Czechoslovak Mathematical Journal

Sergei A. Gurchenkov

К трем вопросам теории l-многообразий

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 41 (1991), No. 3, 405–410

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102474

Czechoslovak Mathematical Journal, 41 (116) 1991, Praha

К ТРЕМ ВОПРОСАМ ТЕОРИИ l-МНОГООБРАЗИЙ

С. А. ГУРЧЕНКОВ, Рубцовск

(Поступило в редакцию 1[ого] февраля 1989 г.)

Многообразие решеточно упорядоченных групп $\mathfrak{M}$ называется делимым l-многообразием, если любая l-группа G из $\mathfrak{M}$ вложима в качестве l-подгруппы в полную (делимую) l-группу G^* из многообразия $\mathfrak{M}$. Вопрос о классификации делимых l-многообразий отмечался в [1]. Хорошо известно, что многообразие абелевых l-групп $\mathfrak{A}_l$, многообразия $\mathfrak{N}_n$ всех нильпотентных ступени нильпотентности не выше n решеточно упорядоченных групп, многообразие L всех l-групп являются делимыми (см., например, [2]). С другой стороны, несложно понять, что любое l-многообразие $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}_l$, в котором о-аппроксимируемые l-группы абелевы, не является делимым. Действительно, как показано в [3], [4], в l-многообразии $\mathfrak{B}$ для некоторого натурального n справедливо тождество $[x^n, y^n] = e$. А любая полная l-группа с тождеством $[x^n, y^n] = e$ очевидно коммутативна. В этой заметке мы покажем существование как континуального числа делимых многообразий нильпотентных (ступени 2) решеточно упорядоченных групп, так и континуального числа многообразий нильпотентных (ступени 3) решеточно упорядоченных групп, каждое из которых не является делимым. Попутно получаем еще одно решение вопроса о мощности решетки многообразий нильпотентных ступени 2 решеточно упорядоченных групп из [5]. Отметим, что в отличии от [6], все многообразия этой континуальной серии имеют конечных аксиоматический ранг. В заключение будет показано, что базисный ранг многообразия всех жестко упорядоченных l-групп равен двум. Ранее были вычислены базисные ранги многообразий всех l-групп, нормальнозначных l-групп и о-аппроксимируемых l-групп (см. [7], [8]). Вопрос о вычислении базисного ранга многообразия жестко упорядоченных l-групп отмечался в [7], [9].

Для переменных x, y, z_1, z_2, z_3, z_4 и целых положительных чисел n, m введем в рассмотрение следующие слова сигнатуры l-группы:

$$u_1 = |[x, y]| \wedge |z_1|\,,$$
$$u_{i+1} = (|[x, u_i]| \vee |[y, u_i]|) \wedge |z_{i+1}|\,, \quad i = 1, 2, 3\,,$$
$$u_{i+1} = |[x, u_i]| \vee |[y, u_i]|\,, \quad i = 4, 5\,,$$

$$v = \|[x, u_2]\|^{-1} u_4 \wedge \|[y, u_1]\|^{-1} u_3 \wedge u_6 \wedge x \wedge y ,$$
$$u = \|[x, u_2]\|^{-1} u_4 \wedge \|[y, u_1]\|^{-1} u_3 \wedge x \wedge y ,$$
$$v_{n,m} = (v \wedge xy^{-1} \wedge \|[x, u_3]\|^{-n} \|[y, u_3]\|^{m}) \vee e ,$$
$$u_{n,m} = (u \wedge xy^{-1} \wedge \|[x, u_3]\|^{-n} \|[y, u_3]\|^{m}) \vee e .$$

Через H обозначаем группу

$$\text{гр}(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4 \| [a_2, b_1] = [a_1, b_2] =$$
$$= [[a_i, b_k], [a_j, b_s]] = [a_1, b_4, a_2] = [a_1, b_4, a_1, a_j] =$$
$$= [a_1, a_2, a_j] = [a_1, b_4, a_1, b_k] = [a_1, a_2, b_k] = [b_k, b_s] =$$
$$= [a_j, b_s, b_k] = [b_t, a_i, a_j] = [a_2, b_4, a_j] = e ,$$
$$i, j = 1, 2 ; \quad t = 1, 2, 3 ; \quad k, s = 1, 2, 3, 4) .$$

В группе H рассмотрим систему подгрупп

$$(1) \qquad H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset H_4 \supset H_5 \supset H_6 \supset H_7 = E ,$$

где

$$H_1 = \text{гр}(\{[a_1, a_2], b_1, b_2, b_3, b_4\}^H) ,$$
$$H_2 = \text{гр}(\{[a_1, b_1], b_2, b_3, b_4\}^H) ,$$
$$H_3 = \text{гр}(\{[a_2, b_2], b_3, b_4\}^H) ,$$
$$H_4 = \text{гр}(\{[a_1, b_3], [a_2, b_3]\}^H) ,$$
$$H_5 = \text{гр}(\{[a_1, b_4], [a_2, b_4]\}^H) ,$$
$$H_6 = \text{гр}(\{[a_1, b_4, a_1], [a_2, b_4]\}^H) .$$

Через K обозначаем подгруппу гр$(a_1, a_2, b_3, b_2, b_1)$ группы H и пусть $K_i = K \cap H_i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Из определяющих соотношений группы H легко получается

Лемма 1. а) *Группа H нильпотентна ступени* 3.

б) *Группа K нильпотентна ступени* 2.

в) *Система подгрупп $\{H_i\}$ группы H является центральной системой с факторами без кручения.*

г) *Система подгрупп $\{K_i\}$ группы K является центральной системой с факторами без кручения.*

д) *Подгруппы H_1, K_1 группы H абелевы.*

Хорошо известно (см., например, [2, глава 6, § 2, следствие 1]), что на нильпотентной группе H можно ввести жесткие линейные порядки, при которых система выпуклых подгрупп будет совпадать с системой (1). Для этого достаточно указать вложения φ_i: $H_i/H_{i+1} \to R$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, где R аддитивная группа вещественных чисел с их естественным порядком. Для элемента g из H

считаем $g \geqq e$ при порядке $P(\varphi)$, где $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$, если и только если $\varphi_i(gH_{i+1}) > 0$ в R, где $g \in H_i \setminus H_{i+1}$.

Далее будем рассматривать на группе H лишь такие линейные порядки $P(\varphi)$, при которых в H справедливы неравенства

$$a_1 > a_2 \gg [a_1, a_2] > b_1 \gg [a_1, b_1] > b_2 \gg [a_2, b_2] >$$
$$> b_3 \gg [a_1, b_3] > b_4 \; ; \quad [a_2, b_3] > b_4 > e \; ;$$
$$[a_1, b_4] \gg [a_1, b_4, a_1] > e \; ; \quad [a_1, b_4] \gg [a_2, b_4] > e \; .$$

Для краткости далее будем использовать обозначения

$$\alpha_i = \varphi_0(a_i H_1)\,, \quad \gamma_i = \varphi_3([a_i, b_3]\, H_4)\,, \quad i = 1, 2\,,$$
$$\beta_1 = \varphi_6([a_1, b_4, a_1]\, H_7)\,, \quad \beta_2 = \varphi_6([a_2, b_4]\, H_7)\,.$$

Предложение 1. *Пусть в л.у. группе H с линейным порядком $P(\varphi)$ при некоторых значениях переменных x, y, z_i, справедливо строгое неравенство $v > e$. Тогда для подходящих целых $t_j, s, t_j > 0$, $s \neq 0$, $j = 1, 2$, и подходящих элементов $d_1, d_2 \in H_1$, $c_1, c_2 \in H_5$ справедливы равенства $x = a_1^{t_1} d_1$, $y = a_2^{t_2} d_2$, $|[x, u_3]| = |[a_1^{t_1}, b_3^s]|\, c_1$,*

$$|[y, u_3]| = |[a_2^{t_2}, b_3^s]|\, c_2\,.$$

Доказательство предложения вполне аналогично доказательству леммы 10 из [3].

Предложение 2. а) *В л.у. группе H с линейным порядком $P(\varphi)$ тождество $v_{n,m} = e$ справедливо если и только если $\alpha_1\gamma_2/\alpha_2\gamma_1 \leqq n/m$.*

б) *В л.у. группе K с линейным порядком $K \cap P(\varphi)$ тождество $u_{n,m} = e$ справедливо если и только если $\alpha_1\gamma_2/\alpha_2\gamma_1 \leqq n/m$.*

Доказательство. Покажем а). Пусть сначала $\alpha_1\gamma_2/\alpha_2\gamma_1 \leqq n/m$. При проверке тождества $v_{n,m} = e$ будем рассматривать лишь нетривиальный случай, т.е. такие значения переменных x, y, z_i, при которых в группе H справедливо $v > e$, $xy^{-1} > e$. Но тогда, по предложению 1, имеем $x = a_1^{t_1} d_1$, $y = a_2^{t_2} d_2$,

$$|[x, u_3]| = |[a_1^{t_1}, b_3^s]|\, c_1\,, \quad |[y, u_3]| = |[a_2^{t_2}, b_3^s]|\, c_2\,,$$

где $s \neq 0, t_1 > 0, t_2 > 0$. Если при этом в H справедливо $|[x, u_3]|^{-n} \cdot |[y, u_3]|^m > e$, то в группе R необходимо получаем неравенства

$$\alpha_1 t_1 > \alpha_2 t_2\,; \quad -\gamma_1 t_1 |s|\, n + \gamma_2 t_2 |s|\, m > 0\,.$$

Откуда имеем $\alpha_1/\alpha_2 > t_2/t_1 > \gamma_1 n/\gamma_2 m$. Следовательно, $\alpha_1\gamma_2/\alpha_2\gamma_1 > n/m$. Противоречие.

Пусть теперь справедливо $\alpha_1\gamma_2/\alpha_2\gamma_1 > n/m$. Выберем целые положительные числа t_1, t_2 так, что $\alpha_1/\alpha_2 > t_2/t_1 > \gamma_1 n/\gamma_2 m$. Полагая в группе H $x = a_1^{t_1}$, $y = a_2^{t_2}$, $z_i = b_i$, непосредственной проверкой в группе H получаем $v_{n,m} > e$. Утверждение а) доказано.

Для доказательства б) лишь отметим, что в л.у. группе K справедлив следующий аналог предложения 1: если значения переменных x, y, z_i в группе K таковы, что справедливо неравенство $u > e$, то имеют место представления $x = a_1^{t_1} d_1$, $y = a_2^{t_2} d_2$, $|[x, u_3]| = |[a_1^{t_1}, b_3^s]|$, $|[y, u_3]| = |[a_2^{t_2}, b_3^s|$, где $d_1, d_2 \in K_1$, $s \neq 0$, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

Предложение доказано.

Для вещественного числа α, $\alpha > 0$, пусть

$$U_\alpha = \mathrm{var}_l\{u_{n,m} = e \mid n, m \in N,\ n/m \geqq \alpha\} \wedge \mathfrak{N}_2\,,$$
$$W_\alpha = \mathrm{var}_l\{v_{n,m} = e \mid n, m \in N,\ n/m \geqq \alpha\} \wedge \mathfrak{N}_3\,.$$

Из изложенного выше несложно вытекает

Теорема 1. а) $U_\alpha \neq U_\beta$, $W_\alpha \neq W_\beta$ *при* $\alpha \neq \beta$.

б) *Для* $\alpha \in R \setminus Q$ *l-многообразия* U_α, W_α *не имеют конечного базиса тождеств.*

Справедлива также

Теорема 2. *Существует континуум многообразий нильпотентных решеточно упорядоченных групп, каждое из которых не является делимым.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in R$, $\alpha > \beta > 0$. Через H_α обозначим группу H с линейным порядком $P(\varphi)$, при котором $\alpha = \alpha_1\gamma_2/\alpha_2\gamma_1$, $\alpha_1/\alpha_2 \leqq \beta_1/\beta_2$, а через H_β — группу H с линейным порядком $P(\varphi)$ при котором $\beta = \alpha_1\gamma_2/\alpha_2\gamma_1$, $\alpha_1/\alpha_2 \leqq \leqq \beta_1/\beta_2$. Как следует из [3, теорема 9], l-многообразия $\mathrm{var}_l(H_\beta)$, $\mathrm{var}_l(H_\alpha)$ в этом случае не являются делимыми. А по предложению 2 имеем $\mathrm{var}_l(H_\alpha) \neq \mathrm{var}_l(H_\beta)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Существует континуум многообразий нильпотентных решеточно упорядоченных групп, каждое их которых является делимым.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in R$, $\alpha > \beta > 0$. Через K_α обозначаем группу K, с линейным порядком, индуцированным линейным порядком группы H_α. По предложению 2 имеем $K_\alpha \in U_\alpha \setminus U_\beta$. Предположим теперь, что l-многообразие U_α не является делимым. Тогда, очевидно, найдется л.у. нильпотентная ступени 2 группа G, $G \in U_\alpha$ такая, что для некоторых целых положительных n, m, $n/m \geqq \alpha$, в нильпотентном пополнении G^* группы G с линейным порядком, продолжающим линейный порядок группы G, тождество $u_{n,m} = e$ нарушается при некоторых значениях переменных $x = a_1$, $y = a_2$, $z_i = c_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда в л.у. группе G^* необходимо получаем неравенства

$$u_4 > e\,, \quad u_4 > |[x, u_2]|\,, \quad u_3 > |[y, u_1]|\,,$$
$$x > e\,, \quad y > e\,, \quad x > y\,, \quad |[y, u_3]|^m > |[x, u_3]|^n\,.$$

Из жесткости порядка группы G^* и определения слов u_i немедленно имеем $u_i = |c_i|$, $i = 1, 2, 3$,

$$|[a_1, a_2]| > |c_1| \gg |[a_1, c_1]| > |c_2| \gg |[a_2, c_2]| > |c_3| \gg u_4\,.$$

Пусть целое $t > 0$ таково, что $a_i^t, c_j^t \in G$, $i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$. Пусть в группе G $x = a_1^t$, $y = a_2^t$, $z_i = c_i^{t^{i+1}}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Используя двуступенную нильпотентность группы G^* непосредственной проверкой с учетом полученных выше неравенств в группе G имеем

$$u_{n,m} = u_{n,m}(a_1^t, a_2^t, c_1^{t^2}, c_2^{t^3}, c_3^{t^4}, c_4^{t^5}) > e .$$

Противоречие с $G \in U_\alpha$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Базисный ранг многообразия жестких решеточно упорядоченных групп равен* 2.

Доказательство. Так как любая жесткая l-группа является о-аппроксимируемой и любое l-многообразие порождается всеми своими конечно-порожденными l-группами, то для доказательства теоремы достаточно показать, что любая конечно-порожденная группа G с жестким линейным порядком вложима в качестве l-подгруппы в некоторую жестко линейно упорядоченную 2-порожденную группу. Напомним здесь вкратце вложение Неймана (детали см., например, [10, стр. 62]). Для групп A, B через $A \text{ г}^{\bullet} B$ обозначаем подгруппу группы $A \text{ г}^{-} B$, порожденную B и подгруппой A_1 из $\overline{\prod_{b \in B}} A_b$, где $a \in A_1$ тогда и только тогда, когда множество $\{b \in B \mid a(b) \neq e\}$ вполне упорядочено. Пусть группа G порождается множеством $\{g_i \mid i \in I\}$, $C = \langle c \rangle$, $B = \langle b \rangle$ — бесконечные циклические. И пусть $D = (G \text{ г}^{\bullet} C) \text{ г}^{\bullet} B$. Для $i \in I$ через k_i обозначаем элемент из $\overline{\prod_{x \in C}} G_x$, определяемый следующим образом $k_i(c^n) = e$, если $n < 0$ и $k_i(c^n) = g_i^{-1}$, если $n \geqq 0$. Пусть элемент a, $a \in D \cap \overline{\prod_{y \in B}} (G \text{ г}^{\bullet} C)_y$, задан соотношениями $a(e) = c$, $a(b^{2i-1}) = k_i$ для всех $i \in I$; $a(y) = e$ для всех остальных $y \in B$. Тогда подгруппа

$$G^* = \text{гр}(g_i^* \mid g_i^* = [b^{2i-1} a b^{1-2i}, a],\ i \in I)$$

группы $\text{гр}(a, b) \leqq D$ изоморфна группе G.

В нашем случае множество I конечно, поэтому можем считать, что $D = (G \text{ г}^{\bullet} C) \text{ г } B$. Далее, очевидно, можем считать, что $D = A \text{ г } B$, где A — подгруппа группы $G \text{ г}^{\bullet} C$, порожденная множеством $\{G \text{ г } C, k_i, i \in I\}$. Покажем, что на группе A можно ввести жесткий линейный порядок, продолжающий жесткий линейный порядок группы G. Хорошо известно (см., например, [11]), что на $G \text{ г } C$ можно задать жесткий линейный порядок, продолжающий порядок G так, что $g \ll c$ для всех $g \in \prod_{x \in C} G_x$. Нетрудно видеть, что $[k_i, c] \in \prod_{x \in C} G_x$ и, следовательно, подгруппа $\prod_{x \in C} G_x$ инвариантна в A, более того, любой внутренний автоморфизм группы A является порядковым автоморфизмом подгруппы $\prod_{x \in C} G_x$, действующим тождественно в факторах скачков выпуклых (в $\prod_{x \in C} G_x$) подгрупп. А так как, очевидно, фактор-группа $A / \prod_{x \in C} G_x$ изоморфна произведению

$G \times C$, то группа A допускает жесткий линейный порядок, продолжающий линейный порядок группы $G \operatorname{r} C$. Вновь применяя результат [11] к группе $D = A \operatorname{r} B$, имеем на $A \operatorname{r} B$ жесткий линейный порядок, продолжающий линейный порядок группы A.

Как отмечалось в [10, стр. 62], для элементов $g_i^* = [b^{2i-1}ab^{1-2i}, a]$, $i \in I$, в D справедливо $g_i^*(e) = [k_i, c]$, $g_i^*(y) = e$ для $y \in B$, $y \neq e$. Следовательно, $g_i^* \in A_e$. И так как $A_e \simeq A$, а в A элемент $[k_i, c]$ лежит в $G_e \simeq G$, то подгруппа G^* l-группы гр(a, b) с жестким линейным порядком, индуцированным жестким линейным порядком группы D, будет l-изоморфна линейно упорядоченной группе G. Теорема доказана.

Литература

[1] *Ch. Holland:* A servey of varieties of lattice ordered groups. Lect. Notes Math. *1004* (1982), 153—158.

[2] *В. М. Копытов:* Решеточно упорядоченные группы. М., Наука, 1984.

[3] *С. А. Гурченков:* К теории многообразий решеточно упорядоченных групп. Алгебра и логика, *27*, No 3 (1988), 249—273.

[4] *N. Reily:* Varieties of lattice-ordered groups that contain no non-abelian o-groups are solvable. Order, *3*, No 4 (1986), 287—297.

[5] Problems on ordered groups. Algebra and Order. Proc. First Int. Symp. Ordered Algebraic Structures. Luminy-Marselly, 1984, 127.

[6] *Н. Я. Медведев:* К теории решеточно упорядоченных групп. 19-я Всесоюзн. алгебраическая конф., часть 2, Львов, 1987, 184.

[7] *Н. Я. Медведев:* О решетке о-аппроксимируемых l-многообразий. Czech. Math. J., *34*, No 1 (1984), 6—17.

[8] *P. Conrad:* Free lattice ordered groups. J. Algebra, *16* (1970), 191—203.

[9] *I. Martinez:* Varieties of lattice-ordered groups. Math. Z., *137* (1974), 265—284.

[10] *А. И. Кокорин, В. М. Копытов:* Линейно упорядоченные группы. М., Наука, 1972.

[11] *В. М. Копытов:* О сплетении и свободном произведении жестко упорядочиваемых групп. 9-й Всесоюзн. симпозиум по теории групп, Москва, 1984, 213.

Адрес автора: СССР, 658223 Рубцовск, проспект Рубцовский 57, кв. 6.