)$ a $p(x)$ kombinací elementárních poruch, pomocí elementárních funkcí, funkce $\operatorname{erfc} x$ a funkce $\operatorname{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du$, která je tabelovaná.

Jestliže $o(t) = \sin \omega t$ tu funkce udávající ustálený stav je následující:

$$v(t, x) = \frac{\alpha}{\lambda} e^{-\sqrt{\frac{a\omega}{2}} x} \left(\frac{\sqrt{\frac{a\omega}{2}} + \frac{\alpha}{\lambda}}{\mu} \sin \left(\omega t - \sqrt{\frac{a\omega}{2}} x \right) - \frac{\sqrt{\frac{a\omega}{2}}}{\mu} \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{a\omega}{2}} x \right) \right). \quad (9)$$

Zde klademe $\mu = a\omega + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{2a\omega}$. Funkce $v(t, x)$ udávající ustálený stav se chová analogicky jako funkce daná formulí (2). Rozbor je shodný s podaným v příkladě 1. Amplitudy jsou však zhruba poloviční: pro $x = 0$ je maximum $v(t, 0) = 0,536$.²⁾

²⁾ Jestliže je znám tok teploty do A , což znamená, že je známa $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0)$, potom z (1) a z (8) snadno odvodíme výsledný vzorec:

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{\alpha^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d(\tau) d\tau + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\tau)^2 a}{4t}} + e^{-\frac{(x+\tau)^2 a}{4t}} \right) p(\tau) d\tau.$$

Zde $p(\tau)$ je počáteční teplota a $d(\tau)$ je hodnota derivace $\frac{\partial u}{\partial x}(\tau, 0)$.

2. Výpočet napjatostí

Při výpočtu napjatostí vyjdeme z obecných rovnic pro tepelnou napjatost, za předpokladu dokonalé pružnosti betonu. Modul pružnosti v dalším předpokládáme konstantní a rovný $E = 0,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Poissonovu konstantu v dalším předpokládáme konstantní a rovnou $\sigma = 0$. Koeficient tepelné roztažnosti klademe: $\gamma = 0,000012 \text{ } 1/^\circ\text{C}$.

Pro poloprostor zavedme si souřadnice takto: x -ovou ponechme, ostatní souřadnice zavedme podle běžné úmluvy, takže rovina $[y, z]$ je hranicí nezáhřátého poloprostoru. Koeficienty tensoru deformace označme podle běžného zvyku: $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$, složky tensoru napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Jestliže zavedeme konstanty $\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}$, $\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$, a označíme $\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$, potom vztah mezi oběma tensory nabývá tvaru: (viz [11])

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \Delta + 2\mu e_{xx} - (3\lambda + 2\mu) \gamma u(t, x), \\ \sigma_y &= \lambda \Delta + 2\mu e_{yy} - (3\lambda + 2\mu) \gamma u(t, x), \\ \sigma_z &= \lambda \Delta + 2\mu e_{zz} - (3\lambda + 2\mu) \gamma u(t, x), \\ \tau_{yz} &= \mu e_{yz}, \tau_{zx} = \mu e_{xz}, \tau_{xy} = \mu e_{xy}. \end{aligned} \quad (10)$$

Z rovnic (10) snadno vypočteme pro náš případ napjatosti. Vzhledem k symetrii deformace musí nutně být: $e_{yy} = e_{zz} = e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0$. Protože jako pracovní předpoklad činíme, že pro teplotu 0 není deformací ani napjatostí v poloprostoru, dostáváme pro $e_{xx} = \gamma u(t, x)$. Odtud dosazením do rovnic (10) vychází:

$$\sigma_x = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = \sigma_z = -E\gamma u(t, x). \quad (11)$$

Vzorec (11) dává z hlediska bezpečnosti v některých případech značně nadsazené výsledky. Tyto můžeme opravit jednak odstraněním předpokladu pružnosti betonu, jednak přihlédnutím k dilatačním spárám v přehradě. Tyto poslední se ve výpočtu objeví jako roviny rozdělující poloprostor na nekonečné kvádry. Jestliže dilatační spáry jsou dosti od sebe vzdálené (kolem 20 m), potom zanedbání jejich vlivu pro napjatost uprostřed kvádrů tvořeného těmito dilatačními spárkami je možné. S touto aproximací se prozatím spokojíme. V pozdějším pojednání budeme zkoumat příznivý vliv přibližování se dilatačních spár na napjatosti.

Dotvarování betonu nám sníží napětí. Učíme tento pokus: tyč dané délky podrobme po dobu $t \geq 0$ jednotkovému kladnému napětí, a to v tahu. V čase $t = 0$ bude poměrné protažení $e_{xx} = \frac{1}{E}$, v dalším čase bude rovno $\frac{1}{E} + C(t, 0)$. Kdybychom pokus začali v čase $\tau \geq 0$, potom v čase $t \geq \tau$ bude poměrné roztažení $\frac{1}{E} + C(t, \tau)$. Funkci $C(t, \tau)$ nazveme mírou plasticity. Jest možno

stanoviti ji experimentálně. Jestliže v době $t \geq 0$ působíme na tyč proměnným tahem $\sigma(t)$, tu za předpokladu linearitý děje a možnosti superposice, jakož i spojitosti derivace $\sigma'(t)$, dostáváme přibližně:

$$e_{xx} = \sigma(\tau) \left(\frac{1}{E} + C(t, \tau) \right) + \sigma'(\tau_1) \left(\frac{1}{E} + C(t, \tau_1) \right) (\tau_1 - \tau_0) + \\ + \dots + \sigma'(\tau_n) \left(\frac{1}{E} + C(t, \tau_n) \right) (\tau_n - \tau_{n-1}), \quad (12)$$

kde body τ_i dělí dosti hustě interval $\langle \tau, t \rangle$, $\tau_i < \tau_{i+1}$, $\tau_0 = \tau$, $\tau_n = t$. Suma (12) je integrální suma, k níž příslušný integrál je přesným vyjádřením e_{xx} . Dostáváme tedy:

$$e_{xx}(t) = \sigma(\tau) \left(\frac{1}{E} + C(t, \tau) \right) + \int_{\tau}^t \left(\frac{1}{E} + C(t, \tau) \right) \sigma'(\tau) d\tau, \quad (13)$$

kde $t \geq \tau$. Integrací per partes dostáváme:

$$Ee_{xx}(t) = E\sigma(\tau) \left(\frac{1}{E} + C(t, \tau) \right) + E\sigma(t) \left(\frac{1}{E} + C(t, t) \right) - E\sigma(\tau) \left(\frac{1}{E} + C(t, \tau) \right) - \\ - E \int_{\tau}^t \frac{\partial C}{\partial \tau}(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau = \sigma(t) - \int_{\tau}^t E \frac{\partial C}{\partial \tau}(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (14)$$

neboť $C(t, t) = 0$ (předpokládáme, že $C(t, \tau)$ má spojitou derivaci podle τ).

Jestliže naopak náš pokus upravíme tak, že k deformaci budeme hledati napětí, výsledky se budou krýti s řešením integrální rovnice (14). Tato integrální rovnice je tak zvaná Volterrova, o níž platí, že má právě jedno řešení. Dokonce můžeme tvrdit toto: existuje spojitá funkce dvou proměnných $\Gamma(t, \tau)$ tak, že

$$\sigma(t) = Ee_{xx}(t) + \int_{\tau}^t \Gamma(t, s) Ee_{xx}(s) ds. \quad (15)$$

(Viz MICHLIN: Integrální rovnice.) Dosadíme za $Ee_{xx} = 1$. Pro tento speciální případ dostaneme:

$$\sigma(t) = 1 + \int_{\tau}^t \Gamma(t, \tau) d\tau = R(t, \tau). \quad (16)$$

Funkce $R(t, \tau)$ má tento fyzikální význam: znamená napětí $\sigma(t)$ v čase $t \geq \tau$ odpovídající neproměnnému poměrnému roztažení: $\frac{1}{E}$. I tato funkce se dá, ovšem s velkými obtížemi, experimentálně stanovit. Můžeme ji však přímo vypočítati z funkce $\frac{\partial C}{\partial \tau}(t, \tau)$. Funkci $R(t, \tau)$, pokud je τ pevné, nazýváme relaxační křivkou. Z (15) je patrné, že $\frac{\partial R}{\partial \tau}(t, \tau) = -\Gamma(t, \tau)$. Integrací in-

tegrálu v (15) per partes (předpokládáme, že $e_{xx}(t)$ má spojitou derivaci) dostáváme:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= Ee_{xx}(t) - R(t, s) Ee_{xx}(s) \Big|_{\tau}^t + \int_{\tau}^t R(t, s) Ee'_{xx}(s) ds = \\ &= R(t, \tau) Ee_{xx}(\tau) + \int_{\tau}^t R(t, s) Ee'_{xx}(s) ds ,\end{aligned}\quad (17)$$

neboť $R(t, t) = 1$.

Vraťme se k našemu případu. Celková deformace $e_{yy} = 0$. Celková deformace je však součet deformace pružné e_{yy}^e a deformace tepelné e_{yy}^u ,

$$e_{yy}^u = \gamma u(t, x) = -\frac{\sigma_y^e}{E}.$$

Tedy $e_{yy}^e = \frac{\sigma_y^e}{E}$. (Indexem e budeme označovat tensor příslušné pružné deformaci, bez indexu e příslušné plastické deformaci.) Pokud na relaxaci v našem případě nemají vliv ostatní složky tensoru napětí, potom dostáváme vzhledem k podobnosti našeho případu s uvedenými dvěma pokusy pro σ_y podle rovnice (17a):

$$\sigma_y(t) = R(t, \tau) \sigma_y^e(\tau) + \int_{\tau}^t R(t, s) \frac{d}{ds} \sigma_y^e(s) ds .\quad (17b)$$

Za předpokladů poněkud obecnějších než těch, které jsme učinili, lze odvodit zcela přesně mnohem více, a to:

Jestliže Poissonova konstanta je konstantní, potom tensor plastických deformací vypočteme z tensoru elastických deformací z integrálních rovnic:

$$\begin{aligned}\sigma_x^e(t) &= \sigma_x(t) - \int_{\tau}^t \frac{\partial}{\partial s} \left(E(t) \left[\frac{1}{E(s)} + C(t, s) \right] \right) \sigma_x(s) ds , \\ \tau_{xy}(t) &= \tau_{xy}(t) - \int_{\tau}^t \frac{\partial}{\partial s} \left(G(t) \left[\frac{1}{G(s)} + \omega(t, s) \right] \right) \tau_{xy}(s) ds\end{aligned}\quad (18a)$$

a cyklicky dále, kde $E(s)$ je obecně proměnný modul pružnosti, $G(t) = \frac{E(t)}{2(1 + \sigma)}$, $\omega(t, \tau) = 2(1 + \sigma) C(t, \tau)$. Důkaz tohoto tvrzení najde čtenář v [7].

V našem případě, kdy $E = \text{konst}$ a $\sigma = 0$ jsou předpoklady splněny a integrální rovnice (18a) přejdou v jedinou integrální rovnici (14), jejímž řešením je (17a). Dostáváme tak: za našich předpokladů tensor plastických deformací vypočteme z tensoru elastických deformací z rovnic:

$$\sigma_x(t) = R(t, \tau) \sigma_x^e(\tau) + \int_{\tau}^t R(t, s) \frac{d}{ds} \sigma_x^e(s) ds\quad (18b)$$

a podobně pro ostatní složky tensoru. Pro relaxační křivku dostáváme výpočtem tento vyhovující vzorec: $R(t, \tau) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2r(t-\tau)})$, kde $r = 0,00125$.

Příklad 4. Najdeme ta místa v přehradě, kde tah je ≥ 10 kg/cm². Protože vlastní váha přehrady bude působiti ve směru osy z , proti vzniku tahů, omezíme se na tahy horizontální, které budou způsobovati vertikální trhliny. To se též shoduje s pozorováním. Využijeme vzorce (2) resp. vzorce (7) a vzorce (5) pro výpočet rozdělení teploty v přehradě. Napjatosti vypočteme z formule (18b). Napjatosti elastické vypočteme ze vzorce (11).

Označme $\sqrt{\frac{a\omega}{2}} = \Omega$. Dosadme (2) do (11). $\sigma_y^e(t) = -E\gamma e^{-\Omega x} \sin(\omega t - \Omega x)$.

Budeme počítat napjatosti $\sigma_y(t)$ pro $t \geq 0$. Najdeme podobně jako při odvození vzorce (2) asymptotickou formuli. Jestliže okrajová podmínka je $\sin \omega t$ a počáteční $p(x)$, potom $u(t, x) = e^{-\Omega x} \sin(\omega t - \Omega x) + z(t, x)$, kde $z(t, x)$ je funkce taková, že je-li $x > 0$ potom $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t, x) = 0$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial z}{\partial t}(t, x) = 0$. O tom se lehce přesvědčíme ze vzorce (1). Dosadme $-E\gamma z(t, x)$ do (18b). Dostaneme:

$$\begin{aligned} & -\frac{E\gamma}{2} z(0, x)(1 + e^{-2rt}) - \frac{E\gamma}{2} \int_0^t (1 + e^{-2r(t-s)}) \frac{\partial z}{\partial t}(s, x) ds = \\ & = -\frac{E\gamma}{2} \left[z(0, x)(1 + e^{-2rt}) + z(t, x) - z(0, x) - e^{-2rt} \int_0^t e^{2rs} \frac{\partial z}{\partial t}(s, x) ds \right]. \end{aligned}$$

Jest

$$\begin{aligned} & \left| e^{-2rt} \int_0^t e^{2rs} \frac{\partial z}{\partial t}(s, x) ds \right| \leq e^{-2rt} \left| \int_0^A e^{2rs} \frac{\partial z}{\partial t}(s, x) ds \right| + \\ & + e^{-2rt} \left| \int_A^t e^{2rs} \frac{\partial z}{\partial t}(s, x) ds \right| \leq e^{-2rt} M + e^{-2rt} \text{Max}_{A \leq s} \left| \frac{\partial z}{\partial t}(s, x) \right| \frac{1}{2r} (e^{2rA} - e^{2rt}), \end{aligned}$$

kde M je konstanta závislá na A . Při vhodné volbě A , vzhledem k předpokládám učiněným o funkci $z(t, x)$, a při velkém t učiníme odhadovaný integrál libovolně malý. Ostatní výrazy, které zbudou po vykrácení, také konvergují k nule s rostoucím t . Napjatosti se tedy počítají přímo dosazením asymptotického výrazu. Dostáváme:

$$\begin{aligned} \sigma_y(t) &= \frac{E\gamma}{2} (1 + e^{-2rt}) e^{-\Omega x} \sin \Omega x - \\ & - \frac{E\gamma}{2} e^{-\Omega x} \omega \int_0^t (1 + e^{-2r(t-s)}) \cos(\omega s - \Omega x) ds = \end{aligned}$$

$$= -\frac{E\gamma}{2} e^{-\Omega x} \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{4r^2 + \omega^2} \right) \sin(\omega t - \Omega x) + \frac{2r\omega}{4r^2 + \omega^2} \cos(\omega t - \Omega x) - \right. \\ \left. - \cos x\Omega \cdot \frac{2r\omega}{4r^2 + \omega^2} e^{-2r'l} + \sin x\Omega \cdot \frac{\omega^2}{4r^2 + \omega^2} e^{-2r'l} \right].$$

Asymptotický vzorec pro $\sigma_y(t)$ dostáváme ve tvaru:

$$\sigma_y(t) = -\frac{E\gamma}{2} e^{-\Omega x} \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{4r^2 + \omega^2} \right) \sin(\omega t - \Omega x) + \frac{2r\omega}{4r^2 + \omega^2} \cos(\omega t - \Omega x) \right]. \quad (19)$$

Z (19) je viděti, že položíme-li $r = 0$, dostáváme: $\sigma_y(t) = \sigma_y^e(t)$. Pro denní výkyvy teploty položíme $A_D = 10^\circ\text{C}$. Dosažením do (19) zjistíme nepatrnou odchylku od σ_y^e , což nemá prakticky žádný význam. Můžeme proto klásti $\sigma_y = \sigma_y^e$. V tomto případě i vliv dilatačních spár je roven nule, takže obdrženy výsledek je možno považovati za definitivní.

Tab. 7.

Denní výkyvy teploty.

x v m	σ_y v kg/cm ²
0,05	16,5
0,10	11,3
0,15	7,8
0,20	5,4

Pro roční výkyvy položíme $A_R = 20^\circ\text{C}$. Pro danou hloubku x zjistíme maximum $\sigma_y(t)$. (Toto maximum je dosaženo pro různé hloubky v různou dobu.) Dostáváme: $\text{Max } \sigma_y(x, t) = E\gamma A_R 0,55e^{-x\Omega}$, kdežto $\text{Max } \sigma_y^e(x, t) = E\gamma A_R e^{-x\Omega}$.

Zmenšení napětí při uvážení dotvarování tvoří 45%. Jestliže budeme počítat napjatosti pro elementární poruchy, zjistíme podobně jako při použití vzorce (19), že pro případ poruchy dlouhé 8, 18, 32 hod. můžeme vliv dotvarování zanedbat. S chybou poněkud větší to lze učiniti i pro 162 hod. = 1 týden.

Vypočítejme napjatosti vzniklé elementární poruchou trvající jeden měsíc. Maximální hodnotu poruchy budeme předpokládati 10°C . Integrací integrálu

Tab. 8.

Roční výkyvy teploty.

x v m	σ_y^e v kg/cm ²	σ_y v kg/cm ²
0,5	39,6	21,8
1,0	32,6	17,9
1,5	26,4	14,5
2,0	21,6	11,9
2,5	18,2	10,0
3,0	14,9	8,2
3,5	12,0	6,6
4,0	10,1	5,6
4,5	8,2	4,5
5,0	6,7	3,7

v (18b) per partes můžeme (18b) upravit tak, že místo $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$ budeme mít v integrálu $u(t, x)$. Potom můžeme pro výpočet integrálu užití numerické metody, což je rychlé a pro naše účely dostatečně přesné. Dostáváme tak tyto hodnoty:

Tab. 9.
Elementární porucha trvající 1 měsíc.

x v m	σ_y^e v kg/cm ²	σ_y v kg/cm ²	σ_y je zmenšeno o %
0	24,0	19,8	17
0,95	9,2	7,3	21

(Pokračování.)