Czechoslovak Mathematical Journal

Bernard Rouxel

Sur quelques propriétés conformes des surfaces de Borůvka de E^4

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 39 (1989), No. 4, 604–613

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102334

Czechoslovak Mathematical Journal, 39 (114) 1989, Praha

SUR QUELQUES PROPRIETES CONFORMES DES SURFACES DE BORŮVKA DE E^4

BERNARD ROUXEL, Lille

(Reçu le 23. décembre 1986)

1. INTRODUCTION

Nous désignons par surface de Borůvka de E^4 toute surface de E^4 telle qu'en chacun de ses points l'ellipse de courbure est un cercle. L'étude de ces surfaces a été faite dans le cas particulier de surfaces minimales par O. Borůvka [2], [3], Kwietniewski, Kommerell, Wong [13]. Nous montrons dans cette étude que certaines propriétés établies par O. Borůvka sont encore vraies pour des surfaces d'une classe plus étendue que nous désignons par surfaces de Borůvka. Cette famille de surfaces étant invariante par les transformations conformes de E^4 nous en donnons une caractérisation faisant intervenir les propriétés paratactiques des sphères harmoniques de ces surfaces, qui, dans le cas particulier des surfaces minimales à indicatrice de courbure circulaire correspond aux propriétés d'isoclinité des plans tangents.

Il s'agit dans tout ce qui suit de géométrie différentielle locale dans l'espace euclidien E^4. Soit S une surface de E^4, à tout point m de S on associe un repère orthonormé $R(e_1, e_2, e_3, e_4)$, les vecteurs e_1, e_2 appartenant au plan tangent $T_m(S)$ et les vecteurs e_3, e_4 au plan normal $N_m(S)$. Dans ces conditions nous disposons pour les déplacements de R, des équations [10]:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{d}m &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2\,,\\
\mathrm{d}e_1 &= \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 + \omega_1^4 e_4\,,\\
\mathrm{d}e_2 &= -\omega_1^2 e_1 + \omega_2^3 e_3 + \omega_2^4 e_4\,,\\
\mathrm{d}e_3 &= -\omega_1^3 e_1 - \omega_2^3 e_2 + \omega_3^4 e_4\,,\\
\mathrm{d}e_4 &= -\omega_1^4 e_1 - \omega_2^4 e_2 - \omega_3^4 e_3\,,
\end{aligned}
$$

et des équations de structure

$$D\omega_i^j = \sum_{k=1}^{k=4} \omega_i^k \wedge \omega_k^j\,.$$

Les formes différentielles de degré 1, ω^1 et ω^2 sont indépendantes et les formes ω_i^j s'expriment en fonction de ω^1 et ω^2 par les formules

$$\omega_i^j = \gamma_{i1}^j \omega^1 + \gamma_{i2}^j \omega^2\,,\quad \omega_1^2 = p\omega^1 + q\omega^2\,.$$

La *courbure gaussienne* K définie par $D\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2$ s'exprime alors par

$$K = -(\gamma_{12}^3)^2 - (\gamma_{12}^4)^2 + \gamma_{11}^3\gamma_{22}^3 + \gamma_{11}^4\gamma_{22}^4 \,. \tag{2}$$

La *courbure normale* K_N définie par $D\omega_3^4 = -K_N\omega^1 \wedge \omega^2$ a pour expression

$$K_N = -\gamma_{12}^3(\gamma_{11}^4 - \gamma_{22}^4) + \gamma_{12}^4(\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3) \,. \tag{3}$$

Le vecteur *courbure moyenne* $\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}(\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3)\, e_3 + \frac{1}{2}(\gamma_{11}^4 + \gamma_{22}^4)\, e_4$ définit la courbure moyenne H par

$$H^2 = \tfrac{1}{4}[(\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3)^2 + (\gamma_{11}^4 + \gamma_{22}^4)^2] \,. \tag{4}$$

Il est possible d'associer à tout vecteur normal u une forme quadratique $A_u = -\langle du, dm\rangle$; on dispose ainsi de deux forme quadratiques

$$Ae_3 = \gamma_{11}^3(\omega^1)^2 + 2\gamma_{12}^3\omega^1\omega^2 + \gamma_{22}^3(\omega^2)^2 \,,$$
$$Ae_4 = \gamma_{11}^4(\omega^1)^2 + 2\gamma_{12}^4\omega^1\omega^2 + \gamma_{22}^4(\omega^2)^2 \,.$$

On sait qu'à tout point m de S sont associées deux coniques de $N_m(S)$ l'ellipse de courbure G et la conique F de Kommerell.

L'ellipse G est définie de la manière suivante; soit Γ une courbe de S de vecteur unitaire t. La projection sur $N_m(S)$ de l'extrémité de (dt/ds) (s abscisse curviligne sur Γ) pour toutes les courbes Γ passant par m, décrit G.

On trouve aisément qu'une représentation paramétrique de G est

$$x = \frac{\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3}{2} + \frac{\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3}{2}\cos 2\theta + \gamma_{12}^3 \sin 2\theta \,, \tag{5}$$
$$y = \frac{\gamma_{11}^4 + \gamma_{22}^4}{2} + \frac{\gamma_{11}^4 - \gamma_{22}^4}{2}\cos 2\theta + \gamma_{12}^4 \sin 2\theta$$

(les axes Ox et Oy étant respectivement désignés par e_3 et e_4).

La conique F de Kommerell est définie de la manière suivante: c'est l'ensemble des points d'intersection de $N_m(S)$ et des plans normaux voisins. En d'autres termes c'est l'ensemble des points focaux de $N_m(S)$. On trouve pour équation de F

$$(x\gamma_{12}^3 + y\gamma_{12}^4)^2 - (x\gamma_{11}^3 + y\gamma_{11}^4 - 1)(x\gamma_{22}^3 + y\gamma_{22}^4 - 1) = 0 \tag{6}$$

ou

$$x^2[(\gamma_{12}^3)^2 - \gamma_{11}^3\gamma_{22}^3] + xy[2\gamma_{12}^3\gamma_{12}^4 - \gamma_{11}^3\gamma_{22}^4 - \gamma_{11}^4\gamma_{22}^3] +$$
$$+ y^2[(\gamma_{12}^4)^2 - \gamma_{11}^4\gamma_{22}^4] + x(\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3) + y(\gamma_{11}^4 + \gamma_{22}^4) - 1 = 0 \,.$$

Il est possible de montrer que G et F sont polaires réciproques par rapport à un cercle de $N_m(S)$ de centre m et rayon 1.

Les surfaces de Borůvka sont donc caractérisées par les conditions

$$(\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3)^2 + 4(\gamma_{12}^3)^2 = (\gamma_{11}^4 - \gamma_{22}^4)^2 + 4(\gamma_{12}^4)^2 \,, \tag{7}$$
$$(\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3)(\gamma_{11}^4 - \gamma_{22}^4) + 4\gamma_{12}^3\gamma_{12}^4 = 0$$

qui traduisent que G est un cercle.

2. HYPERSPHERES TANGENTES A UNE SURFACE, SPHERE HARMONIQUE

Soit (Ω) une hypersphère tangente à (S) en m et soit $\omega = m + xe_3 + ye_4$ son centre. Si l'on pose

$$\omega^1 = a(u, v)\,\mathrm{d}u\,, \quad \omega^2 = b(u, v)\,\mathrm{d}v$$

on obtient

$$\frac{\partial m}{\partial u} = ae_1\,, \quad \frac{\partial m}{\partial v} = be_2\,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} = \frac{\partial a}{\partial u} e_1 + a^2(pe_2 + \gamma^3_{11}e_3 + \gamma^4_{11}e_4)\,,$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial a}{\partial v} e_1 + ab(qe_2 + \gamma^3_{12}e_3 + \gamma^4_{12}e_4)\,,$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial v^2} = \frac{\partial b}{\partial v} e_2 + b^2(-qe_1 + \gamma^3_{22}e_3 + \gamma^4_{22}e_4)\,,$$

L'intersection de (Ω) et de (S) est une courbe possédant en général un point double en m; l'équation donnant les directions des tangentes en ce point double s'obtient de même que dans E_3 à partir du développement de Taylor déduit des équations (8). On obtient

$$(x\gamma^3_{11} + y\gamma^4_{11} - 1)\,a^2\,\mathrm{d}u^2 + 2(x\gamma^3_{12} + y\gamma^4_{12})\,ab\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + $$
$$+ (x\gamma^3_{22} + y\gamma^4_{22} - 1)\,b^2\,\mathrm{d}v^2 = 0\,.$$

On constante que ces tangentes sont confondues si et seulement si

$$(x\gamma^3_{12} + y\gamma^4_{12})^2 - (x\gamma^3_{11} + y\gamma^4_{11} - 1)(x\gamma^3_{22} + y\gamma^4_{22} - 1) = 0$$

c'est-à-dire is (Ω) est centrée sur F. [Ce résultat est dû à R. Calapso et à été généralisé par Y. C. Wong [12]].

Les tangentes en m à l'intersection de (Ω) et (S) seront orthogonales si

$$x(\gamma^3_{22} + \gamma^3_{11}) + y(\gamma^4_{22} + \gamma^4_{11}) - 2 = 0$$

c'est-à-dire is (Ω) est centrée sur la polaire de m par rapport à F. On obtient ainsi une famille d'hypersphères à un paramètre formant un faisceau linéaire. Ces hypersphères ont en commun une sphère Σ tangente en m à (S) dont nous allons préciser la position. On choisit pour cela dans $N_m(S)$ le vecteur e_3 tel que $\boldsymbol{H} = |H|\,e_3$, dans ces conditions $\gamma^4_{11} + \gamma^4_{22} = 0$, l'équation de la polaire considérée est $x(\gamma^3_{11} + \gamma^3_{22}) - 2 = 0$.

Le centre de la sphère Σ est donc sur le vecteur courbure moyenne et son rayon est $1/|H|$. Par analogie avec les propriétés des surfaces de E^3 nous appellerons Σ la *sphère harmonique* de (S) en M. Si *S est minimale la sphère harmonique se confond avec le plan tangent.*

3. PROPRIETES CONFORMES DES SURFACES DE E^4

Des invariants conformes de sous-variétés d'espaces euclidiens ont été récemment étudiés par B. Y. Chen [5], Hsiung et Mugridge [6]. Compte tenu du fait que les transformations conformes de E^n $(n \geqq 3)$ se décomposent en produits de similitudes, symétries et inversions, pour établir l'existence d'un invariant conforme il suffit dans la plupart des cas de considérer les inversions.

Ainsi *par toute transformation conforme de E^4 la sphère harmonique Σ en un point m d'une surface S se transforme en la sphère harmonique Σ' au point correspondant m' de la transformée S'.* Cette propriété résulte immédiatement de la définition de Σ et des propriétés usuelles de l'inversion.

Si l'on considère une surface S et son inverse S' dans une inversion de centre 0, on constate que les coniques de Kommerell F et F' sont situées sur le même cône du second ordre de centre 0, (en raison de la caractérisation précédente de F à l'aide des centres des hypersphères tangentes à S) ces coniques se correspondent donc dans une perspective de centre 0. Les propriétés locales de l'inversion au voisinage des points correspondants m et m' montrent alors que l'angle des tangentes menées de m à F est égal à l'angle des tangentes menées de m' à F', cet angle est donc un invariant conforme qu'il suffit de calculer. On utilise pour cela l'équation (6) de F et l'on obtient la tangente de cet angle par un calcul élémentaire qui fournit à un coefficient près l'invariant conforme

$$J = \frac{K_N}{H^2 - K}.$$

Compte tenu de l'invariance déjà établie par B. Y. Chen de $K_N \omega^1 \wedge \omega^2$ on retrouve l'invariant conforme étudié en [5]: $(H^2 - K)\,\omega^1 \wedge \omega^2$.

Remarque. Si l'on considère une sous-variété M^n d'un espace euclidien E^{n+p} l'étude de l'intersection de M^n et des hypersphères tangentes permet de même que précédemment de mettre en évidence l'existence d'une *n-sphère harmonique* centrée sur le vecteur courbure moyenne et possédant les mêmes propriétés d'invariance par transformation conforme. On en déduit de même les invariants étudiés par Chen, Hsiung et Mugridge.

L'invariant J peut s'exprimer à l'aide des éléments géométriques associés à l'ellipse de courbure G. On particularise à cet effet le repère utilisé en supposant $\gamma_{12}^3 = 0$ ce qui correspond à un choix de e_1, e_2 diagonalisant la deuxième forme quadratique Ae_3. De plus on choisit e_3 et e_4 parallèles aux axes de G ce qui entraîne $\gamma_{11}^4 - \gamma_{22}^4 = 0$. G a alors pour équation

$$x = \frac{\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3}{2} + \frac{\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3}{2}\cos 2\theta\,,$$

$$y = \gamma_{11}^4 + \gamma_{12}^4 \sin 2\theta\,.$$

On a également

$$K_N = \gamma^4_{12}(\gamma^3_{11} - \gamma^3_{22}),$$

$$H^2 - K = \left(\frac{\gamma^3_{11} - \gamma^3_{22}}{2}\right)^2 + (\gamma^4_{21})^2 .$$

Si a et b désignent les demi-axes de G on obtient

$$|J| = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Ceci entraîne $|J| \leqq 1$ et l'on en déduit immédiatement le:

Théorème 1. *Les surfaces S pour lesquelles $|J| = 1$ sont les surfaces de Borůvka, en chacun de leurs points l'ellipse de courbure est un cercle. Toute transformation conforme de E^4 transforme une surface de Borůvka en une autre surface de Borůvka.*

En tout point m d'une surface de Borůvka la conique de Kommerell F admet m pour foyer. Les tangentes menées de m à F sont isotropes. Si l'on fait subir à cette surface une inversion m' sera foyer de F' et l'on retrouve la propriété précédente.

4. LES SURFACES DE BORŮVKA

Nous avons vu (7) que la condition pour que G soit un cercle est

$$(\gamma^3_{11} - \gamma^3_{22})^2 + 4(\gamma^3_{12})^2 = (\gamma^4_{11} - \gamma^4_{22})^2 + 4(\gamma^4_{12})^2 ,$$

$$(\gamma^3_{11} - \gamma^3_{22})(\gamma^4_{11} - \gamma^4_{22}) + 4\gamma^3_{12}\gamma^4_{12} = 0 .$$

Utilisant un repère diagonalisant Ae_3 on peut supposer $\gamma^3_{12} = 0$ et si l'on suppose que de plus S n'est pas minimale (surfaces R étudiées par Borůvka)

$$\gamma^4_{11} + \gamma^4_{22} = 0 , \quad \gamma^3_{11} + \gamma^3_{22} \neq 0 .$$

Dans ces conditions le système (7) fournit

α) $\gamma^3_{11} = \gamma^3_{22}$ d'où $\gamma^4_{11} = \gamma^4_{22} = \gamma^4_{12} = 0$ soit $\omega^4_1 = \omega^4_2 = 0$, $\omega^3_1 = \gamma^3_{11}\omega^1$, $\omega^3_2 = \gamma^3_{22}\omega^2$.

La différentiation extérieure de ces équations fournit $\omega^4_3 = 0$ et $\gamma^3_{11} = c^{te}$ ce qui montre que S est une sphère d'un espace euclidien E^3 orthogonal à e_4 qui conserve une direction fixe.

β) le seul cas intéressant est donc

$$\gamma^3_{11} \neq \gamma^3_{22} \quad \text{d'où} \quad \gamma^4_{11} = \gamma^4_{22} \quad \text{et} \quad \gamma^3_{11} - \gamma^3_{22} = 2\varepsilon\gamma^4_{12} ; \quad \varepsilon = \pm 1 .$$

On peut donc attacher à toute surface de Borůvka de E^4 non minimale un repère tel que

$$\gamma^3_{12} = \gamma^4_{11} = \gamma^4_{22} = 0 , \quad \gamma^3_{11} - \gamma^3_{22} = 2\varepsilon\gamma^4_{12} .$$

Dans la suite supposerons $\varepsilon = +1$, les calculs faits en considérant le cas $\varepsilon = -1$ sont analogues et conduisent aux mêmes résultats.

On dispose alors des équations

$$(9) \qquad \omega_1^3 = \gamma_{11}^3\omega^1\,, \quad \omega_2^3 = \gamma_{22}^3\omega^2\,, \quad \omega_1^4 = \gamma_{12}^4\omega^2\,, \quad \omega_2^4 = \gamma_{12}^2\omega^1\,.$$

On pose également $\omega_1^2 = p\omega^1 + q\omega^2$, $\omega_3^4 = r\omega^1 + s\omega^2$.

La différentiation extérieure des équations (9) donne

$$\begin{aligned}
D\omega_1^3 &= \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^4 \wedge \omega_4^3 = d\gamma_{11}^3 \wedge \omega^1 + \gamma_{11}^3\, D\omega^1\,,\\
D\omega_2^3 &= \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_2^4 \wedge \omega_4^3 = d\gamma_{22}^3 \wedge \omega^2 + \gamma_{22}^3\, D\omega^2\,,\\
D\omega_1^4 &= \omega_1^2 \wedge \omega_2^4 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^4 = d\gamma_{12}^4 \wedge \omega^2 + \gamma_{12}^4\, D\omega^2\,,\\
D\omega_2^4 &= \omega_2^1 \wedge \omega_1^4 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^4 = d\gamma_{12}^4 \wedge \omega^1 + \gamma_{12}^4\, D\omega^1\,.
\end{aligned}$$

Ce système devient en posant $d\gamma_{ij}^k = d_1\gamma_{ij}^k\omega^1 + d_2\gamma_{ij}^k\omega^2$

$$\begin{aligned}
p(\gamma_{22}^3 - \gamma_{11}^3) + r\gamma_{12}^4 &= -d_2\gamma_{11}^3\,,\\
q(\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3) - s\gamma_{12}^4 &= d_1\gamma_{22}^3\,,\\
-2q\gamma_{12}^4 + \gamma_{11}^3 s &= d_1\gamma_{12}^4\,,\\
-2p\gamma_{12}^4 - \gamma_{22}^3 r &= -d_2\gamma_{12}^4\,,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire compte tenu de $\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3 = 2\gamma_{12}^4$

$$\begin{aligned}
d_1\gamma_{11}^3 &= d_1\gamma_{22}^3 + 2d_1\gamma_{12}^4 = s(2\gamma_{11}^3 - \gamma_{12}^4) - 2q\gamma_{12}^4\,,\\
d_2\gamma_{22}^3 &= d_2\gamma_{11}^3 - 2d_2\gamma_{12}^4 = -r(\gamma_{12}^4 + 2\gamma_{22}^3) - 2p\gamma_{12}^4\,.
\end{aligned}$$

Si l'on désigne par ϱ le rayon de la sphère harmonique $\varrho = 2/(\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3)$ on obtient

$$d\varrho = \frac{-2}{(\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3)^2}\left[(d_1\gamma_{11}^3)\,\omega^1 + (d_2\gamma_{11}^3)\,\omega^2 + (d_1\gamma_{22}^3)\,\omega^1 + (d_2\gamma_{22}^3)\,\omega^2\right] =$$

$$= \frac{-2}{(\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3)^2}\left[(-2s\gamma_{12}^4 + 2s\gamma_{11}^3)\,\omega^1 - (2r\gamma_{12}^4 + 2r\gamma_{22}^3)\,\omega^2\right]$$

$$(10) \quad \text{soit} \quad d\varrho = -\varrho(s\omega^1 - r\omega^2) \quad \text{et} \quad (r - is)(\omega^1 + i\omega^2) = \omega_3^4 + i\,(d\varrho/\varrho)\,.$$

Remarque. L'étude des lignes minima d'une telle surface $\omega^2 = \varepsilon\, i\omega^1$, $\varepsilon = \pm 1$ montre que

$$\begin{aligned}
d(e_1 + i\varepsilon e_2) &= -i\omega_1^2(e_1 + i\varepsilon e_2) + 2\gamma_{12}^4\omega^1(e_3 + ie_4)\\
d(e_3 + i\varepsilon e_4) &= -i\omega_3^4(e_3 + i\varepsilon e_4) - (\gamma_{22}^3 + \gamma_{12}^4)(e_1 + i\varepsilon e_2)
\end{aligned}$$

Les courbes minima d'une surface de Borůvka sont planes. Ce résultat avait déjà été remarqué par Borůvka dans le cas des surfaces minimales.

On peut, par un calcul simple, montrer que c'est là une propriété caractéristique des surfaces de Borůvka; les plans considérés étant totalement isotropes ceci démontre également que toute transformée conforme d'une suraface de Borůvka est encore une surface de Borůvka.

5. PLANS ISOCLINES, SPHERES PARATACTIQUES DE E^4

Deux plans A et B de E^4 sont dits isoclines si tout vecteur de A fait un angle constant avec sa projection sur B [on trouvera un exposé des principales propriétés de ces plans dans [14]]. Nous dirons que deux sphères de E^4 sont paratactiques si les plans tangents en leurs points d'intersection sont isoclines. La figure inverse d'un couple de plans isoclines est donc un couple de sphère paratactiques. Le terme paratactique est utilisé ici par analogie avec la configuration de cercles paratactiques de l'espace euclidien E^3 étudiée en particulier par Bloch [1], Hadamard, Robert [7]. Nous utiliserons par la suite une caractérisation géométrique des couples de sphères paratactiques analogue à celle de Robert.

Pour cela on associe aux phères S_1 et S_2 de centres Ω_1 et Ω_2, de rayon R_1 et R_2 les vecteurs V_1 et V_2 de module R_1 et R_2 orthogonaux aux hyperplans contenant S_1 et S_2.

La condition de parataxie est alors

$$|V_1 - V_2| = |\Omega_1\Omega_2|\,, \quad \langle (V_1 - V_2), \Omega_1\Omega_2 \rangle = 0\,. \tag{11}$$

Il est possible à l'aide de l'étude fait en [14] de justifier cette caractérisation par des calculs de géométrie analytique élémentaire; on peut en donner une justification géométrique plus rapide. Si l'on désigne par φ_1, φ'_1 les centres de hypersphères isotropes dont l'intersection est S_1 (les foyers de S_1) et φ_2, φ'_2 les foyers de S_2 la condition (11) est équivalente à: $\varphi_1\varphi_2$ isotrope et φ'_1, φ'_2 isotrope (condition de parataxie bien connue de E_3). Si M désigne un point d'intersection de S_1 et S_2 alors le plan $\varphi_1\, M\, \varphi_2$ est totalement isotrope de même que $\varphi'_1\, M\, \varphi'_2$ ce qui implique que les droites à l'infini de ces plans sont des génératrices de la quadrique ombilicale. Les droites à l'infini des plans $\varphi'_1\, M\, \varphi_1$ et $\varphi'_2\, M\, \varphi_2$ sont alors Clifford-parallèles pour la géométrie elliptique définie par cette quadrique et [14] ces plans sont alors isoclines de même que les plans tangents aux sphères considérées en M qui leurs sont totalement orthogonaux.

6. CARACTERISATION PARATACTIQUE DES SURFACES DE BORŮVKA

Nous nous proposons de démontrer le

Théorème 2. *En tout point d'une surface de Borůvka la sphère harmonique est paratactique aux sphères harmoniques voisines. Cette propriété caractérise les surfaces de Borůvka.*

Dans le cas particulier des surfaces minimales on retrouve le théorème de Kwietnieski-Kommerell-Eisenhart-Wong [13] [Les plans tangents d'une surface minimale à indicatrice de courbure circulaire sont mutuellement isoclines].

Considérons une surface S de E^4 et proposons nous dans un premier temps, d'étudier l'existence d'une famille de sphères à deux paramètres tangentes à S telle que toute sphère de la famille forme avec une sphère voisine un couple paratactique.

On associe ainsi à tout point m de S une sphère σ tangente en m à S. On peut toujours supposer que le repère mobile associé à m est tel que le centre de σ est porté par e_3, les vecteurs tangents e_1 et e_2 étant choisis de façon à diagonaliser Ae_3. Si ω désigne le centre de σ et ϱ son rayon la condition de parataxie de σ avec les sphères voisines s'écrit

$$|\mathrm{d}\omega| = |\mathrm{d}(\varrho e_4)|\,, \quad \langle \mathrm{d}\omega, \mathrm{d}(\varrho e_4)\rangle = 0\,.$$

On a ici

$$\mathrm{d}\omega = e_1(\omega^1 - \varrho\gamma^3_{11}\omega^1) + e_2(\omega^2 - \varrho\gamma^3_{22}\omega^2) + \mathrm{d}\varrho e_3 + \varrho\omega^4_3 e_4$$
$$\mathrm{d}(\varrho e_4) = -\varrho\omega^4_1 e_1 - \varrho\omega^4_2 e_2 - \varrho\omega^4_3 e_4 + \mathrm{d}\varrho e_4\,.$$

Soit

$$(12)\quad \begin{aligned}&(\omega^1)^2\,[(1-\varrho\gamma^3_{11})^2 - \varrho^2(\gamma^4_{11})^2 - \varrho^2(\gamma^4_{21})^2] - 2\omega^1\omega^2[\gamma^4_{12}\gamma^4_{22} + \gamma^4_{21}\gamma^4_{11}] + \\ &\qquad + (\omega^2)^2\,[(1-\varrho\gamma^3_{22})^2 - \varrho^2(\gamma^4_{22})^2 - \varrho^2(\gamma^4_{12})^2] = 0\,,\\ &(\omega^1)^2\,\gamma^4_{11}(1-\varrho\gamma^3_{11}) + \omega^1\omega^2\gamma^4_{12}(2-\varrho\gamma^3_{11}-\varrho\gamma^3_{22}) + \\ &\qquad + (\omega^2)^2\,\gamma^4_{22}(1-\varrho\gamma^3_{22}) = 0\,.\end{aligned}$$

Ces relations devant être identiquement vérifiées, la première fournit la condition

$$\gamma^4_{12}(\gamma^4_{11} + \gamma^4_{22}) = 0$$

α) $\gamma^4_{12} = 0$. Dans ce cas S est à courbure normale nulle

a) si $\gamma^4_{11} = 0$

i) ou bien $\gamma^4_{22} = 0$, on a alors $\omega^4_1 = \omega^4_2 = 0$, $\omega^3_1 = \gamma^3_{11}\omega^1$, $\omega^3_2 = \gamma^3_{11}\omega^2$ et par différentiation extérieure $\mathrm{d}\gamma^3_{11} \wedge \omega^1 = 0$, $\mathrm{d}\gamma^3_{11} \wedge \omega^2$ d'où $\gamma^3_{11} = c^{te}$; de même $\omega^4_3 = 0$ ce qui entraîne $\mathrm{d}\omega = 0$, S est une sphère.

ii) ou bien $\gamma^4_{22} \neq 0$ et les équations (12) aboutissent à des contradictions.

b) si $\gamma^4_{11} \neq 0$ la deuxième condition (12) donne $1 - \varrho\gamma^3_{11} = 0$ qui reportée dans la première aboutit de même que plus haut à contradiction ($\gamma^4_{11} = 0$).

β) $\gamma^4_{12} \neq 0$ on en déduit $\gamma^4_{11} + \gamma^4_{22} = 0$, la sphère σ est donc centrée sur le vecteur courbure moyenne H, son rayon est donné par la deuxième condition

$$\varrho = \frac{2}{\gamma^3_{11} + \gamma^3_{22}}\,.$$

La sphère σ est donc nécessairement la *sphère harmonique*.

De plus les conditions (12) imposent

a) $1 - \varrho\gamma^3_{11} = 0$, soit $\gamma^3_{11} = \gamma^3_{22}$ qui aboutit à une contradiction.

b) $\gamma^4_{11} = 0$ et si $\gamma^3_{11} \neq \gamma^3_{22}$ qui ($\gamma^3_{11} = \gamma^3_{22}$ aboutirait a une contradiction)) alors $\gamma^4_{22} = 0$ et $\gamma^3_{11} - \gamma^3_{22} = 2\varepsilon\gamma^4_{12}$ ($\varepsilon = \pm 1$).

Pour une surface de E^4 possédant la propriété de parataxie cherchée on a donc

$$\gamma^3_{12} = 0\,, \quad \gamma^4_{11} = \gamma^4_{22} = 0\,, \quad \gamma^3_{11} - \gamma^3_{22} = 2\varepsilon\gamma^4_{12}\,.$$

Si l'on excepte les sphères de E^3 les seules surfaces de E^4 possédant une famille de sphères tangentes telle que toute sphère forme un couple paratactique avec les sphères voisines, ne peuvent être que les surfaces de Borůvka avec pour famille de sphères tangentes les sphères harmoniques. Il nous reste à vérifier que ces surfaces conviennent.

Pour de telles surfaces, compte tenu des équations (10)

$$\mathrm{d}\omega = \omega^1 e_1 \frac{\gamma_{22}^3 - \gamma_{11}^3}{\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3} + \omega^2 e_2 \frac{\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3}{\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3} - \varrho(s\omega^1 - r\omega^2)\, e_3 + \varrho\omega_3^4 e_4\,,$$

$$\mathrm{d}(\varrho e_3) = -\varrho\omega^2\gamma_{12}^4 e_1 - \varrho\omega^2\gamma_{12}^4 e_2 - \varrho\omega_3^4 e_3 - \varrho(s\omega^1 - r\omega^2)\, e_4\,,$$

d'où

$$(\mathrm{d}\omega)^2 = \frac{\gamma_{11}^3 - \gamma_{22}^3}{\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3}\left[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\right] + \varrho^2(r^2 + s^2)\left[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\right] = \left[\mathrm{d}(\varrho e_3)\right]^2,$$

de plus

$$\langle \mathrm{d}\omega, \mathrm{d}(\varrho e_3)\rangle = 0\,.$$

Ce qui établit la propriété de parataxie d'une sphère-harmonique d'une surface de Borůvka avec les sphères harmoniques voisines.

Remarque. On peut démontrer que les seules surfaces de E^4 pour lesquelles toutes les sphères harmonique sont mutuellement paratactiques sont les transformées conformes des surfaces minimales R. Pour de telles surfaces les sphères harmoniques passent par un point fixe.

7. SURFACES DE BORŮVKA ASSOCIEES

On peut montrer qu'à toute surface de Borůvka (non minimale) S correspond une autre surface de Borůvka S^* possédant la propriété suivante: en des points correspondants m et m^* les surfaces S et S^* ont même sphère harmonique. En d'autres termes la congruence des sphères harmoniques d'une surface de Borůvka S possède une deuxième nappe focale S^* qui est aussi une surface de Borůvka.

Le point m^* considéré est dans le repère précédemment utilisé défini par

$$m^* = m + \mu(se_1 + re_2 - \gamma_{12}^4 e_3)\,; \quad \mu = \frac{-4\gamma_{12}^4}{(\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3)\left[s^2 + r^2 + (\gamma_{12}^4)^2\right]}$$

[Les coordonnées de m^* s'obtiennent en cherchant l'ensemble des points d'intersection d'une sphère tangente à S avec les sphère tangentes voisines; on obtient en général une courbe caractéristique qui est une biquadratique gauche; dans le cas des sphères harmoniques des surfaces de Borůvka elle se décompose et possède deux points doubles m et m^*].

On vérifie aisément à l'aide des équations (10) que

$$\left\langle \mathrm{d}m^*, mm^* - \frac{2e_3}{\gamma_{11}^3 + \gamma_{22}^3}\right\rangle = 0$$

ce qui montre que la surface S^* décrite par m^* est tangente à la sphère harmonique en m à S. Cette sphère est aussi la sphère harmonique en m^* à S^* d'après les propriétés paratactiques du paragraphe précédent ce qui entraîne que S^* est également une surface de Borůvka.

On remarque qu'en les points correspondants S et S^* ont même courbure moyenne.

Remarque I. Les surfaces de Borůvka constituent des exemples particuliers des A-surfaces ou surfaces de Chen [8], [9].

Remarque II. Il est possible de donner une interprétation des résultats précédents dans la géométrie projective des droites de P^3 en utilisant une représentation hyperspatiale des droites de P^3 par des points de E^4 due à P. Vincensini [11]. Signalons qu'il est possible de montrer que l'invariant conforme étudié plus haut correspond à l'invariant projectif de Waelsh pour une congruence de P^3. La sphère harmonique est associée à la congruence linéaire dont les directrices sont les transformées de Laplace d'un rayon d'une congruence, et qu'aux surfaces de Borůvka S et S^* correspondent des congruences de droites du type V et V^* dans la classification de Čech [4].

L'auteur remercie le Professeur M. S. Bosser pour les suggestions faites lors de son séjour à l'Ile Tudy.

Bibliographie

[1] *Bloch A.:* Sur les cercles paratactiques et la cyclide de DUPIN. Jour. Math. Pures et Appl. 9e série, t. 3 (1924), pp. 51—77.

[2] *Borůvka O.:* Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante. Bull. Int. České Akademie věd a umění v Praze, Vol. *29* (1928), pp. 256—277.

[3] *Borůvka O.:* Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Publications de la Fac. des Sc. de l'Univ. Masaryk. Brno. 1931 pp. 1—40.

[4] *Čech E.:* Transformations développables des congruences de droites. Czechoslovak Mathematical Journal *6* (*81*) 1956 pp. 280—286.

[5] *Chen B. Y.:* Some conformal invariants of submanifolds and their applications. Bulletin Q.M.I. Vol. *10*, (1974), pp. 380—385.

[6] *Hsiung C. C., Mugridge L. R.:* Euclidean and conformal invariants of submanifolds. Geometria Dedicata, vol. *8* (1979), pp. 31—38.

[7] *Robert P.:* Congruences paratactiques de cycles. Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris n° *201*, 205, 206 (1960).

[8] *Rouxel B.:* A-submanifolds in Euclidean space. Kodaï Math. Jour. *4* n° 1, (1981), pp. 181—188.

[9] *Rouxel B.:* Sur les *A*-surfaces d'un espace-temps de Minkowski M^4. Rivista Math. della Univ. di Parma (4) *8* (1982) pp. 309—315.

[10] *Švec A.:* Global differential geometry of surfaces. Berlin 1981.

[11] *Vincensini P.:* Sur une représentation quadridimensionnelle ponctuelle de l'espace réglé à trois dimensions. Annali Mat. Pura ed. Appl. (IV) Vol. *LXX* (1963), pp. 371—398.

[12] *Wong Y. C.:* A note on the first normal space of a V_m in an R_n. Bull. Am. Soc. *51*, (1954), pp. 997—1000.

[13] *Wong Y. C.:* A new curvature theory for surfaces in an Euclidean 4-space. Comment. Mat. Helv. *26*, (1952), pp. 152—170.

[14] *Wong Y. C.:* Linear geometry in Euclidean 4-space. Hong-Kong, 1977.

Adresse de l'auteur: Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, 59655 Villeneuve D'Ascq Cedex, France.