Ján Mozer

О порядке одной суммы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 41 (1991), No. 4, 663–684

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102498`

Czechoslovak Mathematical Journal, 41 (116) 1991, Praha

О ПОРЯДКЕ ОДНОЙ СУММЫ Е. К. ТИТЧМАРША В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Ян Мозер, Братислава*)

(Поступило в редакцию 7ого мая 1990 г.)

ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемой работе получен окончательный ответ на классический вопрос о порядке сложной суммы Е. К. Титчмарша

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} Z^2(t_\nu)\, Z^2(t_{\nu+1}) \,.$$

В связи с этим вопросом мы доказали и аналог биквадратного эффекта для функции $Z(t)$, $t \in \langle T, 2T\rangle$. Отсюда следует, что сигнал, определяемый функцией $Z(t)$, подчиняется теореме Котельникова-Уиттекера-Найквиста из теории информации.

Далее напомним определение дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}}\,, \quad s = \sigma + \mathrm{i}t\,, \quad \sigma > 1$$

(p пробегает все простые числа) и возможность аналитического продолжения функции $\zeta(s)$ на все комплексные значения $s \neq 1$, в частности на критическую прямую $\sigma = 1/2$. Последнее обстоятельство позволило Риману определить изящную действительную функцию (см. [10], (35), (44), (62), ср. [7], стр. 94, 383)

$$\begin{aligned}
(1) \qquad & Z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}t)\,, \\
& \vartheta(t) = -\tfrac{1}{2}\, t \ln \pi + \operatorname{Im}\left\{\ln \Gamma\left(\frac{1}{4} + \mathrm{i}\,\frac{t}{2}\right)\right\} = \\
& = \frac{1}{2}\, t \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}\, t - \frac{1}{8}\,\pi + O\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что свойства сигнала, порожденного функцией Римана $Z(t)$, связаны с законом распределения простых чисел в натуральном ряду, что нужно считать приятным обстоятельством с точки зрения пифагорейской философии Вселенной.

---

*) Работа написана при поддержке гранта САН, No 363/90.

1. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СУММЫ Е. К. ТИТЧМАРША

В 1934 г. Е. К. Титчмарш высказал следующую гипотезу (см. [11], стр. 105): существует такое положительное число A, что

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} Z^2(t_\nu)\, Z^2(t_{\nu+1}) = O(N \ln^A N),$$

где M — достаточно большое постоянное число и $\{t_\nu\}$ — последовательность, определенная условием

$$\vartheta(t_\nu) = \pi\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

В 1980 г. мы доказали что можно положить $A = 4$, (см. [2], (4)). Основу нашего доказательства составляла оценка (см. [2], (6)):

$$\sum_{t_{M+1} \leq \tilde{t}_\nu \leq T} Z^4(\tilde{t}_\nu) = O(T \ln^5 T), \tag{3}$$

где последовательность $\{\tilde{t}_\nu\}$ определена формулой (см. [2], (5))

$$\vartheta(\tilde{t}_\nu) = \frac{\pi}{2}\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

В 1983 г. мы уточнили оценку (3), доведя ее до асимптотического равентсва ([5], (3))

$$\sum_{\tilde{t}_{M+1} \tilde{t}_\nu \leq T} Z^4(\tilde{t}_\nu) \sim \frac{1}{2\pi^3} T \ln^5 T, \quad T \to \infty .$$

В настоящей работе нами получен окончательный ответ на классический вопрос о порядке суммы Е. К. Титчмарша. На самом деле мы получили более общие автокорреляционные формулы для функции $Z^2(t)$, из которых, в частном случае, получается нужный результат. А именно, справедлива

Теорема 1 (основная).

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq 2T} Z^2\{t_\nu + k\varrho_1(\nu)\}\, Z^2\{t_\nu + l\varrho_1(\nu)\} = \tag{5}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi^5(k-l)^2} T \ln^5 T + O(MT \ln^4 T), & k \neq l, \\ \dfrac{1}{4\pi^3} T \ln^5 T + O\{(M+1) T \ln^4 T\}, & k = l, \end{cases}$$

где

$$\varrho_1(\nu) = \frac{2\pi}{\ln \frac{t_\nu}{2\pi}}, \quad k, l = 0, \pm 1, \ldots, \pm M, \quad M = O(\psi) \tag{6}$$

и $\psi = \psi(T)$ — функция, сколь угодно медленно возрастающая к ∞ при $T \to \infty$.

Окончательный результат о порядке суммы Е. К. Титчмарша получается отсюда следующим образом.

Полагая в (5) $k = 0$, $l = 1$ и, следовательно, $M = 1$, мы получаем

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} Z^2(t_\nu)\, Z^2\{t_\nu + \varrho_1(\nu)\} = \tag{7}$$

$$= \frac{3}{4\pi^5} T \ln^5 T + O(T \ln^4 T).$$

Поскольку (см. [1], (42), предпоследнее равенство)

$$t_{\nu+1} - t_\nu = \frac{2\pi}{\ln \dfrac{t_\nu}{2\pi}} + O\left(\frac{1}{t_\nu \ln^2 t_\nu}\right) = \varrho_1(\nu) + O\left(\frac{1}{t_\nu \ln^2 t_\nu}\right), \tag{8}$$

то, в силу обычных оценок

$$Z(t) = O(t^{1/6} \ln t), \quad Z'(t) = O(t^{1/6} \ln^2 t),$$

мы дальше получаем

$$Z^2(t_{\nu+1}) = Z^2\{t_\nu + (t_{\nu+1} - t_\nu)\} = Z^2 \left\{t_\nu + \varrho_1(\nu) + O\left(\frac{1}{t_\nu \ln^2 t_\nu}\right)\right\} =$$
$$= Z^2\{t_\nu + \varrho_1(\nu)\} + O(T^{-2/3} \ln T).$$

Отсюда в силу очевидного соотношения

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} 1 = \frac{1}{2\pi} T \ln T + O(T)$$

следует

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} Z^2(t_\nu)\, Z^2(t_{\nu+1}) = \sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} Z^2(t_\nu)\, Z^2\{t_\nu + \varrho_1(\nu)\} + \tag{9}$$
$$+ O(T^{1/3} \ln^2 T \,.\, T^{-2/3} \ln T \,.\, T \ln T) =$$
$$= \sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} Z^2(t_\nu)\, Z^2\{t_\nu + \varrho_1(\nu)\} + O(T^{2/3} \ln^4 T).$$

Наконец в силу (7), (9) получаем

Следствие 1.

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} Z^2(t_\nu)\, Z^2(t_{\nu+1}) = \frac{3}{4\pi^5} T \ln^5 T + O(T \ln^4 T). \tag{10}$$

Замечание 1. Асимпротическое соотношение (10) окончательно решает вопрос о порядке суммы Е. К. Титчмарша.

2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ И ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Лемма А.

$$\sum_{T \leqq \tilde{t}_\nu \leqq 2T} Z^2\{\tilde{t}_\nu + k\varrho_2(\nu)\} \, . \, Z^2\{\tilde{t}_\nu + l\varrho_2(\nu)\} = \tag{11}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{3}{2\pi^5(k-l)^2} T\ln^5 T + O(MT\ln^4 T), & k \neq l, \\ \dfrac{1}{2\pi^3} T\ln^5 T + O\{(M+1)\,T\ln^4 T\}, & k = l, \end{cases}$$

где

$$\varrho_2(\nu) = \frac{2\pi}{\ln \dfrac{\tilde{t}_\nu}{2\pi}} \tag{12}$$

и k, l, M фиксированы в теореме 1.

Лемма В.

$$\sum_{T \leqq \tilde{t}_\nu \leqq 2T} (-1)^\nu Z^2\{\tilde{t}_\nu + k\varrho_2(\nu)\} \, . \, Z^2\{\tilde{t}_\nu + l\varrho_2(\nu)\} = \tag{13}$$

$$= O\{(M+1)\,T\ln^4 T\} \, .$$

При помощи лемм А и В

доказательство теоремы 1 завершается просто. Действительно, сложением формул (11), (13) мы получаем

$$\sum_{T \leqq \tilde{t}_{2\nu} \leqq 2T} Z^2\{\tilde{t}_{2\nu} + k\varrho_2(2\nu)\} \, . \, Z^2\{\tilde{t}_{2\nu} + l\varrho_2(2\nu)\} = \tag{14}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi^5(k-l)^2} T\ln^5 T + O(MT\ln^4 T), & k \neq l, \\ \dfrac{1}{4\pi^3} T\ln^5 T + O\{(M+1)\,T\ln^4 T\}, & k = l. \end{cases}$$

Поскольку (см. (2), (4), (6), (12))

$$\tilde{t}_{2\nu} = t_\nu \, , \quad \varrho_2(2\nu) = \varrho_1(\nu) \, ,$$

то из (14) следует (5).

Доказательство леммы А помещено в частях 4–6 а доказательство леммы В – в частях 7–9.

3. БИКВАДРАТНЫЙ ЭФФЕКТ И СВЯЗЬ С ТЕОРЕМОЙ КОТЕЛЬНИКОВА-УИТТЕКЕРА-НАЙКВИСТА ИЗ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Из теоремы 1 мы в случае $k = l = M = 0$ получаем

Следствие 2.

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} Z^4(t_\nu) = \frac{1}{4\pi^3} T \ln^5 T + O(T \ln^4 T). \tag{15}$$

Далее, теорема о среднем А. Е. Ингама ([9], ср. [7], стр. 147) гласит

$$\int_T^{2T} Z^4(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi^2} T \ln^4 T + O(T \ln^3 T). \tag{16}$$

Так как (см. (15))

$$\frac{2\pi}{\ln T} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} Z^4(t_\nu) = \frac{1}{2\pi^2} T \ln^4 T + O(T \ln^3 T), \tag{17}$$

то, в силу (16), (17), справедлива

Теорема 2.

$$\int_T^{2T} Z^4(t)\, \mathrm{d}t \sim \frac{2\pi}{\ln T} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} Z^4(t_\nu), \quad T \to \infty. \tag{18}$$

Приведем еще один пример закономерности типа (18). Прежде всего напомним теорему Харди и Литтлвуда о среднем (см. [7], стр. 142):

$$\int_T^{T+U} Z^2(t)\, \mathrm{d}t \sim U \ln T, \quad T \to \infty, \quad U = (\sqrt{T}) \ln T. \tag{19}$$

Имеется также дискретный аналог формулы (19), который получил автор настоящей работы (см. [3], (6), ср. [4], (10), $\bar{H} \to U$, $\tau' = 0$):

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+U} Z^2(t_\nu) \sim \frac{1}{2\pi} \cdot U \ln^2 T, \quad T \to \infty. \tag{20}$$

Из формул (19), (20), немедленно вытекает

Теорема 3.

$$\int_T^{T+U} Z^2(t)\, \mathrm{d}t \sim \frac{2\pi}{\ln T} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+U} Z^2(t_\nu), \quad T \to \infty. \tag{21}$$

Далее напомним некоторые факты из теории информации. При использовании непрерывных сигналов в теории информации основным математическим средством является теорема отсчетов во временном представлении, принадлежащая Котельникову, Уиттекеру и Найквисту. Схему, которой придерживаются в этом направлении радиоинженеры, можно сформулировать как следующее (ср. [8], стр. 81, 86, 96, 97).

Эмпирическое правило. Если длительность сигнала $F(t)$ приближенно составляет T (например $t \in \langle 0, T \rangle$), а его спектр приближенно ограничен частотой W и если $2TW \gg 1$, то функция $F(t)$ с „высокой степенью точности" определяется своими значениями в $2TW$ точках отсчета, отделенных друг от друга расстояниями $1/2W$:

$$(22) \qquad F(t) \approx \sum_{n=0}^{2TW} \frac{\sin(2\pi Wt - n\pi)}{2\pi Wt - n\pi} F\left(\frac{n}{2W}\right), \quad t \in \langle 0, T \rangle,$$

Кроме того

$$(23) \qquad \int_0^T F^2(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{1}{2W} \sum_{n=0}^{2TW} F^2\left(\frac{n}{2W}\right).$$

Величина $1/2W$ называется длиной промежутка Найквиста а интеграл

$$\int_0^T F^2(t)\,\mathrm{d}t$$

квадратичным эффектом.

Замечание 2. Поскольку (см. (8))

$$t_{\nu+1} - t_\nu \sim \frac{2\pi}{\ln T}, \quad T \to \infty$$

для $t_\nu \in \langle T, 2T \rangle$, то можно сказать, что асимптотические формулы (21), (18) выражают соответственно квадратичный (см. (23)) и биквадратный эффекты сигнала, определяемого функцией $Z(t)$ на соответствующих промежутках. Этим эффектам соответствует длина промежутка Найквиста

$$\frac{1}{2W} \sim \frac{2\pi}{\ln T}, \quad T \to \infty.$$

Замечание 3. Отметим, что для функции $Z(t)$ автор доказал в случае

$$\frac{1}{2W} = \frac{2\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}}$$

и аналог равенства (22) в смысле дискретного среднего квадратического.

4. ФОРМУЛА ДЛЯ $Z^2\{\tilde{t}_\nu + k\varrho_2(\nu)\}\, Z^2\{\tilde{t}_\nu + l\varrho_2(\nu)\}$

Мы используем следующую формулу (см. [2], (24))

$$Z^2(t) = 2 \sum_{n \leq t_1} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} \cos\{2\vartheta(t) - t\ln n\} + O(\ln T),$$

$$t_1 = \frac{t}{2\pi}, \quad t \in \langle T, 2T \rangle,$$

где $d(n)$ — число делителей n. Для $\tilde{t}_\nu \in \langle T, 2T \rangle$ мы имеем:

(24) $$Z^2\{\tilde{t}_\nu + k\,\varrho_2(\nu)\} =$$
$$= 2\sum_{n \leqq t_2} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} \cos\{2\vartheta(\tilde{t}_\nu + k\,\varrho_2(\nu)) - \tilde{t}_\nu \ln n - k\,\varrho_2(\nu)\ln n\} +$$
$$+ O(\ln T)\,, \quad t_2 = \frac{\tilde{t}_\nu}{2\pi}\,,$$

где неравенство $n \leqq t_2$ является следствием оценки (см. (6), (12))

$$\frac{\tilde{t}_\nu + k\,\varrho_2(\nu)}{2\pi} - t_2 = \frac{k\,\varrho_2(\nu)}{2\pi} = O\left(\frac{M+1}{\ln T}\right) = o(1)\,.$$

Так как (см. [7], стр. 260)

(25) $$\vartheta'(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad \vartheta''(t) \sim \frac{1}{2t}\,,$$

то очевидно (см. (4))

$$\vartheta(\tilde{t}_\nu + k\,\varrho_2(\nu)) = \vartheta(\tilde{t}_\nu) + \vartheta'(\tilde{t}_\nu)\,k\,\varrho_2(\nu) + O\left\{\frac{(M+1)^2}{T\ln^2 T}\right\} =$$
$$= \frac{\pi}{2}\nu + \frac{1}{2}k\,\varrho_2(\nu)\ln\frac{\tilde{t}_\nu}{2\pi} + O\left(\frac{M+1}{T\ln T}\right),$$

и (см. (12))

(26) $$2\vartheta(\tilde{t}_\nu + k\,\varrho_2(\nu)) = \pi\nu + 2k\pi + O\left(\frac{M+1}{T\ln T}\right), \quad \tilde{t}_\nu \in \langle T, 2T \rangle\,.$$

Поскольку остаточный член в (26) приводит к оценке

$$O\left(\frac{T^{-1/2+\varepsilon}}{\ln T}\right)$$

($0 < \varepsilon$ — сколь угодно малое число) для соответствующей ошибки в сумме (24), то в силу (26),

(27) $$Z^2\{\tilde{t}_\nu + k\,\varrho_2(\nu)\} =$$
$$= 2(-1)^\nu \sum_{n \leqq t_2} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} \cos\{\tilde{t}_\nu \ln n + k\,\varrho_2(\nu)\ln n\} + O(\ln T)\,,$$

для $\tilde{t}_\nu \in \langle T, 2T \rangle$. Следовательно,

(28) $$Z^2\{\tilde{t}_\nu + k\,\varrho_2(\nu)\}\,Z^2\{\tilde{t}_\nu + l\,\varrho_2(\nu)\} = S + R_1 + R_2 + O(\ln^2 T)\,,$$

где

(29) $$S = 2\sum_{n \leqq t_2} \frac{d^2(n)}{n} \cos\{(k-l)\,\varrho_2(\nu)\ln n\} +$$

$$+ 2\sum_{\substack{m,n\leq t_2\\ m\neq n}}\sum \frac{d(m)\,d(n)}{\sqrt{(mn)}}\cos\left\{\tilde{t}_\nu \ln\frac{m}{n} + k\,\varrho_2(\nu)\ln m - l\,\varrho_2(\nu)\ln n\right\} +$$

$$+ 2\sum_{n\leq t_2}\frac{d^2(n)}{n}\cos\{2\tilde{t}_\nu \ln n + (k+l)\,\varrho_2(\nu)\ln n\} +$$

$$+ 2\sum_{\substack{m,n\leq t_2\\ m\neq n}}\sum \frac{d(m)\,d(n)}{\sqrt{(mn)}}\cos\{\tilde{t}_\nu \ln(mn) + k\,\varrho_2(\nu)\ln m + l\,\varrho_2(\nu)\ln n\} =$$

$$= S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

и (см. (27)),

$$R_1 = O\left(\ln T\,.\left|\sum_{n\leq t_2}\frac{d(n)}{\sqrt{n}}\cos\{\tilde{t}_\nu \ln n + k\,\varrho_2(\nu)\ln n\}\right|\right) = \tag{30}$$

$$= O(Z^2\{\tilde{t}_\nu + k\,\varrho_2(\nu)\}\ln T) + O(\ln^2 T)\,,$$

$$R_2 = O(Z^2\{\tilde{t}_\nu + l\,\varrho_2(\nu)\}\ln T) + O(\ln^2 T)\,.$$

5. ГЛАВНЫЙ ЧЛЕН В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ (11)

Справедлива следующая

Лемма 1.

$$\sum_{T\leq\tilde{t}_\nu\leq 2T} S_1 = \begin{cases} \dfrac{3}{2\pi^5(k-l)^2}\,T\ln^5 T + O(T\ln^4 T)\,, & k\neq l\,,\\[2mm] \dfrac{1}{2\pi^3}\,T\ln^5 T + O(T\ln^4 T)\,, & k = l\,. \end{cases} \tag{31}$$

Доказательство. Имеем (см. (29))

$$S_1 = 2S_{11}\,, \tag{32}$$

$$S_{11} = \sum_{n\leq t_2}\frac{d^2(n)}{n}\cos(\alpha\ln n)\,,\quad t_2 = \frac{\tilde{t}_\nu}{2\pi}\,,\quad \alpha = (k-l)\,\varrho_2(\nu)\,.$$

(A) Пусть $k\neq l$, т.е. $\alpha\neq 0$.

Используя суммирование по частям и формулу Рамануджана (см. [9], стр. 296)

$$D(x) = \sum_{n=1}^{x} d^2(n) = \frac{1}{\pi^2}\,x\ln^3 x + O(\ln^2 x)\,,\quad x = \frac{\tilde{t}_\nu}{2\pi}\,,$$

получаем ($D(0) = 0$):

$$S_{11} = \sum_{n=1}^{[x]} \{D(n) - D(n-1)\} \frac{1}{n} \cos(\alpha \ln n) = \tag{33}$$

$$= \sum_{n=1}^{[x]} D(n) \left\{ \frac{\cos(\alpha \ln n)}{n} - \frac{\cos(\alpha \ln(n+1))}{n+1} \right\} + O(\ln^3 x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{[x]} D(n) \int_n^{n+1} \{\cos(\alpha \ln v) + \alpha \sin(\alpha \ln v)\} \frac{dv}{v^2} + O(\ln^3 x) =$$

$$= \int_1^x D(v) \{\cos(\alpha \ln v) + \alpha \sin(\alpha \ln v)\} \frac{dv}{v^2} + O(\ln^3 x) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_1^x \ln^3 v \{\cos(\alpha \ln v) + \alpha \sin(\alpha \ln v)\} \frac{dv}{v} + O(\ln^3 x) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\ln x} \{w^3 \cos(\alpha w) + \alpha w^3 \sin(\alpha w)\} \, dw + O(\ln^3 x) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} F(x, \alpha) + O(\ln^3 x) .$$

Дальше с помощью простого интегривования по частям, мы получаем:

$$F(x, \alpha) = \left\{ \left(\frac{3w^2}{\alpha^2} - \frac{6}{\alpha^4} + \frac{6w}{\alpha^2} - w^3 \right) \cos(\alpha w) + \right. \tag{34}$$

$$\left. + \left(\frac{w^3}{\alpha} - \frac{6w}{\alpha^3} + \frac{3w^2}{\alpha} - \frac{6}{\alpha^3} \right) \sin(\alpha w) \right\}_0^{\ln x} =$$

$$= \left(3 \frac{\ln^2 x}{\alpha^2} - \frac{6}{\alpha^4} \right) \cos(\alpha \ln x) + \left(\frac{\ln^3 x}{\alpha} - 6 \frac{\ln x}{\alpha^3} \right) \sin(\alpha \ln x) +$$

$$+ \frac{6}{\alpha^4} + O(\ln^3 T) = \frac{3}{4\pi^2 (k-l)^2} \ln^4 \frac{\tilde{t}_\nu}{2\pi} + O(\ln^3 T) ,$$

поскольку (см. (12), (32))

$$\alpha \ln x = 2\pi(k - l) .$$

Следовательно (см. (32)–(34))

$$S_1 = \frac{3}{2\pi^4 (k-l)^2} \ln^4 T + O(\ln^3 T) \tag{35}$$

и, так как

$$\sum_{T \le \tilde{t}_\nu \le 2T} 1 = \frac{1}{\pi} T \ln T + O(T) , \tag{36}$$

то в силу (35), (36) получается первое соотношение в (31).

(B) Пусть $k = l$, т.е. $\alpha = 0$.

Полагая $\alpha = 0$ в пятой строке формулы (33), мы в этом случае получаем

$$S_{11} = \frac{1}{4\pi^2} \ln^4 \frac{T}{2\pi} + O(\ln^3 T).$$

Отсюда, в силу (36), получается второе соотношение в (31).

6. ОЦЕНКИ ОСТАТОЧНЫХ ЧЛЕНОВ

6.1. Справедлива следующая

Лемма 2.

$$\sum_{T \leq \tilde{t}_\nu \leq 2T} S_2 = O(T \ln^4 T). \tag{37}$$

Доказательство. Пусть

$$\tilde{t}_k \leq 2T < \tilde{t}_{k+1}, \quad \tau = \max(T, 2\pi n, 2\pi m). \tag{38}$$

Имеем (см. (29))

$$\sum_{T \leq \tilde{t}_\nu \leq 2T} S_2 = 2 \sum_{\substack{m,n \leq \tilde{t}_k/2\pi \\ m \neq n}} \sum \frac{d(m)\, d(n)}{\sqrt{(mn)}} U_2, \tag{39}$$

$$U_2 = \sum_{\tau \leq \tilde{t}_\nu \leq 2T} \cos\left(\tilde{t}_\nu \ln \frac{m}{n} + h_1(\nu)\right),$$

$$h_1(\nu) = k\, \varrho_2(\nu) \ln m - l\, \varrho_2(\nu) \ln n.$$

При помощи преобразований Абеля мы сведем задачу об оценке суммы U_2 к задаче об оценке родственной суммы, изученной нами в работе [2].

Прежде всего,

$$U = U_{21} - U_{22}, \tag{40}$$

$$U_{21} = \sum_{\tau \leq \tilde{t}_\nu \leq 2T} \cos\{h_1(\nu)\} \,.\, \cos\left(\tilde{t}_\nu \ln \frac{m}{n}\right),$$

$$U_{22} = \sum_{\tau \leq \tilde{t}_\nu \leq 2T} \sin\{h_1(\nu)\} \sin\left(\tilde{t}_\nu \ln \frac{m}{n}\right).$$

Достаточно изучить сумму U_{21}. Так как для $\tilde{t}_\nu \in \langle T, 2T \rangle$

$$h_1(\nu) = O(M),$$

то $h_1(\nu) \in \langle -AM, AM \rangle$. Следовательно промежуток $\langle -AM, AM \rangle$ можно подразделить на $O(M)$ подпромежутков, на каждом из которых

$$\text{либо} \quad 0 \leq \cos\{h_1(\nu)\} \leq 1, \quad \text{либо} \quad 0 \leq -\cos\{h_1(\nu)\} \leq 1$$

и последовательности $\cos\{h_1(\nu)\}$, $-\cos\{h_1(\nu)\}$ являются монотонными. Применяя к каждому из этих промежутков преобразование Абеля, мы получаем

$$(41) \qquad |U_{21}| < AM \max_{\substack{\tau_1,\tau_2 \\ \tau\leqq\tau_1<\tau_2\leqq 2T}} \left| \sum_{\tau_1\leqq\tilde{t}_\nu\leqq\tau_2} \cos\left(\tilde{t}_\nu \ln\frac{m}{n}\right)\right| .$$

Конечно, вместо суммы входящей в (41) можно оценивать сумму

$$U_{211} = \sum_{\tau\leqq\tilde{t}_\nu\leqq\tau_1\leqq 2T} \cos\left(\tilde{t}_\nu \ln\frac{m}{n}\right).$$

Но сумма U_{211} оценивается по методу ван дер Корпута, способом [2], (30)–(37) поэтому из (41) вытекает оценка

$$U_{21} = O\left(\frac{(M+1)\ln T}{\left|\ln\frac{m}{n}\right|}\right).$$

Та же самая оценка получается и для U_{22} и, в силу (40), и для U_2 .Теперь из (39) (ср. [2], (38) и (39)), следует (37). Доказательство леммы 2 закончено.

6.2. Аналогичным способом на основании [2], (40)–(59) и [5], (5), (6), получается

Лемма 3.

$$(42) \qquad \sum_{T\leqq\tilde{t}_\nu\leqq 2T} S_4 = O(T\ln^4 T).$$

Далее, аналогичным способом на основании [5], (8)–(12), получается

Лемма 4.

$$(43) \qquad \sum_{T\leqq\tilde{t}_\nu\leqq 2T} S_3 = O(T\ln T).$$

Следовательно, из (29) мы в силу (31), (37), (42), (43), получаем

$$(44) \qquad \sum_{T\leqq\tilde{t}_\nu\leqq 2T} S = \frac{3}{2\pi^5} T\ln^5 T + O(T\ln^4 T).$$

6.3. Теперь мы обратим внимание на остаточные члены в (28). Из формулы Римана-Зигеля

$$Z(t) = 2\sum_{n\leqq t_3} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta(t) - t\ln n\} + O(t^{-1/4}), \quad t_3 = \sqrt{\frac{t}{2\pi}},$$

легко получается оценка

$$(45) \qquad \sum_{T\leqq\tilde{t}_\nu\leqq 2T} Z^2\{\tilde{t}_\nu + k\,\varrho_2(\nu)\} = O(T\ln^2 T).$$

Значит, (см. (30), (36), (45))

(46) $$\sum_{T \leqq \tilde{t}_\nu \leqq 2T} \{R_1 + R_2 + O(\ln^2 T)\} = O(T \ln^3 T).$$

Наконец из (28) мы в силу (44), (46) получаем (11). Доказательство леммы A закончено.

7. ФОРМУЛА ДЛЯ $(-1)^\nu Z^2\{\tilde{t}_\nu + k\varrho_2(\nu)\} Z^2\{\tilde{t}_\nu + l\varrho_2(\nu)\}$ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Прежде всего (см. (28))

(47) $$(-1)^\nu Z^2\{\tilde{t}_\nu + k\,\varrho_2(\nu)\} Z^2\{\tilde{t}_\nu + l\,\varrho_2(\nu)\} =$$
$$= \bar{S} + (-1)^\nu (R_1 + R_2) + O(\ln^2 T),$$

где (см. (29))

(48) $$\bar{S} = (-1)^\nu S_1 + (-1)^\nu S_2 + (-1)^\nu S_3 + (-1)^\nu S_4.$$

В силу соотношения (35) мы немедленно получаем оценку

(49) $$\sum_{T \leqq \tilde{t}_\nu \leqq 2T} (-1)^\nu S_1 = O(T \ln^4 T).$$

Далее мы имеем (см. (29), (38))

$$\sum_{T \leqq \tilde{t}_\nu \leqq 2T} (-1)^\nu S_3 = 2 \sum_{n \leqq \tilde{t}_k/2\pi} \frac{d^2(n)}{n} \,.\, \bar{U}_3,$$

$$\bar{U}_3 = \sum_{\tau \leqq \tilde{t}_\nu \leqq 2T} \cos\{\pi\nu + 2\tilde{t}_\nu \ln n + h_2(\nu)\},$$

$$h_2(\nu) = (k + l)\,\varrho_2(\nu) \ln n.$$

При помощи преобразования Абеля (см. часть 6.1.) оценка суммы $\bar{U}_3$ сводится к оценкам следующим сумм

$$\bar{U}_{311}(r) = \sum_{\tau \leqq \tilde{t}_\nu \leqq \tau_1 \leqq 2T} \cos\left\{\pi\nu + 2\tilde{t}_\nu \ln n - \frac{\pi}{2} r\right\}, \quad r = 0, 1.$$

Эти суммы легко оценироваются с помощью леммы ван дер Корпута со второй производной ([7], стр. 72, 73, Лемма 3), что, аналогично случаю [5], (7)–(12), приводит нас к оценке

(50) $$\sum_{T \leqq \tilde{t}_\nu \leqq 2T} (-1)^\nu S_3 = O(T \ln T).$$

Отметим еще, что (ср. (30), (46), (47))

(51) $$\sum_{T \leqq \tilde{t}_\nu \leqq 2T} \{(-1)^\nu (R_1 + R_2) + O(\ln^2 T)\} = O(T \ln^3 T).$$

Доказательство леммы B основается на следующих двух леммах.

Лемма 5.

(52) $$\sum_{T \leq \tilde{t}_\nu \leq 2T} (-1)^\nu S_2 = O(T \ln^{7/2} T).$$

Лемма 6.

(53) $$\sum_{T \leq \tilde{t}_\nu \leq 2T} (-1)^\nu S_4 = O(T \ln^3 T).$$

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5

Имеем (см. (29), (38), (39))

$$W_2 = \sum_{T \leq \tilde{t}_\nu \leq 2T} (-1)^\nu S_2 = 2 \sum_{\substack{m,n \leq \tilde{t}_k/2\pi \\ m \neq n}}\sum \frac{d(m)\, d(n)}{\sqrt{(mn)}} \bar{U}_2,$$

$$\bar{U}_2 = \sum_{\tau \leq \tilde{t}_\nu \leq 2T} \cos\left\{\pi\nu - \tilde{t}_\nu \ln \frac{m}{n} - h_1(\nu)\right\}.$$

Напомним теперь, что последовательность $\{g_\nu\}$ определена соотношением (см. [6], (6))

(55) $$\vartheta_1(g_\nu) = \frac{\pi}{2}\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

где

(56) $$\vartheta_1(t) = \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}, \quad \vartheta_1'(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi}, \quad \vartheta_1''(t) = \frac{1}{2t}$$

и (см. (1))

(57) $$\vartheta(t) = \vartheta_1(t) + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Из сравнения асимптотических соотношений для $\vartheta'(t)$, $\vartheta''(t)$ (см. (25)) с точными соотношениями (56) следует, что при оценивании суммы $\bar{U}_2$ более удобно работать с родственной последовательностью $\{g_\nu\}$.

Сначала мы оценим разность $\tilde{t}_\nu - g_\nu$. В силу (4), (55), (57) мы получаем

$$O\left(\frac{1}{\tilde{t}_\nu}\right) = \vartheta_1(\tilde{t}_\nu) - \vartheta_1(g_\nu) = (\tilde{t}_\nu - g_\nu)\, \vartheta_1'(T_\nu),$$

где $T_\nu \in (g_\nu, \tilde{t}_\nu)$ или $T_\nu \in (\tilde{t}_\nu, g_\nu)$. Следовательно (см. (56)),

(58) $$\tilde{t}_\nu - g_\nu = O\left(\frac{1}{T \ln T}\right), \quad \tilde{t}_\nu \in \langle T, 2T \rangle.$$

В силу (36), (58) теперь из (54) вытекает

(59) $$\bar{U}_2 = \bar{U}_{21} + O(\ln T),$$

$$\bar{U}_{21} = \sum_{\tau \leq g_\nu \leq 2T} \cos\left\{\pi\nu - g_\nu \ln\frac{m}{n} - h_1(\nu)\right\}.$$

Далее при помощи преобразованием Абеля (см. часть 6.1.), оценка суммы $\bar{U}_{21}$ сводится к оценке сумм:

$$\bar{U}_{211}(r) = \sum_{\tau \leqq g_\nu \leqq \tau_1 \leqq 2T} \cos\{2\pi\, \Phi_2(\nu)\}\,, \quad r = 0, 1\,, \tag{60}$$

где

$$\Phi_2(\nu) = \frac{\nu}{2} - \frac{g_\nu}{2\pi} \ln \frac{m}{n} - \frac{r}{4}\,. \tag{61}$$

Пусть $m > n$. Так как (см. (55))

$$\frac{\mathrm{d}g_\nu}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\pi}{2\vartheta_1'(g_\nu)} = \frac{\pi}{\ln \frac{g_\nu}{2\pi}}\,, \tag{62}$$

(здесь, как и в других аналогичных местах предполагается, что g_ν определено соотношением (55) для всех $\nu \geqq 1$), то

$$\Phi_2'(\nu) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \ln \frac{g_\nu}{2\pi}} \ln \frac{m}{n}\,, \quad \Phi_2''(\nu) > 0\,. \tag{63}$$

Так как очевидно

$$0 < \frac{1}{2 \ln \frac{g_\nu}{2\pi}} \ln \frac{m}{n} \leqq \frac{\ln m}{2 \ln \frac{T}{2\pi}} \leqq \frac{\ln \frac{T}{\pi}}{2 \ln \frac{T}{2\pi}} < \frac{1}{2} + \varepsilon\,,$$

то

$$|\Phi_2'(\nu)| < \tfrac{1}{2}\,,$$

и, следовательно, (см. [7], стр. 78, Лемма 2), можно перейти от суммы (60) к интегралу:

$$\bar{U}_{211}(r) = \int_{\tau \leqq g_\nu \leqq \tau_1} \cos\{2\pi\, \Phi_2(\nu)\}\, \mathrm{d}\nu + O(1)\,.$$

Далее, поскольку $\Phi_2'(\nu)$ возрастает (см. (63)), то

$$\Phi_2'(\nu) \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \ln \frac{\tau}{2\pi}} \ln \frac{m}{n} = \frac{1}{2 \ln \frac{\tau}{2\pi}} \ln \frac{\tau n}{2\pi m}\,, \quad g_\nu \in \langle \tau, \tau_1 \rangle\,.$$

Пусть $n \geqq 2$. Если $2\pi m > T$, то $\tau = 2\pi m$ (см. (38)) и

$$\Phi_2'(\nu) \leqq \frac{\ln 2}{2 \ln \tau} \leqq \frac{A}{\ln T}\,.$$

Если $T \geqq 2\pi m$, то $\tau = T$ и

$$\Phi_2'(v) \geqq \frac{1}{2\ln\frac{T}{2\pi}}\ln\frac{Tn}{2\pi m} \geqq \frac{\ln 2}{2\ln\frac{T}{2\pi}} > \frac{A}{\ln T}.$$

Значит, в случае $m > n \geqq 2$ мы получаем следующую оценку для $\bar{U}_{211}(r)$ (по лемме с первой производной, см. [7], стр. 73, Лемма 1):

$$\bar{U}_{211}(r) = O(\ln T).$$

Следовательно, для $\bar{U}_2$ (см. (59), ср. (41)) имеет место оценка

$$\bar{U}_2 = O\{(M+1)\ln T\}.$$

Для соответствующей части W_{21} $(m > n \geqq 2)$ суммы W_2 мы теперь получаем оценку

$$W_{21} = O\left\{(M+1)\ln T \cdot \sum_{m,n\leqq T}\sum \frac{d(m)\,d(n)}{\sqrt{(mn)}}\right\} = O\{(M+1)\,T\ln^3 T\}, \tag{64}$$

где использована оценка (см. [9], стр. 297, 298)

$$\sum_{m,n\leqq x}\sum \frac{d(m)\,d(n)}{\sqrt{(mn)}} = O(x\ln^2 x) \tag{65}$$

Пусть $n = 1$. Так как (см. (62), (63); $m \geqq 2$)

$$\Phi_2''(v) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln m}{g_v \ln^3\frac{g_v}{2\pi}} > \frac{A}{T\ln^3 T},$$

то, по лемме со второй производной, мы получаем

$$\bar{U}_{211}(r; n = 1) = O((\sqrt{T})\ln^{3/2} T),$$

т.е. (см. (59))

$$\bar{U}_2(n = 1) = O\{(M+1)(\sqrt{T})\ln^{3/2} T\}.$$

Следовательно, для соответствующей части суммы W_{22} (см. (54)) мы получаем

$$W_{22} = O\left\{(M+1)\sqrt{(T)}\ln^{3/2} T\sum_{n\leqq T}\frac{d(n)}{\sqrt{n}}\right\} = \tag{66}$$

$$= O\left\{(M+1)(\sqrt{T})\ln^{3/2} T(\sqrt{T})\left(\sum_{n\leqq T}\frac{d^2(n)}{n}\right)^{1/2}\right\} = O(M+1)\,T\ln^{7/2} T\},$$

так как (см. [9], стр. 296)

$$\sum_{n\leqq x}\frac{d^2(n)}{n} = \frac{1}{4\pi^2}\ln^4 x + O(\ln^3 x).$$

Значит, в случае $m > n$ имеет место (см. (64), (66)

$$W_2(m > n) = O\{(M+1)\,T\ln^{7/2} T\}. \tag{67}$$

Пусть теперь $n > m$. В этом случае (см. (61))

$$2\pi\, \Phi_2(v) = \pi v - g_v \ln \frac{m}{n} - \frac{\pi}{2} r = \pi v + g_v \ln \frac{n}{m} - \frac{\pi}{2} r =$$

$$= 2\pi v - 2\pi \left(\frac{v}{2} - \frac{g_v}{2\pi} \ln \frac{n}{m} + \frac{r}{4}\right) = 2\pi v - 2\pi\, \tilde{\Phi}_2(v)$$

т.е. и в этом случае получается оценка

$$W_2(n > m) = O\{(M + 1)\, T \ln^{7/2} T\}\,. \tag{68}$$

Наконец, в силу (67), (68) из (54) следует (52).

9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6

Имеем (см. (29), (38))

$$W_4 = \sum_{T \leqq \tilde{t}_v \leqq 2T} (-1)^v S_4 = 2 \sum_{\substack{m,n \leqq \tilde{t}_k/2\pi \\ m \neq n}}\sum \frac{d(m)\, d(n)}{\sqrt{(mn)}}\, \bar{U}_4\,, \tag{69}$$

$$\bar{U}_4 = \sum_{\tau \leqq \tilde{t}_v \leqq 2T} \cos\{\pi v - \tilde{t}_v \ln(mn) - h_3(v)\}\,,$$

$$h_3(v) = k\, \varrho_2(v) \ln m + l\, \varrho_2(v) \ln n\,.$$

Аналогично случаю (59), (60), оценка суммы $\bar{U}_4$ сводится к оценкам следующих сумм:

$$\bar{U}_{411}(r) = \sum_{\tau \leqq g_v \leqq \tau_1 \leqq 2T} \cos\{2\pi\, \Phi_4(v)\} + O(\ln T)\,, \quad r = 0, 1\,,$$

где

$$\Phi_4(v) = \frac{v}{2} - \frac{g_v}{2\pi} \ln (mn) + \frac{r}{4}\,.$$

Прежде всего

$$\Phi_4'(v) = \frac{1}{2} - \frac{\ln(mn)}{2 \ln \frac{g_v}{2\pi}}\,, \quad \Phi_4''(v) > 0\,. \tag{70}$$

Так как

$$0 < \frac{\ln(mn)}{2 \ln \frac{g_v}{2\pi}} \leqq \frac{\ln \left(\frac{T}{\pi}\right)^2}{2 \ln \frac{T}{2\pi}} < 1 + \varepsilon\,,$$

то

$$|\Phi_4'(v)| \leqq \tfrac{1}{2} + \varepsilon\,.$$

Следовательно,

$$\overline{U}_{411}(r) = \int_{\tau \leqq g_v \leqq \tau_1} \cos\{2\pi\, \Phi_4(v)\}\, \mathrm{d}v + O(\ln T)\,. \tag{71}$$

9.1. Пусть $mn < T/2\pi$. Тогда $\tau = T$ и, поскольку $\Phi_4'(v)$ возрастает (см. (70),

$$\Phi_4'(v) \geqq \frac{1}{2} - \frac{\ln(mn)}{2\ln\frac{T}{2\pi}} = \frac{1}{2\ln Q_1} \cdot \ln\frac{Q_1}{mn} > 0\,, \quad Q_1 = \frac{T}{2\pi}\,,$$

$$mn < Q_1\,, \quad g_v \in \langle T, \tau_1\rangle\,.$$

Применив теперь лемму с первой прлизводной, мы получим оценку (см. (71)

$$\overline{U}_{411}(r;\, mn < Q_1) = O\left(\frac{\ln T}{\ln\frac{Q_1}{mn}}\right). \tag{72}$$

Если предположить, что

$$mn < \frac{T}{2\pi} - \alpha_1 < \frac{T}{2\pi}\,,$$

где $0 < \alpha_1$ – подходящее число, то вклад $\overline{W}$ в сумму W_4 (см. (69)) значений m, n удовлетворяющих условию

$$\frac{T}{2\pi} - \alpha_1 \leqq mn < \frac{T}{2\pi}$$

составляет

$$\overline{W} = O\left(\frac{T^{2\varepsilon}}{\sqrt{T}} \cdot \alpha_1 T^{\varepsilon}\, T \ln T\right) = O(T^{1/2 + 4\varepsilon})\,.$$

Замечание 4. Так как, очевидно, можно предположить, что Q_1 в (72) – целое число (это предположение используется и в других аналогичных случаях), то

$$W_{41} = W_4(mn < T/2\pi) = O(T^{1/2+4\varepsilon}) + \overline{W}_{41}(mn < Q_1)\,, \tag{73}$$

где (см. (69), (72))

$$\overline{W}_{41} = O\left\{(M+1)(\ln T) \sum_{mn < Q_1}\sum \frac{d(m)\, d(n)}{\sqrt{(mn)}\ln\frac{Q_1}{mn}}\right\} = \tag{74}$$

$$= O\left\{(M+1)\, T^{2\varepsilon}(\ln T) \sum_{mn < Q_1}\sum \frac{1}{\sqrt{(mn)}\ln\frac{Q_1}{mn}}\right\} =$$

$$= O\left\{(M+1)\,T^{3\varepsilon}(\ln T)\sum_{q<Q_1}\frac{1}{(\sqrt{q})\ln\dfrac{Q_1}{q}}\right\} =$$

$$= O\{(M+1)\,T^{3\varepsilon}(\ln T)(\sqrt{Q_1})\ln Q_1\} = O\{(M+1)\,T^{1/2+4\varepsilon}\}\,.$$

Значит (см. (73), (74)),

(75) $$W_{41} = O\{(M+1)\,T^{1/2+4\varepsilon}\}\,.$$

9.2. Пусть $mn > T/\pi$. Так как $g_\nu \leqq 2T$, то (см. (70))

$$-\Phi_4'(\nu) = \frac{\ln(mn)}{2\ln\dfrac{g_\nu}{2\pi}} - \frac{1}{2} > 0$$

и $\{-\Phi_4'(\nu)\}$ убывает. Следовательно,

$$-\Phi_4'(\nu) \geqq \frac{\ln(mn)}{2\ln\dfrac{T}{2\pi}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\ln Q_2}\ln\frac{mn}{Q_2}\,, \quad Q_2 = \frac{T}{2\pi}\,,$$

и (ср. (72))

$$\bar{U}_{411}\left(r;\, mn > \frac{T}{\pi}\right) = O\left(\frac{\ln T}{\ln\dfrac{mn}{Q_2}}\right)$$

для $mn > Q_2$. Положим

(76) $$W_{42} = W_4(mn > T/\pi) =$$
$$= W_{421}(Q_2 < mn < 2Q_2) + W_{422}(2Q_2 \leqq mn)\,.$$

Прежде всего, как и в 9.1., мы получаем оценку

(77) $$W_{421} = O\{(M+1)\,T^{1/2+4\varepsilon}\}\,;$$

здесь использована обычная оценка

$$\sum_{Q_2<r<2Q_2}\frac{1}{(\sqrt{q})\ln\dfrac{q}{Q_2}} = O((\sqrt{Q_2})\ln Q_2)\,.$$

Далее, поскольку

$$\ln\frac{mn}{Q_2} \geqq \ln 2\,, \quad mn \geqq 2Q_2\,,$$

то, в силу (65),

$$W_{422} = O\left\{(M+1)(\ln T)\sum_{m,n \leqq T/\pi}\sum \frac{d(m)\,d(n)}{\sqrt{(mn)}}\right\} = \tag{78}$$

$$= O\{(M+1)\, T \ln^3 T\}\,.$$

Теперь (см. (76)—(78))

$$W_{42} = O\{(M+1)\, T \ln^3 T\}\,. \tag{79}$$

9.3. Пусть

$$\frac{T}{2\pi} \leqq mn \leqq \frac{T}{\pi}\,. \tag{80}$$

Так как $g_\nu \in \langle T, 2T \rangle$, то в случае (80) функция $\Phi_4'(\nu)$ (см. (70)) имеет единственный корень нечетного порядка $\bar{\nu}$ (поскольку $\Phi_4'(\nu)$ возрастает).

9.3.1. Если $\tau \leqq g_{\bar{\nu}} \leqq \tau_1$, то (см. (71))

$$\bar{U}_{411}(r) = \int_{\tau \leqq g_\nu \leqq g - A_1} + \int_{g + A_2 \leqq g_\nu \leqq \tau_1} + O(1) + O(\ln T) = \tag{81}$$

$$= \bar{U}_{411}^1(r) + \bar{U}_{411}^2(r) + O(\ln T)\,,$$

с очевидными изменениями при $g_{\bar{\nu}} = \tau,\ \tau_1$ ($0 < A_1, A_2$ — подходящие постоянные).

Прежде всего мы оценим вклад W_{43} члена $\bar{U}_{411}^1(r)$ в сумму W_4. Так как $0 < -\Phi_4'(\nu)$ убывает для $g_\nu \leqq g_{\bar{\nu}} - A_1$, то

$$-\Phi_4'(\nu) \geqq \frac{1}{2 \ln \dfrac{g_{\bar{\nu}} - A_1}{2\pi}} \ln \frac{2\pi mn}{g_{\bar{\nu}} - A_1} > 0\,, \quad mn > \frac{g_{\bar{\nu}} - A_1}{2\pi}$$

и, следовательно,

$$\bar{U}_{411}^1(r) = O\left(\frac{\ln T}{\ln \dfrac{mn}{Q_3}}\right), \quad \frac{g_{\bar{\nu}} - A_1}{2\pi} = Q_3 < mn \leqq \frac{T}{\pi} \leqq 2Q_3\,,$$

где Q_3 — целое число (см. замечание 4). Значит, способом 9.2. мы получаем оценку

$$W_{43} = O\{(M+1)\, T^{1/2+\varepsilon}\}\,. \tag{82}$$

Далее мы оценим вклад W_{44} члена $\bar{U}_{411}^2(r)$ в сумму W_4. Так как $0 < \Phi_4(\nu)$

возрастает для $g_\nu \geqq g_{\bar\nu} + A_2$, то

$$\Phi'_4(\nu) \geqq \frac{1}{2\ln\frac{g_{\bar\nu}+A_2}{2\pi}} \ln\frac{g_{\bar\nu}+A_2}{2\pi mn} > 0\,, \quad mn < \frac{g_{\bar\nu}+A_2}{2\pi}\,,$$

и, следовательно,

$$\bar U^2_{411}(r) = O\left(\frac{\ln T}{\ln\frac{Q_4}{mn}}\right), \quad mn < Q_4 = \frac{g_{\bar\nu}+A_2}{2\pi}\,,$$

где Q_4 – целое число (см. замечание 4). Значит, способом 9.1. мы получим оценку

(83) $$W_{44} = O\{(M+1)\,T^{1/2+4\varepsilon}\}\,.$$

Члену $O(\ln T)$ в (81) соотвествует

(84) $$W_{45} = O\left\{(M+1)(\ln T)\sum_{T/2\pi\leqq mn\leqq T/\pi}\sum \frac{d(m)\,d(n)}{\sqrt{(mn)}}\right\} =$$

$$= O\left\{(M+1)(\ln T)\frac{T^{2\varepsilon}}{\sqrt{T}}\,.\,T^\varepsilon\,.\,T\right\} = O\{(M+1)\,T^{1/2+4\varepsilon}\}\,.$$

9.3.2. Если $\tau_1 < g_{\bar\nu} \leqq T/\pi$, то, аналогично случаю $\overline{W}_{41}$ (см. 9.1.), получается оценка

(85) $$W_{46} = O\{(M+1)\,T^{1/2+4\varepsilon}\}\,.$$

Теперь, достаточно использовать (75), (79), (82)–(85), чтобы получить (53), чем доказательство леммы 6 закончено.

Наконеч мы завершим и доказательство леммы B. Прежде всего, из (48) мы в силу (49), (50), (52) и (53), получаем

(86) $$\bar S = O\{(M+1)\,T\ln^4 T\}\,.$$

Теперь в силу (51) и (86), из (47) следует (13).

10. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Наконец мы упомянем о некоторых дальнейших классах формул, следующих из теоремы 1.

10.1. Например, ряду Эйлера

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

где $N^2 \leqq M + 1$, соответствует класс формул:

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} Z^2(t_\nu) \sum_{n=1}^{N} Z^2\{t_\nu \pm n\, \varrho_1(\nu)\} \sim \frac{1}{8\pi^3} T \ln^5 T, \quad T \to \infty,$$

при любом случайном распределении знаков $\pm$.

10.2. В связи с дискретным аналогом явления Харди и Литтлвуда, который мы доказали в работе [6], стр. 23:

$$\frac{1}{Q_1} \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} \left\{ \frac{1}{\overline{M} + 1} \sum_{n=0}^{\overline{M}} Z(g_\nu + n\omega) \right\}^2 \leqq A \frac{\ln T}{\overline{M}}, \quad T \to \infty,$$

где

$$Q_1 = \sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} 1, \quad U = T^{5/12} \psi \ln^3 T, \quad \ln T < \overline{M} < \sqrt[3]{(\psi)} \ln T,$$

$$\omega = \frac{\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}},$$

из формулы (5) следует более сложный – биквадратный – аналог явления Харди и Литтлвуда:

$$\frac{1}{Q} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{M} Z^2(t_\nu + n\, \varrho_1(\nu)) \right\}^2 \sim \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\ln^4 T}{M}, \quad T \to \infty$$

где

$$Q = \sum_{T \leqq t_\nu \leqq 2T} 1, \quad \varrho_1(\nu) = \frac{2\pi}{\ln \frac{t_\nu}{2\pi}}.$$

10.3. Пусть φ_n, $n = 1, \ldots, [t_1]$ – независимые случайные величины, равномерно распределенные в промежутке $\langle -\pi, \pi \rangle$. Пусть далее $Z_\varphi^2(t)$ – случайный процесс, порожденный фазовой модуляцией случайным вектором $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{[t_1]})$ главного члена в формуле для $Z^2(t)$:

$$Z_\varphi^2(t) = 2 \cdot \sum_{n \leqq t_1} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} \cos\{2\vartheta(t) - t \ln n + \varphi_n\}, \quad t_1 = \frac{t}{2\pi}. \tag{87}$$

В этом случае, формула (5), (и все следствия из нее), справедлива для класса всех реализаций $Z_{\bar\varphi}^2(t)$ случайного процесса (87), соответствующих всем возможным векторам

$$\bar\varphi = (\bar\varphi_1, \ldots, \bar\varphi_{[t_1]}).$$

Литература

[1] *Мозер, Ян.:* Об одной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Arith. *31* (1976), 31–43.

[2] *Мозер, Ян.:* Доказательство гипотезы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана, Acta Arith. *36* (1980), 147—156.

[3] *Мозер, Ян.:* Арифметический аналог одной формулы Харди и Литтлвуда в теории дзета-функции Римана, Acta F.R.N. Comen. — Mathematica, *37* (1980), 109—120.

[4] *Мозер, Ян.:* Об одной квазиортогональной системе векторов в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., *38* (1981), 87—97.

[5] *Мозер, Ян.:* Об одной биквадратной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Math. Univ. Comen., Vol. *42—43* (1983), 35—39.

[6] *Мозер, Ян.:* Улучшение теоремы Харди-Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Acta Arith. *43* (1983), 21—47.

[7] *Титчмарш, Е. К.:* Теория дзета-функции Римана, ИЛ, Москва 1953.

[8] *Голдман, С.:* Теория информации, ИЛ, Москва 1957.

[9] *Ingham, A. E.:* Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function, Proc. London Math. Soc. (2) *27* (1926), 273—300.

[10] *Siegel, C. L.:* Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Math., Astr. und Physic, Abt. B: Studien, *2* (1932), 45—80.

[11] *Titchmarsh, E. C.:* On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (IV), Quart. J. Math. *5* (1934), 98—105.

Адрес автора: 842 15 Bratislava, Mlynská dolina, Czechoslovakia (Katedra matematickej analýzy MFF UK).