

# Aplikace matematiky

---

Ivo Babuška

Řešení biharmonického problému v nekonečném pásu

*Aplikace matematiky*, Vol. 1 (1956), No. 1, 34–43

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102514>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ŘEŠENÍ BIHARMONICKÉHO PROBLÉMU V NEKONEČNÉM PÁSU

IVO BABUŠKA

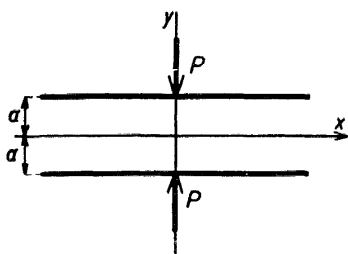
(Došlo dne 8. listopadu 1955.)

DT:517.946.6

V článku jest popsáno řešení biharmonického problému v nekonečném pásu užitím Greenových funkcí (příčinkových ploch). Jest připojeno grafické znázornění těchto funkcí a poukázáno na jejich fyzikální význam. V další části pak bude dokázána jedna metoda numerického řešení Greenových funkcí, pomocí které byly určeny tyto funkce.

### Část I. Numerické výsledky a aplikace.

Biharmonický problém v nekonečném pásu není problémem novým. Byl již dávno studován FILONEM [1] a MELANEM [2], dále pak SEEWALDEM [3]. Řešení jest založeno na Fourierově transformaci. Numericky jest metoda



Obr. 1.

Fourierovy transformace velmi pracná. Ukazuje to na př. práce MESMEROVA [4], kde jest pokus o numerické vyčíslení Fourierova integrálu pro případ, že pás jest zatížen osamělým břemenem. Pomalá konvergence byla zde příčinou praktického neúspěchu. Filon a Melan se omezují na výpočet napětí  $Y_v$  na ose pásu, je-li pás zatížen osamělými břemeny podle obr. 1.

V tabulce 1 jsou výsledky dosažené Filonem [1] a Melanem [2].

Fourierovy transformace užívá také při řešení nekonečného pásu HOWLAND [5], HOPKINS [6] a TIFFEN [7]. K podobným výsledkům ve tvaru Fourierova integrálu pomocí adjungovaných funkcí dospívá BIRMAN [8], [9]. Problémem nekonečného pásu se také zabývá JUNG [10] a GIRKMANN [11].

Na nekonečný pás aplikuje jistou Föpplovu metodu konformního zobrazení SONNTAG [12]. Výsledky v uvedených pracích jsou převážně theoretické a nikde nejsou vyčísleny Greenovy funkce (příčinkové plochy). K numerickým výsledkům pomocí metody sítí (metody konečných diferencí) dospívá LITVINOV [13]. Užívá se zde čtvercové sítě, oko sítě jest velikosti  $\frac{1}{8}$  šířky pásu.

Formulujeme si nyní přesně pojem biharmonického problému.

Tabulka 1.

$\frac{x}{a}$		0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{0\pi}{3}$	$\pi$
$\frac{\pi a}{2P} \cdot Y_{\nu}(x)$	podle Filona	-1,4444	—	-0,7412	—	-0,1125	+0,030	+0,0252	+0,0036
	podle Melana	-1,4374	-1,2131	-0,7414	0,3437	-0,1125	-0,0019	—	—

**Definice 1.1.** *Nazveme nekonečným pásem  $Q$  bodovou množinu*

$$Q = E_{x,y} [|y| < \frac{1}{2}\pi].^1)$$

**Definice 2.1.** *Biharmonickým problémem v nekonečném pásu  $Q$  budeme nazývat úlohu nalézt funkci  $U(x, y)$  definovanou na  $Q$  těchto vlastností*

$$1. \quad \Delta\Delta U(x, y) = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0$$

ve všech bodech pásu  $Q$ .

$$2. \quad \left| \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right| < C(1 + x^2)^{1/n},$$

$$\left| \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right| < C(1 + x^2)^{1/n},$$

$$n < \infty, \quad C < \infty.$$

3. *Funkce  $U(x, y)$  a  $\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$  jsou spojité na  $Q$  včetně hranice.<sup>2)</sup>*

<sup>1)</sup> Symbolem  $E_{x,y} [|y| < \frac{1}{2}\pi]$  značíme množinu bodů  $(x, y)$  takových, že  $|y| < \frac{1}{2}\pi$ . Body  $|y| = \frac{1}{2}\pi$  tvoří t. zv. hranici pásu. Tyto body do pásu  $Q$  nepočítáme.

<sup>2)</sup> Přesný význam jest ten, že existuje spojitá funkce  $\tilde{U}$  definovaná na  $\bar{Q}$ ,  $[\bar{Q} = E_{x,y} [|y| \leq \frac{1}{2}\pi]]$  tak, že pro všechny body pásu platí  $U(x, y) = \tilde{U}(x, y)$ . Podobně jest tomu i u funkce  $\frac{\partial U}{\partial y}$ .

4. Jsou dány předem funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  a

$$U(x, \pm \frac{1}{2}\pi) = f(x), \quad \frac{\partial U(x, \pm \frac{1}{2}\pi)}{\partial y} = \pm g(x).$$

Funkcím  $f(x)$  a  $g(x)$  říkáme okrajové podmínky.

Poznámky. 1. Jest zřejmé, že má-li existovat řešení ve smyslu definice 2.1., nemohou být funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  libovolné. Tak na př. funkce  $g(x)$  musí být spojitá a nesmí „příliš rychle růst“ pro  $x \rightarrow \infty$  (srv. bod 2. definice 2.1).

2. Předpokládali jsme, že funkce  $U(x, y)$  a  $\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$  jsou spojitě na  $Q$  včetně hranice. Kdybychom modifikovali pojem prodloužitelnosti na hranici, mohli bychom opustit požadavek spojitosti okrajových podmínek.

3. Biharmonický problém jest základním problémem v teorii rovinné pružnosti. Často však nemáme na hranici předepsánu biharmonickou funkci, ale její derivace  $\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2}$  a  $\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y}$ . Známe-li tyto funkce, můžeme však zřejmě prostou integrací přejíti k hodnotám biharmonické funkce a její normální derivace na hranici.

4. V definici 2.1 jsme předpokládali omezený růst derivací pro  $x \rightarrow \infty$ . To proto, abychom měli zaručenu jednoznačnost řešení.

5. V celém článku řešíme pouze symetrický problém nekonečného pásu. Předpokládáme totiž, že  $U(x, +\frac{1}{2}\pi) = U(x, -\frac{1}{2}\pi)$ ,  $\frac{\partial U(x, +\frac{1}{2}\pi)}{\partial y} = -\frac{\partial U(x, -\frac{1}{2}\pi)}{\partial y}$ .

Platí nyní tato důležitá věta

**Věta 1.1** *Budte  $f(x)$  a  $g(x)$  spojité funkce takové, že platí*

$$|f'(x)| < C(1 + x^2)^n,$$

$$|g(x)| < C(1 + x^2)^{n'}.$$

*Potom existuje právě jediné řešení  $U(x, y)$  biharmonického problému ve smyslu definice 2.1. takové, že na hranici platí*

$$U(x, \pm \frac{1}{2}\pi) = f(x),$$

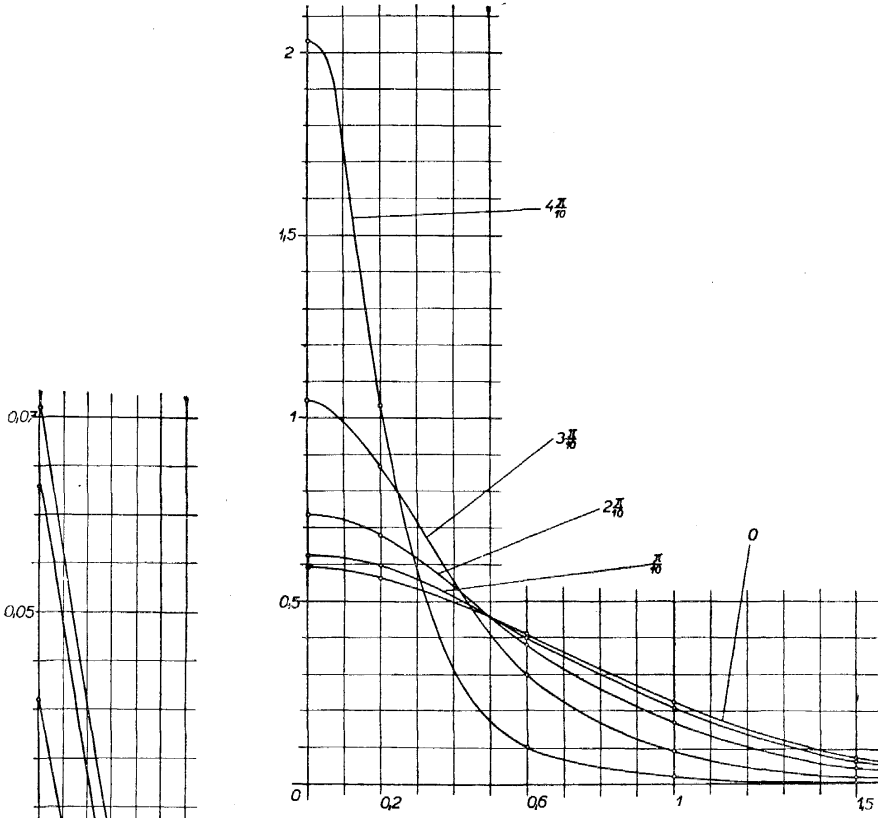
$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, \pm \frac{1}{2}\pi) = \pm g(x).$$

*Přítom jest*

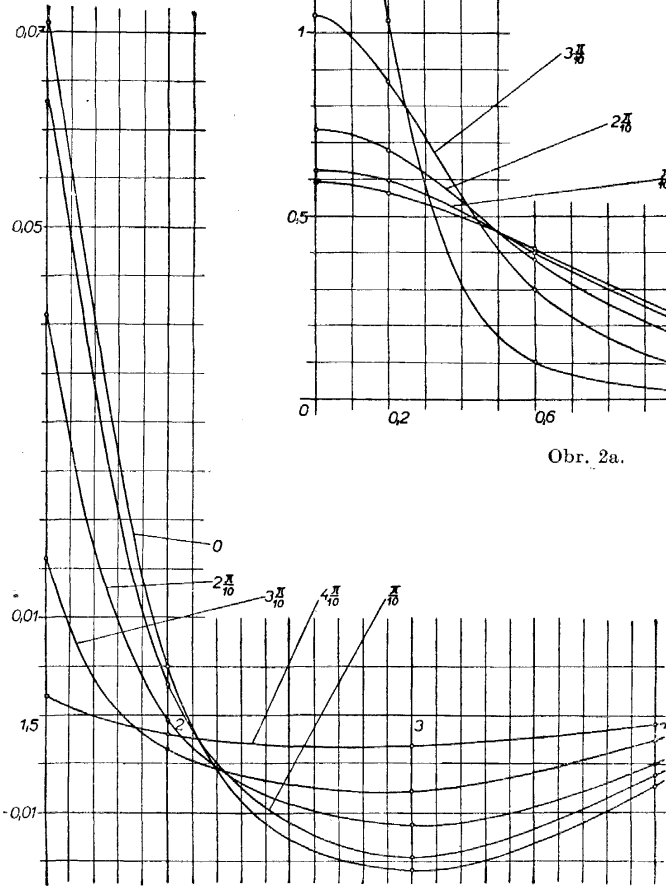
$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) G_1(\xi - x, y) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) G_2(\xi - x, y) d\xi;$$

$$-\infty < x < \infty,$$

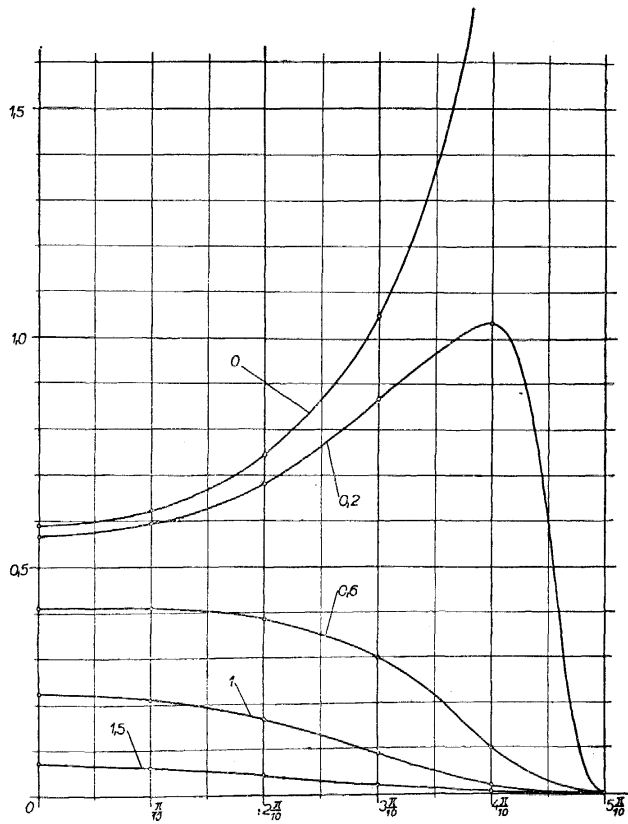
$$-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi.$$



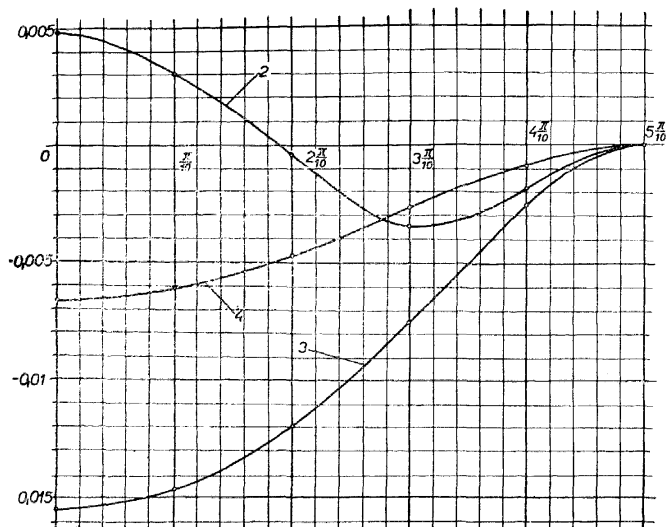
Obr. 2a.



Obr. 2b.



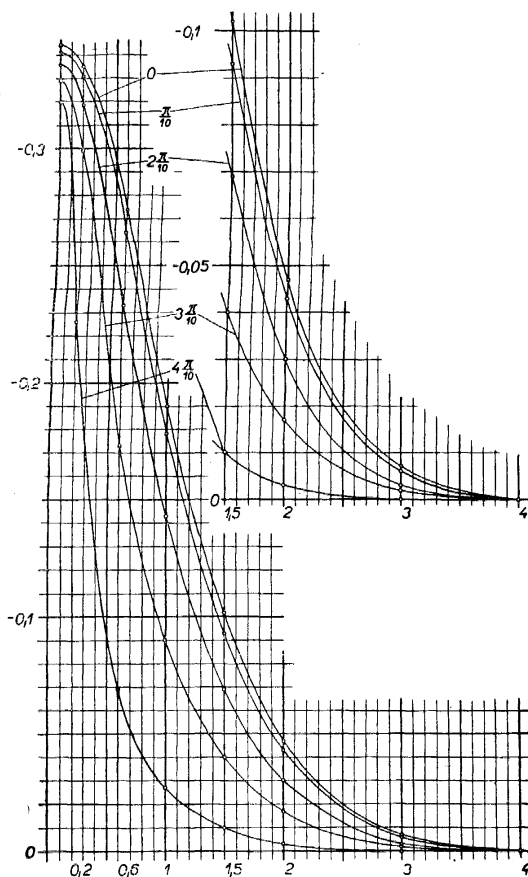
Obr. 2c.



Obr. 2d.

*Neuvlastní integrály existují (v obyčejném smyslu). Přitom jest*

$$G_i(x, y) = \frac{\partial^2 H_i(x, y)}{\partial x^2}, \quad i = 1, 2,$$



Obr. 3ab.

*a  $H_i(x, y)$  jest řešení biharmonického problému s okrajovými podmínkami*

$$H_1(x, \pm \frac{1}{2}\pi) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ x & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

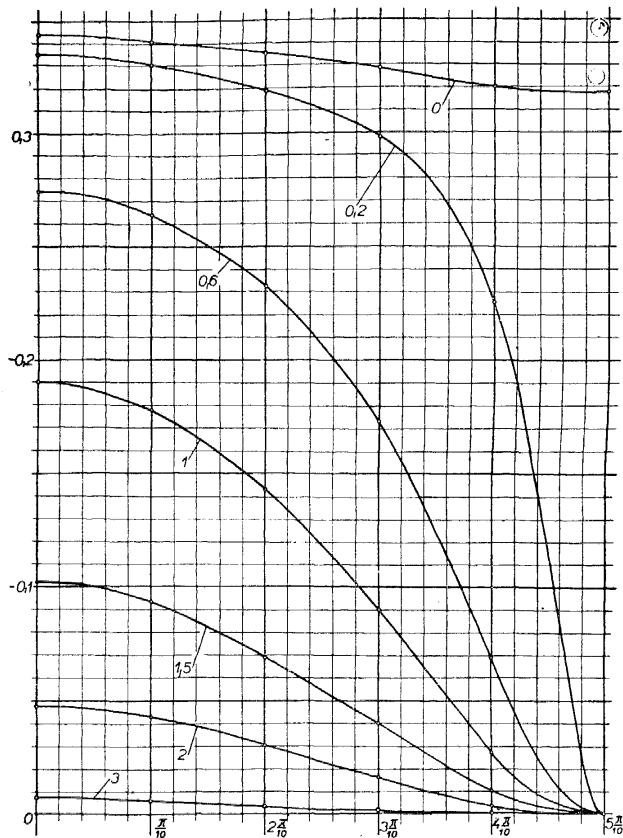
$$\frac{\partial H_1}{\partial y}(x, \pm \frac{1}{2}\pi) = 0,$$

$$H_2(x, \pm \frac{1}{2}\pi) = 0,$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial y}(x, \pm \frac{1}{2}\pi) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \pm x & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}.$$

Důkaz podáme v další části tohoto článku, která vyjde v některém z příštích čísel tohoto časopisu.

Funkce  $G_1(x, y)$  a  $G_2(x, y)$  nazýváme Greenovými funkcemi daného problému. Často se také nazývají příčinkovými plochami. Na obr. 2a jest graficky zná-



Obr. 3c.

zorněn průběh funkce  $G_1(x, y_i)$ ,  $y_i = \frac{i\pi}{10}$  pro  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  a  $0 \leq x < 1,5$ .

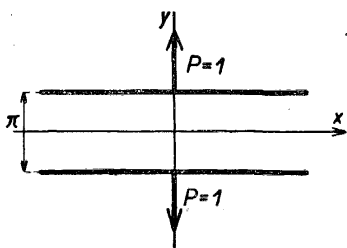
Funkce jest symetrická. Na obr. 2b jest znázorněn průběh této funkce pro  $x \geq 1,5$ . Na obr. 2c jest průběh funkce  $G_1(x_i, y)$ ,  $x_i = 0; 0,2; 0,6; 1,0; 1,5$ .

Na obr. 2d jest pak průběh funkce  $G_1(x_i, y)$ ,  $x_i = 2,0; 3,0; 4,0$ . Na obr. 3a až 3c jest graficky vyznačen průběh funkce  $G_2(x, y)$  v témže grafickém uspořádání jako v obr. 2.

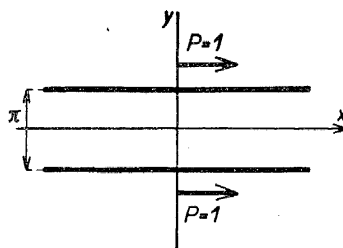


Fyzikální význam funkcí  $G_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$  si nyní blíže popíšeme. Funkce  $G_1(x, y)$  znázorňuje napětí  $Y_v$  jestliže pás jest zatížen osamělým břemenem podle obr. 4.

Skutečně okrajové podmínky pro biharmonický problém, které vyjadřují napjatost podle obr. 4 jsou



Obr. 4.



Obr. 5.

$$U(x, \pm \frac{1}{2}\pi) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial U(x; \pm \frac{1}{2}\pi)}{\partial y} = 0.$$

Proto  $U(x, y) = H_1(x, y)$  (srv. větu 1.1). Máme tudíž

$$Y_v = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} = G_1.$$

Funkci  $G_1(x, y)$  můžeme si na př. představit jako integrál napětí  $Y_v$ , t. j.  $\int_{-\infty}^{\infty} Y_v(x) dx$ , pro případ, že pás jest zatížen podle obr. 5.

Věta 1.1 má ještě jeden zajímavý důsledek. Položme si otázku, zda napětí na přímkách  $y = \text{konst}$  střídá znaménko. Tato otázka jest tím zajímavější, že v dosti velké vzdálenosti od osamělého břemene mohou být již výsledky v rozsahu numerických chyb. Odpověď jest velmi snadná a plyne přímo z věty 1.1.

Napětí musí střídát znaménko pro všechna  $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$ . Funkce  $x^2$  jest totiž zřejmě funkce biharmonická vyhovující všem předpokladům v definici 2.1 a větě 1.1. Proto

$$x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\xi - x, y) \cdot \xi^2 d\xi,$$

a tedy

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\xi, y) \xi^2 d\xi.$$

Tento integrál existuje v obyčejném smyslu. Poněvadž jest  $\xi^2 \geq 0$ , musí nutně funkce  $G_1(x, y_i)$  vystřídát znaménko.

Zatím jsme stále předpokládali, že pás má šířku  $\pi$ . Snadno však můžeme přejít k výsledkům, když šířka jest obecně  $b$ . Máme-li totiž úlohu nalézt biharmonickou funkci v pásu o šířce  $b$  takovou, že na hranici jest  $U(x, \pm \frac{1}{2}b) = f(x)$  a  $\frac{\partial U(x, \pm \frac{1}{2}b)}{\partial y} = \pm g(x)$ , potom najdeme biharmonickou funkci

$U^*(x, y)$  na pásu šířky  $\pi$  s okrajovými podmínkami  $U^*(x, \pm \frac{1}{2}\pi) = f\left(\frac{xb}{\pi}\right)$  a  $\frac{\partial U^*(x, \pm \frac{1}{2}\pi)}{\partial y} = \frac{b}{\pi} g\left(\frac{xb}{\pi}\right)$ . To však dovedeme podle věty 1.1. Potom

$$U(x, y) = U^*\left(\frac{x\pi}{b}, \frac{y\pi}{b}\right).$$

V další části (v jednom z příštích čísel tohoto časopisu) ukážeme jednu metodu pro výpočet funkcí  $G_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$ , které jsme užili v našem případě a provedeme důkaz konvergence této aproximativní metody. Rovněž provedeme odhad chyby.

#### LITERATURA

- [1] *Filon*: Trans. Roy. Phil. Soc. 1903, Ser. A, vol. 201.
- [2] *Melan*: Beton u. Eisen 1919.
- [3] *Seewald*: Abh. a. d. Aerodyn. Inst. T. H. Aachen, Berlin 1927.
- [4] *Mesmer*: Techn. Mechanik u. Thermodynamik, Berlin 1930.
- [5] *Howland*: Proc. Roy. Soc. A 124 (1929), 89.
- [6] *Hopkins*: Proc. Cambr. Phil. Soc. 46 (1950), 164.
- [7] *Tiffen*: Quart. J. Mech. Appl. Math. 6 (1953), 344.
- [8] *Бирман*: ДАН СССР 62 (1948), № 2.
- [9] *Бирман*: Прикладная мат. мех. XIV (1950), 665.
- [10] *Jung*: Ing. Arch. 18 (1950), 263.
- [11] *Girkmann*: Ing. Arch. 13 (1943), 273.
- [12] *Sonntag*: ZAMM 34 (1954), 435.
- [13] *Литвинюв*: Укр. мат. журнал VII (1955), № 2, 188.

## Резюме

### РЕШЕНИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška)

(Поступило в редакцию 8/XI 1955 г.)

#### **Част I. Численные результаты и приложения.**

В работе описывается решение бигармонической проблемы, при котором используются функции Грина (поверхности влияния). Приложен график этих функций. В следующей части будет доказан один из методов численного решения этих функций Грина, при помощи которого эти функции были численно определены.

#### Zusammenfassung

### EINE LÖSUNG DES BIHARMONISCHEN PROBLEMS IM UNENDLICHEN STREIFEN

IVO BABUŠKA

(Eingegangen am 8. November 1955.)

#### **I. Teil. Numerische Ergebnisse und Anwendungen.**

In dem Artikel ist die Lösung des biharmonischen Problems im unendlichen Streifen durch Greensche Funktionen (Einflussfelder) ausgedrückt. Es wird der physikalische Sinn der Greenschen Funktionen gezeigt und die Einflussfelder sind numerisch angegeben.