Vladimir G. Maz'ya; S. V. Poborchij

Продолжение функций из классов С. Л. Соболева во внешность области с вершиной пика на границе II

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 37 (1987), No. 1, 128–150

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102142`

Czechoslovak Mathematical Journal, 37 (112) 1987, Praha

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ С. Л. СОБОЛЕВА ВО ВНЕШНОСТЬ ОБЛАСТИ С ВЕРШИНОЙ ПИКА НА ГРАНИЦЕ II.

В. Г. МАЗЬЯ, С. В. ПОБОРЧИЙ, Ленинград

(Поступило в редакцию 23/VIII 1985 г.)

Данная работа является непосредственным продолжением работы [1]. Настоящая, вторая ее часть содержит параграфы 6–9. В § 6 строится вспомогательный оператор продолжения из внешнего пика в конус $\{x \in R^n: x_n > (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)^{1/2}\}$. В § 7 доказана теорема о существовании линейного непрерывного оператора продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$ в случае $lp > n - 1$. Его построение существенно опирается на свойства операторов продолжения из тонкого цилиндра в более широкий и из внешнего пика в конус. Следующий параграф посвящен плоской овласти с вершиной внутреннего пика на границе. Здесь получены точные условия на вес σ, при которых существует оператор продолжения:

$$W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^2)\,, \quad 1 \leqq p \leqq \infty\,, \quad l = 1, 2, \dots\,.$$

В последнем параграфе работы изучается оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$, $q < p$. Доказаны четыре теоремы, три из которых посвящены области с внешним пиком (отдельно разбираются случаи $lq < n - 1$, $lq = n - 1$, $lq > n - 1$) и одна – плоской области с внутренним пиком.

Мы сохраняем все обозначения, введенные в первой части работы, и в дальнейшем, ссылаясь на нужные формулы первой части, не указываем номер [1].

6. ПРОДОЛЖЕНИЕ ИЗ ПИКА В КОНУС

В этом параграфе будут установлены два вспомогательных утверждения, которые понадобятся при построении оператора продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$ для Ω с внешним пиком в случае $lp > n - 1$.

Лемма 6.1. *Пусть Ω – область в R^n с вершиной внешнего пика на границе и пусть $M \geqq 1$. Положим*

$$V_{M,\delta} = \;= \{(y, z): z \in (0, \delta),\; y \in R^{n-1},\; |y| < M\,\varphi(z)\}\,, \quad \delta \in (0, 1)\,.$$

Тогда при достаточно малом δ существует линейный непрерывный оператор продолжения $\tilde{\mathscr{E}}$: $W_p^l(\Omega) \to W_p^l(\tilde{\Omega})$, где $\tilde{\Omega} = \Omega \cup V_{M,\delta}$, $p \in [1, \infty]$. $l \geqq 1$.

Доказательство. Построим последовательность $\{z_k\}_{k \geqq 0}$ по правилу $z_{k+1} + \varphi(z_{k+1}) = z_k$, $k \geqq 0$, где $z_0 \in (0, 1)$. Тогда $z_k \searrow 0$, $z_k z_{k+1}^{-1} \to 1$ и $\varphi_k \leqq c\varphi_{k+1}$, где $\varphi_k = \varphi(z_k)$. Будем считать число z_0 столь малым, что множество V_{M,z_0} содержится в окрестности U вершины пика из определения 1.1.

Пусть $\delta \in (0, z_1)$. Покажем, что заданную функцию $u \in W_p^l(\Omega)$ можно продолжить в область V_{M,z_0}. Определим области Ω_k, $k \geqq 1$, по формуле (2.2) и обозначим через $\mathscr{E}_k$ линейный оператор продолжения из Ω_k на R^n, удовлетворяющий условию (2.3). Пусть, далее, P_k — полином в R^n степени $l - 1$ с коэффициентами, являющимися линейными функционалами от u, который удовлетворяет неравенству (см. лемму 5.1)

$$\|\nabla_s(u - P_k)\|_{p,\Omega_k} \leqq c\varphi_k^{l-s}\|\nabla_l u\|_{p,\Omega_k}, \quad 0 \leqq s \leqq l. \tag{6.1}$$

Рассмотрим еще последовательность функций $\{\eta_k\}_{k \geqq 1}$ со свойствами: $\eta_k \in C_0^\infty(z_{k+1}, z_{k-1})$, $|\eta_k^{(s)}(z)| \leqq c\varphi_k^{-s}$, $0 \leqq s \leqq l$, $z \in R^1$, $\sum_{k=1}^\infty \eta_k(z) = 1$ при $z \in (0, z_1]$. Проверим, что требуемый оператор продолжения $\tilde{\mathscr{E}}$ можно задать формулой

$$(\tilde{\mathscr{E}}u)(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если} \quad x = (y, z) \in \Omega \setminus V_{M,\delta}, \\ \sum_{k=1}^\infty \eta_k(z)(P_k + \mathscr{E}_k(u - P_k))(x), & \text{если} \quad x \in V_{M,\delta}. \end{cases}$$

В самом деле, если $x \in \Omega \cap V_{M,\delta}$, то $(\tilde{\mathscr{E}}u)(x) = \sum_{k=1}^\infty \eta_k(z) u(x) = u(x)$, так что $\tilde{\mathscr{E}}u|_\Omega = u$. Проверим оценку

$$\|\nabla_j \tilde{\mathscr{E}}u\|_{p,V_{M,\delta}} \leqq c\|u\|_{p,l,\Omega}, \quad 0 \leqq j \leqq l, \tag{6.2}$$

в которой $c = c(n, p, l, \Omega, M, \delta)$. Положим $V_k = \{(y, z)\colon z \in (z_{k+1}, z_k), |y| < M\,\varphi(z)\}$. Имеем $\tilde{\mathscr{E}}u|_{V_k} = v_k + w_k$, где $k \geqq 1$,

$$v_k = P_k + \eta_{k+1}(P_{k+1} - P_k),$$

$$w_k = \sum_{i=k}^{k+1} \eta_i \mathscr{E}_i(u - P_i).$$

Далее

$$\|\nabla_j w_k\|_{p,V_k} \leqq c\sum_{i=k}^{k+1}\sum_{s=0}^{j} \varphi_i^{s-j}\|\nabla_s \mathscr{E}_i(u - P_i)\|_{p,R^n}, \quad 0 \leqq j \leqq l.$$

Используя (2.3), мажорируем парвую часть последнего неравенства выражением

$$c\sum_{i=k}^{k+1}\sum_{s=0}^{j}(\varphi_i^{-j}\|u - P_i\|_{p,\Omega_i} + \varphi_i^{s-j}\|\nabla s(u - P_i)\|_{p,\Omega_i}).$$

Применяя оценку (6.1), получаем, что

$$\|\nabla_j w_k\|_{p,V_k} \leqq c\sum_{i=k}^{k+1}\varphi_i^{l-j}\|\nabla_l u\|_{p,\Omega_i} \leqq c\|\nabla_l u\|_{p,\Omega_k'}, \tag{6.3}$$

где $\Omega'_k = \Omega_k \cup \Omega_{k+1}$. Обратимся к оценке величины $\|\nabla_j v_k\|_{p,V_k}$. Имеем

$$\|\nabla_j v_k\|_{p,V_k} \leqq \|\nabla_j P_k\|_{p,V_k} + c\sum_{s=0}^{j} \varphi_k^{s-j}\|\nabla_s(P_{k+1} - P_k)\|_{p,V_k}\,. \tag{6.4}$$

Заметим, что для любого полинома Q в R^n верно неравенство $\|Q\|_{p,V_k} \leqq c\|Q\|_{p,V_k\cap\Omega}$ с константой, зависящей только от n, p, Ω, M и степени полинома. Принимая во внимание эту оценку, мажорируем правую часть неравенства (6.4) выражением

$$c\|\nabla_j P_k\|_{p,\Omega_k} + c\sum_{s=0}^{j} \varphi_k^{s-j}\|\nabla_s(P_{k+1} - P_k)\|_{p,V_k\cap\Omega}\,,$$

которое не меньше, чем

$$c\big(\|\nabla_j u\|_{p,\Omega_k} + \|\nabla_j(u - P_k)\|_{p,\Omega_k} + \\ + \sum_{i=k}^{k+1}\sum_{s=0}^{j} \varphi_i^{s-j}\|\nabla_s(u - P_i)\|_{p,\Omega_i}\big)\,.$$

Применяя неравенство (6.1), находим, что

$$\|\nabla_j v_k\|_{p,V_k} \leqq c\|u\|_{p,l,\Omega_k'}\,. \tag{6.5}$$

Из (6.5) и (6.3) следует оценка $\|\nabla_j \mathscr{E} u\|_{p,V_k} \leqq c\|u\|_{p,l,\Omega_k'}$. Отсюда при $p = \infty$ вытекает (6.2). Если p конечно, то последнюю оценку следует возвести в степень p и просуммировать по k. В результате придем к неравентву (6.2). Доказательство леммы закончено.

В следующей лемме строится оператор продолжения из области Ω в конус V_ε, определяемый ниже.

Лемма 6.2. *Пусть Ω — область в R^n с вершиной внешнего пика на границе и пусть функция φ, описывающая заострение пика, удовлетворяет условию (2.1). Положим*

$$V_\varepsilon = \{(y, z)\colon z \in (0, \varepsilon),\ y \in R^{n-1},\ |y| < z\}\,, \quad \varepsilon \in (0, 1)\,,$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} (\varphi(|x|)/|x|)^{(n-1)/p}\,, & \text{если} \quad x \in V_\varepsilon\,, \\ 1\,, \quad \text{если} \quad x \in \Omega \setminus V_\varepsilon\,. \end{cases}$$

Тогда при достаточно малом ε существует линейный непрерывный оператор продолжения $\mathscr{E}^*\colon W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(\Omega^*)$, где

$$\Omega^* = \Omega \cup V_\varepsilon\,, \quad p \in [1, \infty]\,, \quad l \geqq 1\,.$$

Доказательство. Положим $M = \sup\{\varphi(4t)/\varphi(t)\colon 0 < t < 1/4\}$ и выберем число $\delta \in (0, 1)$ так, чтобы было справедливо утверждение леммы 6.1. Будем считать при этом, что $\overline{V}_{M,\delta} \subset U$, где U — окрестность из определения 1.1. Покажем, что если $\varepsilon \leqq \delta/4$ и $\overline{V}_\varepsilon \subset U$, то верно утверждение леммы 6.2.

Продолжим заданную функцию $u \in W_p^l(\Omega)$ в область V_ε. Построим последовательность $\{\varrho_k\}_{k \geqq 0}$ по правилу $\varrho_0 = \delta/2$, $\varrho_{k+1} = \varrho_k/2$, $k \geqq 0$. Положим

$$D_k = \{(y, z)\colon z \in (\varrho_{k+1}, \delta),\ |y| < \varphi(\varrho_{k-1})\}\,, \quad k \geqq 1\,,$$

$D = \bigcup_{k \geqq 1} D_k$, и заметим, что $D \subset V_{M,\delta}$. Пусть $\tilde{\mathscr{E}}$ – оператор, построенный в предыдущей лемме. Ясно, что $\tilde{\mathscr{E}}: W_p^l(\Omega) \to W_p^l(\Omega \cup D)$ – линейный непрерывный оператор продолжения. Положим $u_k = \tilde{\mathscr{E}} u|_{D_k}$. Каждой функции u_k поставим в соответствие функцию P_k вида (5.2) (где $\varepsilon = \varphi(\varrho_{k-1})$, $u = u_k$). При почти всех $z \in (\varrho_{k+1}, \delta)$ функция $P_k(\cdot, z)$ является полиномом степени $l - 1$ в R^{n-1}, коэффициенты которого являются линейными функционалами от $u_k(\cdot, z)$. По лемме 5.1 справедлива оценка

$$\begin{aligned} (6.6) \qquad & \left\|(D^\gamma P_k)(\cdot, z) - (D^\gamma u_k)(\cdot, z)\right\|_{p,B\varphi_{k-1}} \leqq \\ & \leqq c(l, p, n)\, \varphi_{k-1}^{l-|\gamma|} \sum_{|\alpha| = l} \left\|(D^\alpha u_k)(\cdot, z)\right\|_{p,B\varphi_{k-1}}, \end{aligned}$$

где α, γ – мультииндексы размерности $n - 1$, $|\gamma| \leqq l$, $z \in (\varrho_{k+1}, \delta)$, $\varphi_{k-1} = \varphi(\varrho_{k-1})$ и $B_{\varphi_{k-1}}$ – шар в R^{n-1}.

Пусть E_k – оператор продолжения из $(n - 1)$-мерного шара $B_{\varphi_{k-1}}$ на R^{n-1}, построенный в лемме 2.1, а T – оператор вида (4.1) с ядром, удовлетворяющим условиям (5.3). Рассмотрим еще набор функций $\{\eta_k\}_{k \geqq 1}$ со следующими свойствами: $\eta_k \in C_0^\infty(\varrho_{k+1}, \varrho_{k-1})$, $|\eta_k^{(s)}(\varrho)| \leqq c\varrho_k^{-s}$, $\varrho \in R^1$, $\sum_{k=1}^\infty \eta_k(\varrho) = 1$ при $\varrho \in (0, \varrho_1]$.

Положим $(\mathscr{E}_k f)(x) = (E_k f(\cdot, z))(y)$, где $x = (y, z)$, $z \in (\varrho_{k+1}, \varrho_{k-1})$, $y \in R^{n-1}$, $k \geqq 1$, и определим в цилиндре $C^{(k)} = \{x: |y| < \varrho_{k-1}, z \in (\varrho_{k+1}, \varrho_{k-1})\}$ функции v_k и w_k:

$$v_k = TP_k\,, \quad w_k = \mathscr{E}_k(u_k - v_k)\,.$$

Считая, что $\eta_k(z)\, v_k(x) = \eta_k(z)\, w_k(x) = 0$, если $z \notin (\varrho_{k+1}, \varrho_{k-1})$, положим

$$(6.7) \qquad v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(z)\, v_k(x)\,,$$

$$(6.8) \qquad w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(z)\, w_k(x)\,.$$

Последние две формулы имеют смысл при $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} C^{(k)}$ и, в частности, при $x \in V_\varepsilon$.

Покажем, что требуемый оператор продолжения $\mathscr{E}^*$ можно ввести следующим образом:

$$(\mathscr{E}^* u)(x) = \begin{cases} u(x)\,, & \text{если} \quad x \in \Omega \setminus V_\varepsilon\,, \\ v(x) + w(x)\,, & \text{если} \quad x \in V_\varepsilon\,. \end{cases}$$

В самом деле, пусть $x \in \Omega \cap V_\varepsilon$. Тогда

$$(\mathscr{E}^* u)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(z)\, u_k(x) = u(x)\,,$$

поэтому $\mathscr{E}^* u|_\Omega = u$. Далее, поскольку $v_k, w_k \in W_p^l(C^{(k)})$ (это следует из леммы 5.2), а во внешности любой окрестности V вершны пыка суммы (6.7), (6.8) содержат лишь конечное число ненулевых слагаемых, то $\mathscr{E}^* u \in W_p^l(\Omega^* \setminus \bar{V})$. Для доказательства леммы остается установить оценки

$$(6.9) \qquad \left\|\sigma \nabla_j v\right\|_{p,V_\varepsilon} \leqq c\left\|u\right\|_{p,l,\Omega}\,,$$

$$(6.10)\qquad \|\sigma\nabla_j w\|_{p,V_\varepsilon} \leqq c\|u\|_{p,l,\Omega},$$

где $0 \leqq j \leqq l$, $c = c(l, p, n, \Omega, \delta)$.

Введем при $k \geqq 1$ обозначения:

$$G_k = \{(y, z) \in R^n: z \in (\varrho_{k+1}, \varrho_k), |y| < \varrho_k\},$$
$$g_k = \{(y, z) \in R^n: z \in (\varrho_{k+1}, \varrho_{k-1}), |y| < \varphi_{k-1}\},$$
$$\hat{g}_k = \{(y, z) \in R^n: z \in (\varrho_{k+1}, \varrho_{k-1}), |y| < \varphi_k\}.$$

Обратимся к оценке (6.9). Имеем:

$$v|_{G_k} = \eta_k v_k + \eta_{k+1} v_{k+1} = v_k + \eta_{k+1}(v_{k+1} - v_k).$$

Полагая $\sigma_k = (\varphi_k/\varrho_k)^{(n-1)/p}$, находим:

$$(6.11)\qquad \begin{aligned} \|\sigma\nabla_j v\|_{p,G_k} &\leqq c\sigma_k\|\nabla_j v_k\|_{p,G_k} + \\ &+ c\sigma_k \sum_{s=0}^{j} \varrho_k^{s-j}\|\nabla_s(v_{k+1} - v_k)\|_{p,G_k} \leqq \\ &\leqq c\sigma_k\|\nabla_j v_k\|_{p,G_k} + c\sigma_k(\varrho_k^{-j}\|v_{k+1} - v_k\|_{p,G_k} + \\ &+ \varrho_k^{l-j}\|\nabla_l(v_{k+1} - v_k)\|_{p,G_k}).\end{aligned}$$

По лемме 5.2 справедливы оценки

$$\sigma_k\|v_k\|_{p,l,G_k} \leqq c\|u_k\|_{p,l,g_k},$$
$$\sigma_k\|v_{k+1}\|_{p,l,G_k} \leqq c\|u_{k+1}\|_{p,l,\hat{g}_k},$$

поэтому из (6.11) выводим, что

$$(6.12)\qquad \|\sigma\nabla_j v\|_{p,G_k} \leqq c\|\mathscr{E}u\|_{p,l,g_k} + c\sigma_k\varrho_k^{-j}\|v_{k+1} - v_k\|_{p,G_k}.$$

Для оценки величины $\|v_{k+1} - v_k\|_{p,G_k}$ выведем одно вспомогательное неравенство.

Пусть $0 < r \leqq \varrho \leqq 1$, Q — полином в R^{n-1} степени $l - 1$, B_r, B_ϱ — $(n-1)$-мерные шары. Тогда

$$(6.13)\qquad \|Q\|_{p,B_\varrho} \leqq c(n, p, l)(\varrho r^{-1})^{(n-1)/p} \sum_{|\gamma| \leqq l-1} \|D^\gamma Q\|_{p,B_r}\varrho^{|\gamma|}.$$

В самом деле,

$$|Q(y)|\,|_{B_\varrho} \leqq \sum_{|\gamma| \leqq l-1} |D^\gamma Q(0)|\,\varrho^{|\gamma|}/\gamma! \leqq cr^{-(n-1)/p} \sum_{|\gamma| \leqq l-1} \varrho^{|\gamma|}\|D^\gamma Q\|_{p,B_r},$$

откуда интегрированием по B_ϱ получаем (6.13).

Полагая $S_k = \{(y, z) \in R^n: z \in (\varrho_{k+1}, \varrho_{k-1}), |y| < \varrho_k\}$ и используя ограниченность оператора $T: L_p(S_k) \to L_p(G_k)$, находим, что

$$(6.14)\qquad \begin{aligned} \|v_{k+1} - v_k\|_{p,G_k} &\leqq c\|P_{k+1} - P_k\|_{p,S_k} = \\ &= c\big\| \|P_{k+1}(\cdot, z) - P_k(\cdot, z)\|_{p,B\varrho_k}\big\|_{p,(\varrho_{k+1},\varrho_{k-1})}.\end{aligned}$$

Применяя к внутренней норме неравенство (6.13) при $\varrho = \varrho_k$, $r = \varphi_k = \varphi(\varrho_k)$, оценим правую часть (6.14) выражением

$$(6.15)\qquad c\sigma_k^{-1}\sum_{|\gamma|\leqq l-1}\varrho_k^{|\gamma|}\big\|\,\|D_y^\gamma(P_{k+1}(y,z)-P_k(y,z)\|_{p,B\varphi_k}\big\|_{p,(\varrho_{k+1},\varrho_{k-1})}\,.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&\|(D^\gamma P_{k+1})(\cdot,z)-(D^\gamma P_k)(\cdot,z)\|_{p,B\varphi_k}\leqq\\ &\leqq\|(D^\gamma P_{k+1})(\cdot,z)-(D^\gamma u_{k+1})(\cdot,z)\|_{p,B\varphi_k}+\\ &\quad+\|(D^\gamma P_k)(\cdot,z)-(D^\gamma u_k)(\cdot,z)\|_{p,B_{k-1}}\end{aligned}$$

и к каждому слагаемому в правой части последней оценки применим неравенство Пуанкаре (6.6). Тогда внутренняя норма в (6.15) мажорируется величиной

$$c\sum_{i=k}^{k+1}\varphi_{i-1}^{l-|\gamma|}\|\nabla_l^{(y)}u_i(\cdot,z)\|_{p,B\varphi_{i-1}}\,,$$

где $\nabla_l^{(y)}$ означает градиент порядка l по переменным $y_1,\ldots,y_{n-1}$. Таким образом,

$$(6.16)\qquad \begin{aligned}&\varrho_k^{-j}\sigma_k\|v_{k+1}-v_k\|_{p,G_k}\leqq\\ &\leqq c\sum_{|\gamma|\leqq l-1}\varphi_k^{l-|\gamma|}\varrho_k^{|\gamma|-j}\sum_{i=k}^{k+1}\big\|\,\|\nabla_l^{(y)}u_i(y,z)\|_{p,B\varphi_{i-1}}\big\|_{p,(\varrho_{k+1},\varrho_{k-1})}\leqq\\ &\leqq c(\|\nabla_l u_{k+1}\|_{p,g_k}+\|\nabla_l u_k\|_{p,g_k})\leqq c\|\nabla_l\tilde{\mathscr{E}}u\|_{p,g_k}\,.\end{aligned}$$

Из (6.11) и (6.16) выводим оценку

$$(6.17)\qquad \|\sigma\nabla_j v\|_{p,G_k}\leqq c\|\tilde{\mathscr{E}}u\|_{p,l,g_k}\,.$$

Заметим, что $\overline{\bigcup_{k=1}^\infty G_k}\supset V_\varepsilon$, $\bigcup_{k=1}^\infty g_k\subset D$, и каждая точка $x\in D$ принадлежит не более чем двум множествам g_k, $k\geqq 1$. Отсюда возведением оценки (6.17) в степень p и суммированием по k получаем неравенство $\|\sigma\nabla_j v\|_{p,V_\varepsilon}^p\leqq c\|\tilde{\mathscr{E}}u\|_{p,l,D}^p$, из которого следует (6.9) при $p<\infty$. Если $p=\infty$, то оценка (6.9) непосредственно вытекает из (6.17).

Обратимся к оценке (6.10). Имеем:

$$\|\nabla_j w\|_{p,G_k}\leqq c\sum_{i=k}^{k+1}\sum_{s=0}^{j}\varrho_i^{s-j}\|\nabla_s w_i\|_{p,G_k}\,,\quad 0\leqq j\leqq l\,.$$

Применяя лемму 5.2 (см. оценку (5.5)), находим, что

$$\begin{aligned}\|\nabla_s w_k\|_{p,G_k}&\leqq c\varphi_{k-1}^{l-s}\|u_k\|_{p,l,g_k}\,,\\ \|\nabla_s w_{k+1}\|_{p,G_k}&\leqq c\varphi_k^{l-s}\|u_{k+1}\|_{p,l,g_k}\,.\end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\|\nabla_j w\|_{p,G_k}\leqq c\|\tilde{\mathscr{E}}u\|_{p,l,g_k},\ k\geqq 1\,.$$

Из последней оценки выводим неравенство $\|\nabla_j w\|_{p,V_\varepsilon}\leqq c\|\tilde{\mathscr{E}}u\|_{p,l,D}$, откуда следует (6.10). Лемма доказана.

7. ОПЕРАТОР ПРОДОЛЖЕНИЯ: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$, СЛУЧАЙ $lp > n-1$

Основным результатом настоящего параграфа является следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Пусть $lp > n - 1$, $p \in [1, \infty]$, Ω — область в R^n с вершиной внешнего пика на границе. Пусть еще функция φ, описывающая заострение пика, удовлетворяет условию* (2.1).

(i) *Положим*

$$\sigma(x) = \begin{cases} (\varphi(|x|)\,|x|^{-1})^{(n-1)/p}, & \textit{если } x \in R^n \setminus \bar{\Omega}, \quad |x| < 1, \\ 1 & \textit{при остальных } x \in R^n. \end{cases}$$

Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$.

(ii) *Пусть весовая функция σ при малых $|x|$ и $x \in R^n \setminus \bar{\Omega}$ зависит лишь от $|x|$ и возрастает. Если существует ограниченный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$, то при $x \in R^n \setminus \bar{\Omega}$ и достаточно малых $|x|$ верна оценка*

$$\sigma(x) \leqq c(\varphi(|x|)/|x|)^{(n-1)/p}.$$

Следствие 7.1. *Область Ω, описанная в условии теоремы* 7.1, *принадлежит классу EW_∞^l, $l = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство теоремы 7.1. Пусть V_ε — конус, определенный в условии леммы 6.2. Будем считать число ε столь малым, что справедливы утверждение леммы 6.2 и включения $\bar{V}_\varepsilon \subset U$, $\bar{B}_\varepsilon \subset U$; здесь U — окрестность вершины пика из определения 1.1. Построим линейный непрерывный оператор продолжения $\mathscr{E}^{(1)}$: $W_{p,\sigma}^l(\Omega^*) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$, где $\Omega^* = \Omega \cup V_\varepsilon$, а $\sigma(x) = (\varphi(|x|)/|x|)^{(n-1)/p}$ при $|x| < 1$ и $\sigma(x) = 1$ при $|x| \geqq 1$.

Пусть $v \in W_{p,\sigma}^l(\Omega^*)$. Продолжим функцию v на R^n. Предположим сначала, что $\operatorname{supp} v \subset V_\varepsilon \cap B_{\varepsilon/4}$. Определим последовательность $\{r_k\}_{k \geqq 0}$ по правилу: $r_0 = \varepsilon$, $r_{k+1} = r_k/2$, $k \geqq 0$, и положим $V^{(k)} = V_\varepsilon \cap \{x \in R^n : r_{k+1} < |x| < r_k\}$ при $k \geqq 1$. Пусть $\mathscr{E}_k$: $W_p^l(V^{(k)}) \to W_p^l(R^n)$ — линейный оператор продолжения, удовлетворяющий условию

$$\|\nabla_s(\mathscr{E}_k f)\|_{p,R^n} \leqq c(l, p, n)\,(r_k^{-s}\|f\|_{p,V^{(k)}} + \|\nabla_s f\|_{p,V^{(k)}}), \tag{7.1}$$

где $0 \leqq s \leqq l$, $f \in W_p^l(V^{(k)})$ (см. лемму 2.1). Обозначим через P_k полином в R^n степени $l - 1$ с коэффициентами, являющимися линейными функционалами от v, для которого справедлива оценка (см. лемму 5.1)

$$\|\nabla_s(v - P_k)\|_{p,V^{(k)}} \leqq c(l, p, n)\, r_k^{l-s}\|\nabla_l v\|_{p,V^{(k)}}. \tag{7.2}$$

Рассмотрим еще последовательность функций $\{\eta_k\}_{k \geqq 1}$ такую, что $\eta_k \in C_0^\infty(r_{k+1}, r_{k-1})$, $|\eta_k^{(s)}(r)| \leqq c(l, \varepsilon)\, r_k^{-s}$, $0 \leqq s \leqq l$, $r \in R^1$, $\sum_{k=1}^\infty \eta_k(r) = 1$ при $r \in (0, r_1]$.

Проверим, что для функции v с указанными выше свойствами оператор продолжения $\mathscr{E}^{(0)}$ из области Ω^* на R^n может быть задан формулой

$$(7.3) \qquad (\mathscr{E}^{(0)}v)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(|x|)(P_k + \mathscr{E}_k(v - P_k))(x)\,.$$

Имеем $v|_{V^{(1)}} = 0$, откуда $P_1 = 0$. Поэтому в сумме (7.3) присутствуют лишь слагаемые с номерами $k \geqq 2$. Если $|x| \geqq \varepsilon/2$, то $\eta_k(|x|) = 0$, $k \geqq 2$, и, таким образом, $\operatorname{supp} \mathscr{E}^{(0)}v \subset B_{\varepsilon/2}$. Пусть $x \in B_{\varepsilon/2} \cap \Omega^*$. Так как $\bar{B}_\varepsilon \subset U$, то $x \in B_{\varepsilon/2} \cap V_\varepsilon$ и

$$(\mathscr{E}^{(0)}v)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(|x|)\, v(x) = v(x)\,,$$

Итак, $\mathscr{E}^{(0)}v|_{\Omega^*} = v$. Заметим далее, что во внешности любой окрестности V точки 0 сумма (7.3) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых. Отсюда следует включение $\mathscr{E}^{(0)}v \in W_p^l(R^n \setminus \bar{V})$. Положим

$$v_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(|x|)\, P_k(x)\,, \quad v_2(x) = (\mathscr{E}^{(0)}v)(x) - v_1(x)\,, \quad x \in R^n\,,$$

и установим, что

$$(7.4) \qquad \|\sigma \nabla_j v_i\|_{p,R^n} \leqq c(l, {}_\Omega, n, \varepsilon, \varphi)\, \|v\|_{W^l{}_{p,\sigma}(\Omega^*)}\,, \quad j \leqq l\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Пусть $G_k = \{x \in R^n \colon r_{k+1} < |x| < r_k\}$, $k \geqq 1$. Тогда

$$v_1(x)|_{G_k} = P_k(x) + \eta_{k+1}(|x|)(P_{k+1}(x) - P_k(x))\,,$$

откуда

$$(7.5) \qquad \begin{aligned} \|(\nabla_j v_1)\,\sigma\|_{p,G_k} &\leqq c\sigma_k \|\nabla_j P_k\|_{p,G_k} + \\ &+ c\sigma_k \sum_{s=0}^{j} r_k^{s-j} \|\nabla_s(P_{k+1} - P_k)\|_{p,G_k}\,, \end{aligned}$$

где $\sigma_k = (\varphi(r_k)/r_k)^{(n-1)/p}$. Применяя теперь оценку $\|Q\|_{p,G_k} \leqq c\|Q\|_{p,V^{(k)} \cap G_k}$, верную для любого полинома Q и константы, зависящей лишь от n, p и степени полинома, а затем используя неравенство (7.2), выводим из (7.5), что

$$\begin{aligned} &\|\sigma \nabla_j v_1\|_{p,G_k} \leqq \\ &\leqq c\sigma_k(\|\nabla_j v\|_{p,V^{(k)}} + \|\nabla_j(v - P_k)\|_{p,V^{(k)}}) + \\ &+ c\sigma_k \sum_{s=0}^{j} r_k^{s-j} \sum_{i=k}^{k+1} \|\nabla_s(v - P_i)\|_{p,V^{(i)}} \leqq \\ &\leqq c(\|\sigma \nabla_j v\|_{p,V^{(k)}} + \sum_{i=k}^{k+1} \|\sigma \nabla_l v\|_{p,V^{(i)}})\,. \end{aligned}$$

Принимая во внимание конечную кратность покрытия $\{V^{(k)}\}_{k \geqq 1}$, а также включение $\operatorname{supp} v_1 \subset B_{\varepsilon/2}$, придем к оценке (7.4) при $i = 1$.

Обратимся к (7.4) при $i = 2$. Имеем

$$\|\sigma \nabla_j v_2\|_{p,G_k} \leqq c\sigma_k \sum_{m=k}^{k+1} \sum_{s=0}^{j} r_m^{s-j} \|\nabla_s \mathscr{E}_m(v - P_m)\|_{p,R^n}\,,$$

откуда при помощи (7.1) и (7.2) выводим, что

$$\begin{aligned}&\|\sigma\nabla_j v_2\|_{p,G_k} \leqq \\ &\leqq \sigma_k \sum_{m=k}^{k+1} \sum_{s=0}^{j} \left(r_m^{-j}\|v - P_m\|_{p,V^{(m)}} + r_m^{s-j}\|\nabla_s(v - P_m)\|_{p,V^{(m)}}\right) \leqq \\ &\leqq c\sigma_k \sum_{m=k}^{k+1} \|\nabla_l v\|_{p,V^{(m)}} \leqq c\|\sigma\nabla_l v\|_{p,V^{(k)}\cup V^{(k+1)}} .\end{aligned}$$

Отсюда получаем (7.4) при $i = 2$.

Итак, оператор продолжения $\mathscr{E}^{(0)}$ на области Ω^* на R^n имеет вид (7.3) в случае когда $\operatorname{supp} v \subset V_\varepsilon \cap B_{\varepsilon/4}$. В общем случае $v \in W^l_{p,\sigma}(\Omega^*)$ введем срезающую функцию $\psi \in C_0^\infty(B_{\varepsilon/4})$ такую, что $\psi|_{B_{\varepsilon/8}} = 1$. Положим $\bar{v} = \psi v$, $\tilde{v} = (1 - \psi) v$ и заметим, что $\tilde{v} \in W^l_p(\Omega^*)$, причем $\|\tilde{v}\|_{p,l,\Omega^*} \leqq c\|v\|_{W^l_{p,\sigma}(\Omega^*)}$. Так как область Ω^* имеет липшицеву границу, то существует линейный непрерывный оператор продолжения $\mathscr{E}^{(2)}$: $W^l_p(\Omega^*) \to W^l_p(R^n)$ (см. [4]). Теперь ясно, что оператор $v \to \to \mathscr{E}^{(1)}v$, заданный формулой $\mathscr{E}^{(1)}v = \mathscr{E}^{(0)}\bar{v} + \mathscr{E}^{(2)}\tilde{v}$, является линейным ограниченным оператором продолжения: $W^l_{p,\sigma}(\Omega^*) \to W^l_{p,\sigma}(R^n)$. Для завершения доказательства п. (i) теоремы остается сослаться на лемму 6.2. Пусть $\mathscr{E}^*$: $W^l_p(\Omega) \to W^l_{p,\sigma}(\Omega^*)$ – оператор, построенный в лемме 6.2. Тогда $\mathscr{E} = \mathscr{E}^{(1)} \circ \mathscr{E}^*$ – линейный непрерывный оператор продолжения: $W^l_p(\Omega) \to W^l_{p,\sigma}(R^n)$. Доказательство п. (i) теоремы закончено.

(ii) Пусть $f \in C_0^\infty(1, 2)$, $f(z) \geqq 0$ при $z \in (1, 2)$, $f(z) = 1$ при $z \in [4/3, 5/3]$. Для достаточно малого $\varrho > 0$ положим $u_\varrho|_{\Omega\setminus U} = 0$, $u_\varrho(x) = f(z/\varrho)$, если $x \in \Omega \cap U$ (здесь, как и выше, $x = (y, z)$, $y \in R^{n-1}$, $z \in R^1$, а U – окрестность вершины пика из определения 1.1). Отметим, что $u_\varrho \in C^\infty(\Omega) \cap W^l_p(\Omega)$. Пусть $\mathscr{E}$: $W^l_p(\Omega) \to \to W^l_{p,\sigma}(R^n)$ – ограниченный оператор продолжения в весовое пространство $W^l_{p,\sigma}(R^n)$ с монотонным в окрестности точки 0 весом $\sigma(x)$, зависящим только от $|x|$. При почти всех $y \in R^{n-1}$ имеем $(\mathscr{E}u_\varrho)(y, \cdot) \in W^l_p(R^1)$. Поэтому функции $\mathscr{E}u_\varrho$ можно поставить в соответствие функцию P, заданную на R^n, которая при фиксированном $y \in R^{n-1}$ является полиномом переменной z степени $l - 1$ и удовлетворяет в интервале $[(y, \varrho/2), (y, 2\varrho)]$ неравенству

$$\begin{aligned}&\|(\mathscr{E}u_\varrho)(y, \cdot) - P(y, \cdot)\|_{p,(\varrho/2,2\varrho)} \leqq \\ &\leqq c\varrho^l\|D_z^l(\mathscr{E}u_\varrho)(y, z)\|_{p,(\varrho/2,2\varrho)}\end{aligned} \tag{7.6}$$

(см. лемму 5.1). При этом можно считать, что

$$P(y, z) = \sum_{k=0}^{l-1} a_k(y)\, z^k , \tag{7.7}$$

где

$$a_k(y) = \varrho^{-1-k} \int_{\varrho/2}^{\varrho} \psi_k(t/\varrho)\,(\mathscr{E}u_\varrho)(y, t)\, \mathrm{d}t , \tag{7.8}$$

а $\{\psi_k\}_{k=0}^{l-1}$ — некоторые стандартные функции класса $C_0^\infty(1/2, 1)$. Положим

$$v_\varrho(y) = \varrho^{-1}\int_\varrho^{2\varrho}((\mathscr{E}u_\varrho)(y, z) - P(y, z))\,dz\,, \quad y \in R^{n-1}\,. \tag{7.9}$$

Так как $(0, z) \in \Omega$ при $z \in (0, 1)$, то для достаточно малого $\varrho > 0$ имеем $(\mathscr{E}u_\varrho)(0, z) = u_\varrho(0, z)$, $z \in (\varrho/2, 2\varrho)$. Заметим еще, что при $y = 0$ все коэффициенты (7.8) равны нулю. Отсюда получаем

$$v_\varrho(0) = \varrho^{-1}\int_\varrho^{2\varrho} u_\varrho(0, z)\,dz = \int_1^2 f(z)\,dz = c_0 > 0\,.$$

Из теоремы С. Л. Соболева о вложении $W_p^l(B_\varrho) \subset C(\bar{B}_\varrho)$ (здесь B_ϱ — шар в R^{n-1}) следует, что

$$\begin{aligned} c_0 &\leqq c(\varrho^{l-(n-1)/p}\|\nabla_l v_\varrho\|_{p,B_\varrho} + \varrho^{(1-n)/p}\|v_\varrho\|_{p,B_\varrho}) \leqq \\ &\leqq c\varrho^{(1-n)/p}\|v_\varrho\|_{p,R^{n-1}} + c\varrho^{l-(n-1)/p}\|\nabla_l v_\varrho\|_{p,R^{n-1}}\,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Оценим правую часть неравенства (7.10). Имеем:

$$D^\alpha v_\varrho(y) = \varrho^{-1}\int_\varrho^{2\varrho} D_y^\alpha((\mathscr{E}u_\varrho)(y, z) - P(y, z))\,dz\,, \quad |\alpha| = l\,. \tag{7.11}$$

С помощью неравенства Гельдера из (7.8) находим, что

$$|D_y^\alpha a_k(y)| \leqq c\varrho^{-k-1/p}\|D_y^\alpha(\mathscr{E}u_\varrho)(y, \cdot)\|_{p,(\varrho/2,\varrho)}\,.$$

Следовательно,

$$|D_y^\alpha P(y, z)| \leqq c\varrho^{-1/p}\|D_y^\alpha(\mathscr{E}u_\varrho)(y, \cdot)\|_{p,(\varrho/2,\varrho)}\,, \quad z \in (\varrho/2, 2\varrho)\,.$$

Из последней оценки и (7.11) выводим неравенство

$$\|\nabla_l v_\varrho\|_{p,R^{n-1}} \leqq c\varrho^{-1/p}\|\nabla_l(\mathscr{E}u_\varrho)\|_{p,\Pi_\varrho}\,, \tag{7.12}$$

где $\Pi_\varrho = \{(y, z)\colon y \in R^{n-1},\ z \in (\varrho/2, 2\varrho)\}$. Для оценки $\|v_\varrho\|_{p,R^{n-1}}$ применим неравенство Гельдера к интегралу (7.9), а затем воспользуемся слотношением (7.6). В результате получим, что

$$\|v_\varrho\|_{p,R^{n-1}} \leqq c\varrho^{l-1/p}\|\nabla_l(\mathscr{E}u_\varrho)\|_{p,\Pi_\varrho}\,. \tag{7.13}$$

Из (7.10), (7.12) и (7.13) найдем:

Принимая во внимание ограниченность оператора $\mathscr{E}\colon W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$ и монотонность σ, выводим неравенство

$$c_1\varrho^{n/p-l}\sigma(\varrho/2) \leqq \|\sigma\nabla_l(\mathscr{E}u_\varrho)\|_{p,\Pi_\varrho} \leqq c_2\|u_\varrho\|_{p,l,\Omega}\,.$$

Так как $\|u_\varrho\|_{p,l,\Omega} \leqq c\varrho^{1/p-l}\varphi(2\varrho)^{(n-1)/p}$, то

$$\sigma(\varrho/2) \leqq c(\varphi(2\varrho)/\varrho)^{(n-1)/p} \leqq c_3(\varphi(\varrho/2)/\varrho)^{(n-1)/p}\,.$$

Теорема 7.1 доказана.

Пусть Ω – область в R^2 с компактной границей $\partial\Omega$. Через 0 обозначим некоторую точку на $\partial\Omega$ и предположим, что $\partial\Omega \setminus 0$ – кривая класса $C^{0,1}$. Поместим в точку 0 начало декартовых координат (x, y). Пусть φ_-, φ_+ – функции из $C^{0,1}[0, 1]$, удовлетворяющие условиям $\varphi_-(t), \varphi_+(t) = o(t)$ при $t \to +0$, $\varphi_-(t) < \varphi_+(t)$, $t \in (0, 1]$.

Определение 8.1. Точка 0 называется *вершиной пика, направленного внутрь* Ω, если существует такая окрестность U этой точки, что $U \setminus \bar{\Omega} = \{(x, y) \colon x \in (0, 1), \varphi_-(x) < y < \varphi_+(x)\}$.

Установим два вспомогательных утверждения, которые понадобятся при доказательстве основной теоремы настоящего параграфа.

Лемма 8.1. *Пусть* 0 *— вершина пика, направленного внутрь плоской области* Ω *и* U *— окрестность из определения* 8.1. *Положим* $G = U \setminus \bar{\Omega}$, $\Pi = \{(x, y) \colon x \in (0, 1),\ y \in R^1\}$.

Для любого натурального l *существует заданная на* Π *функция* ψ *класса* $C^{(l-1)}(\Pi) \cap C^\infty(G)$ *такая, что* $\psi(x, y) = 1$ *при* $y > \varphi_+(x)$, $\psi(x, y) = 0$ *при* $y < \varphi_-(x)$, $|\nabla_s \psi(x, y)||_G \leqq c(\varphi_+(x) - \varphi_-(x))^{-s}$, $s = 0, \ldots, l$.

Доказательство. Обозначим через $d_+(x, y)$ и $d_-(x, y)$ регуляризованные расстояния (см. [2], гл. 6) от точки (x, y) до множеств $F_+ = \{x \in [0, 1], y \geqq \varphi_+(x)\}$ и $F_- = \{x \in [0, 1],\ y \leqq \varphi_-(x)\}$ соответственно. Проверим, что требуемую функцию ψ можно задать формулой

$$\psi = d_-^l/(d_+^l + d_-^l)\,. \tag{8.1}$$

Включение $\psi \in C^\infty(G) \cap C^{(l-1)}(\Pi)$, а также равенства $\psi(x, y) = 0$ при $y < \varphi_-(x)$, $\psi(x, y) = 1$ при $y > \varphi_+(x)$ вытекают из следующих свойств регуляризованного расстояния: $d_-|_{F_-} = 0$, $d_+|_{F_+} = 0$, $|\nabla_k d_-||_G \leqq c d_-^{1-k}$, $|\nabla_k d_+||_G \leqq c d_+^{1-k}$, $k = 0, 1, \ldots$ (см. [2]). Кроме того, по индукции нетрудно вывести, что

$$|\nabla_k d_-||_G \leqq c d_-^{l-k}, \quad |\nabla_k (d_+^l + d_-^l)^{-1}||_G \leqq c(d_+ + d_-)^{-l-k}, \quad k \leqq l\,.$$

Используя указанные оценки, получим:

$$|\nabla_s \psi||_G \leqq c \sum_{k=0}^{s} d_-^{l+k-s}(d_+ + d_-)^{-l-k} \leqq$$
$$\leqq c \sum_{k=0}^{s} (d_-/(d_+ + d_-))^{l+k-s}(d_+ + d_-)^{-s} \leqq c_1(d_+ + d_-)^{-s}\,.$$

Так как на множестве G справедливы соотношения $d_+(x, y) \sim \varphi_+(x) - y$, $d_-(x, y) \sim y - \varphi_-(x)$, то $d_+(x, y) + d_-(x, y) \sim \varphi_+(x) - \varphi_-(x)$. Лемма доказана.

Лемма 8.2. *Пусть множество* G *— то же, что и в лемме* 8.1, *весовая фунция* σ *задана в* G, *положительна, зависит только от* x *и отделена от нуля во внешности любой окрестности точки* 0. *Пусть* $u \in W_{p,\sigma}^l(G)$, $\partial^k u/\partial y^k|_{y=\varphi_-(x)+0} = 0$

при $k = 0, \ldots, l-1$ *и п. в.* $x \in (0, 1)$. *Тогда верна оценка*

$$\|f\sigma(\varphi_+ - \varphi_-)^{1/p-l}\|_{p,(0,1)} \leqq c\|\sigma\nabla_l u\|_{p,G}, \tag{8.2}$$

где $f(x) = u(x, \varphi_+(x))$.

Доказательство. Применяя при $x \in (0, 1)$ одномерную формулу Тейлора по переменной y на отрезке $[\varphi_-(x), \varphi_+(x)]$, находим, что

$$u(x, \varphi_+(x)) = \frac{1}{(l-1)!}\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \frac{\partial^l u}{\partial y^l}(x, y)(\varphi_+(x) - y)^{l-1}\, dy.$$

Используя неравенство Гельдера, придем к оценке

$$|f(x)|(\varphi_+(x) - \varphi_-(x))^{1/p-l} \leqq c\left(\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \left|\frac{\partial^l u}{\partial y^l}(x, y)\right|^p dy\right)^{1/p},$$

интегрируя которую по промежутку $(0, 1)$, получим (8.2) с константой $c = 1/(l-1)!$. Доказательство леммы закончено.

Сформулируем основной результат настоящего параграфа.

Теорема 8.1. *Пусть* Ω *— плоская область с верщиной пика, направленного внутрь* Ω, $p \in [1, \infty]$, $l = 1, 2, \ldots$.

(i) *Положим* $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$,

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} (\varphi(x)\, x^{-1})^{l-1/p}, & \text{если } (x, y) \in U \setminus \bar{\Omega}, \\ 1 & \text{в дополнении к } U \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^2)$.

(ii) *Пусть функция* $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ *возрастает и удовлетворяет условию* (2.1), *а весовая функция* σ *на* $U \setminus \bar{\Omega}$ *зависит только от* x *и возрастает. Если существует ограниченный оператор продолжения:* $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^2)$, *то на множестве* $U \setminus \bar{\Omega}$ *при достаточно малых* x *справедлива оценка*

$$\sigma(x) \leqq c(\varphi(x)/x)^{l-1/p}, \quad c = \text{const}.$$

Из теоремы 8.1 вытекает утверждение:

Следствие 8.1. *Плоская область с вершиной внутреннего пика на границе принадлежит классу* EW_1^1.

Известно (см. [3], § 1.5), что при любом $p \in (1, \infty)$, $p \neq 2$, существует плоская односвязная область, не являющаяся квазикругом и входящая в класс EW_p^1. Используя следствие 8.1, мы сейчас дополним этот результат.

Следствие 8.2. *Класс плоских односвязных областей, принадлежащих* EW_1^1, *не исчерпывается квазикругами.*

Доказательство теоремы 8.1. (i) Пусть a — такое число из промежутка $(0, 1]$, что $\varphi_+(x) < x$ при $x \in (0, a]$ и множество $U_+ = \{(x, y)\colon 0 < x < a,$

$\varphi_+(x) < y < x\}$ содержится в окрестности U из определения 8.1. Не уменьшая общности, будем далее считать, что $a = 1$. Продолжим заданную функцию $u \in W_p^l(\Omega)$ на всю плоскость. Рассмотрим несколько случаев.

1°. Пусть $u \in W_p^l(\Omega)$, $u = 0$ вне множества U_+. Доопределяя функцию u нулем на множестве $R^2 \setminus (\Omega \cup U)$ получим, что $u \in W_p(R^2 \setminus \bar{G})$, где $G = U \setminus \Omega$. Положим $D = U_+ \cup \{(x, y): x = 1, \ \varphi_+(1) < y < 1\} \cup \{(x, y): x > 1, \ y \in R^1\}$. Так как $D \subset R^2 \setminus \bar{G}$ и область D имеет липшицеву границу, то существует линейный непрерывный оператор продолжения $\mathscr{E}_+: W_p^l(D) - W_p^l(R^2)$ (см. [2]). Пусть ψ – функция, построенная в лемме 8.1. Положим

$$\mathscr{E}_1 u = \begin{cases} u \text{ вне множества } G\,, \\ \psi\mathscr{E}_+ u \text{ на множестве } G \end{cases} \tag{8.3}$$

и проверим, что $\mathscr{E}_1 u \in W_{p,\sigma}^l(R^2)$ и верна оценка

$$\|(\nabla_k \mathscr{E}_1 u)\, \sigma\|_{p,G} \leqq c\|u\|_{p,l,\Omega}\,, \quad 0 \leqq k \leqq l\,. \tag{8.4}$$

Пусть $\Pi = \{(x, y) \in R^2: x \in (0, 1), \ y \in R^1\}$. Заметим, что при любом $\varepsilon > 0$ для функции, заданной формулой (8.1), справедливо включение $\psi \in W_\infty^l(\Pi \setminus \bar{B}_\varepsilon)$, и, значит $\psi\mathscr{E}_+ u \in W_p^l(\Pi \setminus \bar{B}_\varepsilon)$. Кроме того, по лемме 8.1 функция $\psi\mathscr{E}_+ u$ совпадает с u на каждом из множеств $\Pi \cap \{y < \varphi_-(x)\}$, $\Pi \cap \{y > \varphi_+(x)\}$. Таким образом, $\mathscr{E}_1 u \in W_p^l(R^2 \setminus \bar{B}_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Обратимся к оценке (8.3). Ясно, что $\|\psi\mathscr{E}_+ u\|_{p,G} \leqq c\|u\|_{p,l,\Omega}$. Поэтому при $k = 0$ оценка (8.4) верна. Пусть $1 \leqq k \leqq l$. Принимая во внимание лемму 8.1, получим:

$$\begin{aligned} |(\nabla_k \mathscr{E}_1 u)(x, y)|\,|_G &\leqq c \sum_{s=0}^{k} |(\nabla_{k-s}\psi)(x, y)|\, |(\nabla_s \mathscr{E}_+ u)(x, y)| \leqq \\ &\leqq c \sum_{s=0}^{k} \varphi(x)^{s-k}\, |(\nabla_s \mathscr{E}_+ u)(x, y)|\,. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Зафиксируем число s, $s < k$, и обозначим через v любую производную функции $\mathscr{E}_+ u$ порядка s. Так как $v(x, \cdot) \in W_p^{l-s}(R^1)$ при почти всех $x \in (0, 1)$, то справедлива одномерная формула Тейлора с остатком в интегральной форме на отрезке $[(x, y), (x, x)]$. Замечая, что $v(x, t) = 0$ при $t > x$, находим:

$$v(x, y) = -\frac{1}{(l-s-1)!} \int_y^x \frac{\partial^{l-s} v}{\partial t^{l-s}}(x, t)\,(y-t)^{l-s-1}\,\mathrm{d}t\,, \quad (x, y) \in G\,.$$

Применяя неравенство Гельдера, придем к оценке

$$x^{s-l+1/p}|v(x, y)| \leqq c\left(\int_{\varphi_-(x)}^{x} |(\partial^{l-s} v)(x, t)/\partial t^{l-s}|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

С помошью последней оценки получим, что

$$\begin{aligned} \|\sigma\varphi^{s-k} v\|_{p,G} &\leqq c\|\varphi^{-1/p} x^{s-l+1/p} v\|_{p,G} \leqq \\ &\leqq c\left(\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\varphi_-(x)}^{x} \left|\frac{\partial^{l-s} v}{\partial t^{l-s}}(x, t)\right|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqq c\|\mathscr{E}_+ u\|_{p,l,R^2}\,. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Из (8.5), (8.6) и неравенства $\|\mathscr{E}_+ u\|_{p,l,R^2} \leqq c\|u\|_{p,l,\Omega}$ вытекает (8.4). Итак, в случае 1° требуемый оператор продолжения задается формулой (8.3).

2°. Пусть $u \in W_p^l(\Omega)$, $u|_{\Omega \setminus U} = 0$. Доопределяя функцию u нулем вне окрестности U, получим, что $u \in W_p^l(R^2 \setminus \bar{G})$. Положим $\hat{D} = R^2 \setminus \{(x, y): x \in [0, 1],\ y \in [\varphi_-(x), x]\}$. Так как область $\hat{D}$ имеет липшицеву границу, то существует линейный непрерывный оператор продолжения $\mathscr{E}_-: W_p^l(\hat{D}) \to W_p^l(R^2)$. Ясно, что $u - \mathscr{E}_- u \in W_p^l(\Omega)$, $(u - \mathscr{E}_- u)|_{\Omega \setminus U_+} = 0$, поэтому для функции $u - \mathscr{E}_- u$ выполнены требования, сформулированные в п. 1°. Таким образом, требуемый оператор продолжения $\mathscr{E}_2$ дается формулой

$$\mathscr{E}_2 u = \mathscr{E}_- u + \mathscr{E}_1(u - \mathscr{E}_- u) .$$

3°. Общий случай. Выберем такое число $r > 0$, что $\bar{B}_{2r} \subset U$, и рассмотрим срезающую функцию $\eta \in C_0^\infty(B_{2r})$, равную единице в шаре B_r. Произвольную функцию $u \in W_p^l(\Omega)$ представим в виде $u = \eta u + (1 - \eta)\, u$. Первое слагаемое удовлетворяет условиям, сформулированным в п. 2°, а функция $(1 - \eta)\, u$, доопределенная нулем на множестве $B_r \setminus \Omega$, принадлежит пространству $W_p^l(\Omega \cup B_r)$. Оператор продолжения $\mathscr{E}$ с общем случае дается формулой

$$\mathscr{E} u = \mathscr{E}_2(\eta u) + \mathscr{E}^{(r)}((1 - \eta)\, u) ,$$

где $\mathscr{E}^{(r)}: W_p^l(B_r \cup \Omega) \to W_p^l(R^2)$ – непрерывный линейный оператор продолжения из области $B_r \cup \Omega$ с липшицевой границей. Доказательство п. (i) теоремы закончено.

(ii) Рассмотрим на прямой две функции g и h класса $C^\infty(R^1)$ такис, что $g(t) = h(t) = 0$ при $t \geqq 1$, $g(t) = 0$ при $t \leqq 1/8$, $g|_{(1/4,1/2)} = h|_{(-\infty,1/2)} = 1$. Для достаточно малого $\varrho > 0$ положим $u_\varrho(x, y) = g(x/\varrho)\, h(y/\varrho)$, если $x \in (0, \varrho)$, $y \in (\varphi_+(x), \varrho)$ и $u_\varrho(x, y) = 0$ в остальных точках области Ω. Ясно, что $u_\varrho \in C^\infty(\Omega)$ и $\|u_\varrho\|_{p,l,\Omega} \leqq c\varrho^{2/p-l}$. Пусть $\mathscr{E}: W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^2)$ – ограниченный оператор продолжения в весовое пространство с весом σ, удовлетворяющим условиям теоремы. Положим $G = U \setminus \bar{\Omega}$, $f_\varrho(x) = (\mathscr{E} u_\varrho)\,(x, \varphi_+(x))$, $x \in (0, 1)$. Для достаточно малых ϱ имеем $f|_{(\varrho/4,\varrho/2)} = 1$, и, кроме того,

$$\|\sigma \nabla_l(\mathscr{E} u_\varrho)\|_{p,G} \leqq c\|u_\varrho\|_{p,l,\Omega} \leqq c_1 \varrho^{2/p-l} .$$

Принимая во внимание лемму 8.2 и монотонность функций σ и φ, получаем, что

$$\sigma(\varrho/4)\, \varphi(\varrho/4)^{l-1/p}\, (\varrho/4)^{1/p} \leqq \|f_\varrho \sigma \varphi^{l-1/p}\|_{p,(0,1)} \leqq c\varrho^{2/p-l} ,$$

откуда

$$\sigma(\varrho/4) \leqq c(\varphi(\varrho/4)/\varrho)^{l-1/p} .$$

Теорема доказана.

Начнем со следующего простого утверждения.

Лемма 9.1. *Пусть для любого* $\varepsilon > 0$ *выполнено включение* $u \in W_p^l(R^n \setminus \bar{B}_\varepsilon)$, $n \geqq 2$. *Если, кроме того,* $\|u\|_{p,l,R^n} < \infty$, *то* $u \in W_p^l(R^n)$.

Доказательство. При $l = 1$ утверждение леммы следует из того, что абсолютно непрерывная на почти всех прямых, параллельных координатным осям функция, первые производные которой, понимаемые в классическом смысле, принадлежат $L_p(R^n)$, сама принадлежит $L_p^1(R^n)$ (см. например, [3], § 1.1). При $l > 1$ утверждение леммы легко выводится по индукции.

Пусть Ω — область в R^n с вершиной внешнего пика на границе. При построении оператора продолжения $\mathscr{E}$: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$, $q < p$, будем различать случаи $lq < n - 1$, $lq = n - 1$ и $lq > n - 1$. Следующие три теоремы посвящены каждому из указанных случаев.

Теорема 9.1. *Пусть* 0 — *вершина пика, направленного во внешность ограниченной области* $\Omega \subset R^n$, *и пусть* $1 < p \leqq \infty$. *Предположим, что* $lq < n - 1$, $q \in [1, p)$ *или* $l = n - 1$, $q = 1$.

(i) *Если*

$$1/q - 1/p = l(\beta - 1)/((n - 1)\beta + 1) \tag{9.1}$$

и

$$\int_0^1 \left(\frac{t^\beta}{\varphi(t)}\right)^{n/(\beta - 1)} \frac{dt}{t} < \infty, \tag{9.2}$$

то существует линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$.

(ii) *Если существует ограниченный оператор продолжения:* $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$, *а функция* φ, *описывающая заострение пика, удовлетворяет условию* (2.1), *то выполнено соотношение* (9.2), *где* β *определеяется равенством* (9.1).

Доказательство. (i) Проверим, что пространство $W_p^l(\Omega)$ вложено в $W_{q,\tau}^l(\Omega)$, где весовая функция τ равна 1 на множестве $\Omega \setminus U$ и $\tau(x) = (z/\varphi(z))^l$ при $x \in \Omega \cap U$; здесь $x = (y, z)$, а U — окрестность из определения 1.1. Достаточно установить для любой функции $u \in W_p^l(\Omega)$ оценку

$$\|\tau(\nabla_j u)\|_{q,U \cap \Omega} \leqq c\|\nabla_j u\|_{p,U \cap \Omega}, \quad 0 \leqq j \leqq l. \tag{9.3}$$

Применяя неравенство Гельдера, получим, что

$$\|\tau\nabla_j u\|_{q,U\cap\Omega} \leqq \left(\int_\Omega \tau^{pq/(p-q)}\, dx\right)^{1/q - 1/p} \|\nabla_j u\|_{p,U\cap\Omega} \leqq \tag{9.4}$$

$$\leqq c\left(\int_0^1 (z/\varphi(z))^{lpq/(p-q)}\, \varphi(z)^{n-1}\, dz\right)^{1/q - 1/p} \|\nabla_j u\|_{p,U\cap\Omega},$$

и оценка (9.3) следует из (9.1), (9.2), (9.4). Таким образом, для доказательства п. (i) теоремы достаточно построить линейный непрерывный оператор продолжения $\mathscr{E}$: $W^l_{q,\tau}(\Omega) \to W^l_q(R^n)$.

Пусть $u \in W^l_{q,\tau}(\Omega)$. Продолжим функцию u на R^n. Построим последовательность $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ так же, как в доказательстве п. (i) теоремы 2.1. В случае $\operatorname{supp} u \subset \subset U$, $u(y, z) = 0$ при $z > z_0/2$ оператор продолжения $\mathscr{E}^{(0)}$ определим формулой (2.4). Рассуждая как в доказательстве п. (i) теоремы 2.1, придем к неравенству (2.8) с заменой p на q. Так как $\sigma(x)|_{G_k} \sim \sigma_k = (\varphi(z_k)/z_k)^l$, то из (2.8) вытекает оценка

$$\|\nabla_j(\mathscr{E}^{(0)}u)\|^q_{q,G_k} \leqq c\sigma_k^{-q}\|z^{-l}u\|^q_{q,\Omega_k'} + c\sigma_k^{-q}\|\nabla_l u\|^q_{q,\Omega_k'} \leqq$$
$$\leqq c\|z^{-l}\tau u\|^q_{q,\Omega_k'} + c\|\tau\nabla_l u\|^q_{q,\Omega_k'} .$$

Здесь мы использовали, что $\tau(x)|_{\Omega_k'} \sim \sigma_k^{-1}$. Суммируя по $k \geqq 1$ и принимая во внимание конечность кратности покрытия $\{\Omega_k'\}$, а также включение $\operatorname{supp} \mathscr{E}^{(0)}u \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k}$, придем к оценке

$$\|\nabla\mathscr{E}^{(0)}u\|_{q,R^n} \leqq c(\|\tau z^{-l}u\|_{q,U\cap\Omega} + \|\tau\nabla_l u\|_{q,\Omega}) . \tag{9.5}$$

По лемме 1.1 (см. неравенство (1.2)) первое слагаемое в правой части (9.5) не больше второго. Таким образом,

$$\|\nabla_j\mathscr{E}^{(0)}u\|_{q,R^n} \leqq c\|\tau\nabla_l u\|_{q,\Omega} , \quad 0 \leqq j \leqq l .$$

В соответствии с леммой 9.1 имеем $\mathscr{E}^{(0)}u \in W^l_q(R^n)$ и $\|\mathscr{E}^{(0)}u\|_{q,l,R^n} \leqq c\|\tau\nabla_l u\|_{q,\Omega}$. Итак, требуемый оператор продолжения $u \to \mathscr{E}^{(0)}u \in W^l_q(R^n)$ имеет вид (2.4), если $u \in W^l_{q,\tau}(\Omega)$, $\operatorname{supp} u \subset U$, $u(y, z) = 0$ при $z > z_0/2$. Общий оператор продолжения $\mathscr{E}$: $W^l_{q,\tau}(\Omega) \to W^l_q(R^n)$ строится так же, как в окончании доказательства п. (i) теоремы 2.1 с помощью гладкой срезающей функции, сосредоточенной в малой окрестности вершины пика. Доказательство п. (i) теоремы закончено.

(ii) Пусть f – такая функция класса $C_0^{\infty}(1, 2)$, что $f(z) = 1$ при $z \in (4/3, 5/3)$. Положим $\varrho_k = 2^{-k}$, $k \geqq 0$, и определим на Ω функцию u_N:

$$u_N|_{\Omega\setminus U} = 0 , \quad u_N(y, z)|_{\Omega\cap U} = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k f(z/\varrho_{k+1}) . \tag{9.6}$$

Здесь U – окрестность вершины пика из определения 1.1, N – натуральное число и $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ – некоторая положительная последовательность, которая будет далее определена.

Пусть $\mathscr{E}$ – ограниченный оператор продолжения: $W^l_p(\Omega) \to W^l_q(R^n)$. Тогда

$$\|u_N\|^q_{p,l,\Omega} \geqq c\|\nabla_l\mathscr{E}u_N\|^q_{q,R^n} \geqq c_1 \sum_{k=0}^{N} \int_{4\varrho_{k+1}/3}^{5\varrho_{k+1}/3} \mathrm{d}z \int_{R^{n-1}} |(\nabla_l\mathscr{E}u_N)(y, z)|^q \,\mathrm{d}y . \tag{9.7}$$

При $x = (y, z) \in \Omega \cap U$ и $z \in (4\varrho_{k+1}/3, 5\varrho_{k+1}/3)$ имеем $(\mathscr{E}u_N)(x) = u_N(x) = \alpha_k$, $k \leqq N$. Таким образом, в слагаемом с номером k суммы в правой части (9.7) внутренний интеграл не меньше, чем $\alpha_k^q\gamma_{q,l}(\varphi(z)\,\omega) = \alpha_k^q\,\varphi(z)^{n-1-lq}\,\gamma_{q,l}(\omega)$ (величина $\gamma_{q,l}$ определена равенством (2.10). В доказательстве п. (ii) теоремы 2.1

было замечено, что $\gamma_{q,l}(\omega) > 0$. Из (9.7 теперь следует, что

$$\|u_N\|^q_{p,l,\Omega} \geqq c_2 \sum_{k=0}^{N} \alpha_k^q \int_{4\varrho_{k+1}/3}^{5\varrho_{k+1}/3} \varphi(z)^{n-1-lq}\,\mathrm{d}z\,.$$

Так как $\varphi(z) \sim \varphi(\varrho_k)$ при $z \in (\varrho_{k+1}, \varrho_k)$, то

$$c_3\Big(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k^p \varrho_k^{1-lp}\, \varphi(\varrho_k)^{n-1}\Big)^{1/p} \geqq$$

$$\geqq \|u_N\|_{p,l,\Omega} \geqq c_4\Big(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k^q \varrho_k\, \varphi(\varrho_k)^{n-1-lq}\Big)^{1/q}\,.$$

Подбирая коэффициенты α_k так, чтобы при всех $k \geqq 0$ выполнялось равенство $\alpha_k^p \varrho_k^{1-lp}\, \varphi(\varrho_k)^{n-1} = \alpha_k^q \varrho_k\, \varphi(\varrho_k)^{n-1-lq}$, приходим к оценке

$$\Big(\sum_{k=0}^{N} \varphi(\varrho_k(^{n-1-lpq/(p-q)} \varrho_k^{1+lpq/(p-q)}\Big)^{1/q-1/p} \leqq c_3/c_4\,, \quad p < \infty\,.$$

Общий член последней суммы эквивалентен интегралу

$$\int_{\varrho_{k+1}}^{\varrho_k} (t/\varphi(t))^{lpq/(p-q)}\, \varphi(t)^{n-1}\,\mathrm{d}t\,,$$

поэтому

$$\int_{\varrho_{N+1}}^{1} (t/\varphi(t))^{lpq/(p-q)}\, \varphi(t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \leqq c\,.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получим (9.2). Для окончания доказательства п. (ii) остается заметить, что при $p = \infty$ неравенство (9.2) выполняется очевидным образом.

Теорема 9.2. *Пусть* 0 *— вершина пика, направленного во внешность ограниченной области* $\Omega \subset R^n$, *и пусть* $lq = n - 1$, $q \in (1, \infty)$, $p \in (q, \infty]$.

(i) *Если выполнены условия* (3.7), (9.1),

$$\alpha = (1 - 1/q)/(1/q - 1/p) \tag{9.8}$$

и

$$\int_0^1 \left(\frac{t^\beta}{\varphi(t)}\right)^{n/(\beta-1)} \left|\log\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right)\right|^{-\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty\,, \tag{9.9}$$

то существует линейный непрерывный оператор продолжения $\mathscr{E}\colon W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$.

(ii) *Если существует ограниченный оператор продолжения* $\mathscr{E}\colon W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$, *а функция* φ *удовлетворяет условию* (2.1), *то выполнено неравенство* (9.9), *где* α *и* β *определены соотношениями* (9.8) *и* (9.1) *соответственно.*

Доказательство. (i) Проверим, что пространство $W_p^l(\Omega)$ вложено в $W_{q,\tau}^l(\Omega)$, где весовая функция τ равна 1 на множестве $\Omega \setminus U$ и $\tau(x)|_{\Omega \cap U} = (z/\varphi(z))^l (\log(z/\varphi(z)))^{1/q-1}$ (здесь, как обычно, $x = (y, z)$, $y \in R^{n-1}$, $z \in R^1$, а U — окрестность из определения 1.1). Достаточно установить (9.3). Применяя неравенство

Гельдера так же, как при выводе (9.4), получим вместо (9.4) оценку

$$\left\|\tau\nabla_j u\right\|_{q,\Omega\cap U} \leqq c\left\|\nabla_j u\right\|_{p,U\cap\Omega} \tag{9.10}$$

$$\cdot\left(\int_0^1 (z/\varphi(z))^{lpq/(p-q)}\,\varphi(z)^{n-1}\left|\log\left(\varphi(z)\,z^{-1}\right)\right|^{p(q-1)/(q-p)}\mathrm{d}z\right)^{1/q-1/p}.$$

Теперь (9.3) следует из (9.1), (9.8), (9.9) и (9.10). Итак, для доказательства теоремы достаточно построить оператор продолжения $\mathscr{E}$: $W^l_{q,\tau}(\Omega) \to W^l_q(R^n)$.

Рассмотрим последовательност $\{z_k\}_{k\geqq 0}$, определенную в доказательстве п. (i) теоремы 3.1. Пусть $u \in W^l_{q,\tau}(\Omega)$, $\operatorname{supp} u \subset U$, $u(y, z) = 0$ при $z > z_0/2$. В этом случае оператор продолжения $u \to \mathscr{E}^{(0)}u \in W^l_q(R^n)$ дается формулами (3.8)–(3.10). Рассуждая так же, как в доказательстве п. (i) теоремы 3.1, придем к неравенствам (3.24), (3.25), в которых p земаняется на q. Так как $\sigma(x)|_{G_k} \sim$ $\sim \sigma_k = (\varphi(z_k)/z_k)^l\left|\log\left(\varphi(z_k)/z_k\right)\right|^{1-1/q}$, то из (3.24), (3.25) вытекают оценки

$$\left\|\nabla_j v\right\|^q_{q,G_k} \leqq c\sigma_k^{-q}\left(\left\|z^{-l}u\right\|^q_{q,\Omega_k'} + \left\|z^{1-l}\nabla u\right\|^q_{q,\Omega_k'}\right),$$

$$\left\|\nabla_j w\right\|^q_{q,G_k} \leqq c\sigma_k^{-q}\left(\left\|z^{1-l}\nabla u\right\|^q_{q,\Omega_k'} + \left\|\nabla_l u\right\|^q_{q,\Omega_k'}\right).$$

Поскольку $\sigma_k^{-1} \sim \tau(x)|_{G_k}$, то из этих оценок вытекают следующие:

$$\left\|\nabla_j v\right\|^q_{q,G_k} \leqq c\left(\left\|\tau z^{-l}u\right\|^q_{q,\Omega_k'} + \left\|\tau z^{1-l}\nabla u\right\|^q_{q,\Omega_k'}\right),$$

$$\left\|\nabla_j w\right\|^q_{q,G_k} \leqq c\left(\left\|\tau z^{1-l}\nabla u\right\|^q_{q,\Omega_k'} + \left\|\tau\nabla_l u\right\|^q_{q,\Omega_k'}\right).$$

Суммируя последние неравенства по $k \geqq 1$ и принимая во внимание конечность кратности покрытия $\{\Omega_k'\}$, а также включения $\operatorname{supp} v \subset \overline{\bigcup_{k\geqq 1} G_k}$, $\operatorname{supp} w \subset$ $\subset \overline{\bigcup_{k\geqq 1} G_k}$, получим, что

$$\left\|\nabla_j v\right\|_{q,R^n} \leqq c\left(\left\|\tau z^{-l}u\right\|_{q,\Omega\cap U} + \left\|\tau z^{1-l}\nabla u\right\|_{q,U\cap\Omega}\right), \tag{9.11}$$

$$\left\|\nabla_j w\right\|_{q,R^n} \leqq c\left(\left\|\tau z^{1-l}\nabla u\right\|_{q,\Omega\cap U} + \left\|\tau\nabla_l u\right\|_{q,U\cap\Omega}\right). \tag{9.12}$$

В соответствии с леммой 1.1 (см. (1.3), (1.4)), правые части оценок (9.11), (9.12) не превосходит $\left\|\tau\nabla_l u\right\|_{q,\Omega\cap U}$. Таким образом,

$$\left\|\nabla_j\mathscr{E}^{(0)}u\right\|_{q,R^n} \leqq c\left\|\tau\nabla_l u\right\|_{q,\Omega}, \quad 0 \leqq j \leqq l. \tag{9.13}$$

По лемме 9.1 имеем $\mathscr{E}^{(0)}u \in W^l_q(R^n)$, и в силу (9.13) справедлива оценка $\left\|\mathscr{E}^{(0)}u\right\|_{q,l,R^n} \leqq c\left\|\tau\nabla_l u\right\|_{q,\Omega}$. Итак, если $u \in W^l_{q,\tau}(\Omega)$, $\operatorname{supp} u \subset U \cap \{x = (y, z)$: $z \leqq z_0/2\}$, то линейный непрерывный оператор продолжения $u \to \mathscr{E}^{(0)}u \in$ $\in W^l_q(R^n)$ определяется формулами (3.8)–(3.10). Общий оператор продолжения $\mathscr{E}$: $W^l_{q,\tau}(\Omega) \to W^l_q(R^n)$ стротися точно так же, как в окончании доказательства п. (i) теоремы 2.1.

(ii) Пусть $\{u_N\}_{N\geqq 1}$ – последовательность функций, введенная в доказательстве п. (ii) теоремы 9.1 формулами (9.6). Обозначим через ζ гладкую, положительно однородную функцию нулевой степени в $R^n \setminus \{0\}$, такую, что $\zeta(x) = 1$ в конусе $|y| < z$ и $\zeta(x) = 0$ во внешности конуса $|y| < 2z$. Положим $v_N = \mathscr{E}u_N$. Так как функция ζ является мультипликатором в пространстве $W^l_q(R^n)$ (см., например, лемму 1.2 при $\sigma \equiv 1$), то $\|\mathscr{E}u_N\|_{q,l,R^n} \geqq c\|\nabla_l v_N\|_{q,R^n}$, и мы имеем

$$(9.14)\qquad \|u_N\|^q_{p,l,\Omega} \geqq c\|\nabla_l v_N\|^q_{q,R^n} \geqq c_1 \sum_{k=0}^{N} \int_{4\varrho_{k+1}/3}^{5\varrho_{k+1}/3} \mathrm{d}z \int_{R^{n-1}} |(\nabla_l v_N)(y, z)|^q \,\mathrm{d}y\,.$$

Если $x = (y, z) \in \Omega \cap U$ и $z \in (4\varrho_{k+1}/3,\ 5\varrho_{k+1}/3)$, то $v_N(x) = u_N(x) = \alpha_k$, $k \leqq N$. Кроме того, $v_N(y, z) = 0$, если $|y| > 2z$. Пусть ω – $(n-1)$-мерная область из определения 1.1 вершины внешнего пика и пусть $\bar{B}$ – замкнутый шар, содержащийся в ω. Тогда в общем члене суммы (9.14) внутренний интеграл не меньше, чем $\alpha_k^q \operatorname{Cap}(\varphi(z)\bar{B},\ \mathring{L}^l_p(B_{2z}))$ (емкость Cap определена равенством (3.27)). При помощи (3.28) из (9.14) выводим, что

$$\|u_N\|^q_{p,l,\Omega} \geqq c_2 \sum_{k=0}^{N} \alpha_k^q \int_{4\varrho_{k+1}/3}^{5\varrho_{k+1}/3} |\log(\varphi(z)/2z)|^{1-q} \,\mathrm{d}z\,.$$

Так как $|\log(\varphi(z)/2z)| \sim \log(\varrho_k/\varphi(\varrho_k))$ при $z \in (\varrho_{k+1}, \varrho_k)$, то

$$c_3\Big(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k^p \varrho_k^{1-lp}\, \varphi(\varrho_k)^{n-1}\Big)^{1/p} \geqq \|u_N\|_{p,l,\Omega} \geqq$$
$$\geqq c_4\Big(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k^q(\log(\varrho_k/(\varrho_k)))^{1-q}\, \varrho_k\Big)^{1/q}, \quad p < \infty\,.$$

Подбирая положительные коэффициенты α_k так, чтобы при всех $k \geqq 0$ выполнялось равенство

$$\alpha_k^p \varrho_k^{1-lp}\, \varphi(\varrho_k)^{n-1} = \alpha_k^q(\log(\varrho_k/\varphi(\varrho_k)))^{1-q}\, \varrho_k\,,$$

приходим к оценке

$$\Big(\sum_{k=0}^{N} \varphi(\varrho_k)^{n-1}\,(\varrho_k/\varphi(\varrho_k))^{p(n-1)/(p-q)}\, \varrho_k |\log(\varphi(\varrho_k)\,\varrho_k^{-1})|^{p(q-1)/(q-p)}\Big)^{1/q-1/p} \leqq c_3 c_4^{-1}\,.$$

В последней сумме слагаемое с номером k эквивалентно интегралу

$$\int_{\varrho_{k+1}}^{\varrho_{k-1}} (t^\beta/\varphi(t))^{n/(\beta-1)}\, |\log(\varphi(t)/t)|^{-\alpha}\, t^{-1}\,\mathrm{d}t\,,$$

где α и β определены соотношениями (9.8), (9.1). Таким образом,

$$\int_{\varrho_{N+1}}^{1} (t^\beta/\varphi(t))^{n/(\beta-1)}\, |\log(\varphi(t)/t)|^{-\alpha}\, t^{-1}\,\mathrm{d}t \leqq c\,.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $N \to \infty$, получаем (9.9). Заметим в заключение, что при $\varrho = \infty$ равенство (9.9) очевидно. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 9.3. *Пусть Ω – ограниченная область в R^n с вершиной внешнего пика на границе, а функция φ, описывающая заострение пика, удовлетворяет условию* (2.1). *Предположим, что $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, p)$ и $lq > n - 1$.*

(i) *Если*

$$(9.15)\qquad 1/q - 1/p = (n-1)(\beta - 1)/np\,,$$

и справедливо неравенство (9.2), *то существует линейный непрерывный оператор продолжения:* $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$.

(ii) *Если существует ограниченный оператор продолжения:* $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$, *то справедливо соотношение* (9.2), *где* β *определено равенством* (9.15).

Доказательство. (i) По теореме 7.1 существует линейный непрерывный оператор продолжения $\mathscr{E}$: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^n)$, где $\sigma(x) = (\varphi(|x|)/|x|)^{(n-1)/p}$ при $|x| < 1$ и $\sigma(x) = 1$ при $|x| \geqq 1$. Так как область Ω ограничена, то можно считать, что для всех $u \in W_p^l(\Omega)$ выполнено включение $\operatorname{supp} \mathscr{E}u \subset B_R$, с R, не зависящим от u. Проверим ограниченность оператора $u \to \mathscr{E}u$ как отображения: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$. В самом деле, пусть $v = D^\alpha \mathscr{E}u$, $|\alpha| \leqq l$. Используя неравенство Гельдера, найдем, что

$$\int_{B_1} |v|^q \, dx \leqq \left(\int_{B_1} (\sigma|v|)^p \, dx\right)^{q/p} \left(\int_{B_1} \sigma^{pq/(q-p)} \, dx\right)^{1-q/p}.$$

Последний интеграл совпадает с интегралом (9.2), поэтому

$$\|v\|_{q,R^n} \leqq c\|\sigma v\|_{d,R^n} \leqq c_1 \|u\|_{p,l,\Omega}\,.$$

Отсюда и из леммы 9.1 вытекает ограниченность оператора $\mathscr{E}$: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$.

(ii) Пусть $f \in C_0^\infty(1, 2)$, $f|_{(4/3,5/3)} = 1$, $f(z) \geqq 0$ при $z \in (1, 2)$. Положим $\varrho_i = 4^{-i}$, $i \geqq 0$, и определим на Ω функцию u_N:

$$u_N|_{\Omega \setminus U} = 0\,, \quad u_N(x)|_{\Omega \cap U} = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i f(z/2\varrho_{i+1})\,.$$

Здесь $x = (y, z)$, U — окрестность из определения 1.1, N — натуральное число и $\{\alpha_i\}_{i=0}^\infty$ — некоторая положительная последовательность, которая будет выбрана далее. Пусть $\mathscr{E}$ — ограниченный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^n)$. При почти всех $y \in R^{n-1}$ имеем $(\mathscr{E}u_N)(y, \cdot) \in W_q^l(R^1)$. Поэтому функции $\mathscr{E}u_N$ можно поставить в соответствие такой набор функций $\{P_i\}_{i=0}^N$, заданных на R^n, что при фиксированном $y \in R^{n-1}$ функция $P(y, \cdot)$ является полиномом в R^1 степени $l - 1$ и удовлетворяет неравенству

$$\|(\mathscr{E}u_N)(y, \cdot) - P_i(y, \cdot)\|_{q,(\varrho_{i+1},\varrho_i)} \leqq \leqq c(l, q)\, \varrho_i^l \|D_z^l(\mathscr{E}u_N)(y, z)\|_{q,(\varrho_{i+1},\varrho_i)} \tag{9.16}$$

(см. лемму 5.1). При этом можно считать,

$$P_i(y, z) = \sum_{k=0}^{l-1} a_k^{(i)}(y)\, z^k\,, \quad i = 0, \ldots, N\,,$$

где

$$a_k^{(i)}(y) = \varrho_i^{-k-1} \int_{\varrho_{i+1}}^{2\varrho_{i+1}} \psi_k(t/2\varrho_{i+1})\, (\mathscr{E}u_N)(y, t)\, dt\,, \tag{9.17}$$

а $\{\psi_k\}_{k=0}^{l-1}$ — некоторые стандартные функции класса $C_0^\infty(1/2, 1)$. Положим

$$v_i(y) = (2\varrho_{i+1})^{-1} \int_{2\varrho_{i+1}}^{\varrho_i} ((\mathscr{E}u_N)(y, z) - P_i(y, z))\, dz\,, \quad y \in R^{n-1}\,. \tag{9.18}$$

Так как $(0, z) \in \Omega$ при $z \in (0, 1)$, то $(\mathscr{E} u_N)(0, z) = u_N(0, z)$, $z \in (0, 1)$. В частности, $(\mathscr{E} u_N)(0, z) = 0$, если $z \in (\varrho_{i+1}, 2\varrho_{i+1})$, $0 \leqq i \leqq N$, и все коэффициенты (9.17) равны нулю при $y = 0$. Отсюда выводим, что

$$v_i(0) = (2\varrho_{i+1})^{-1} \int_{2\varrho_{i+1}}^{\varrho_i} u_N(0, z)\, dz = \alpha_i \int_1^2 f(z)\, dz .$$

По теореме С. Л. Соболева о вложении $W_q^l(B_{\varrho_i})$ в $C(\bar{B}_{\varrho_i})$ (B_{ϱ_i} — шар в R^{n-1}), находим:

$$\alpha_i \leqq c\left(\varrho_i^{l-(n-1)/q} \|\nabla_l v_i\|_{q,B_{\varrho_i}} + \varrho_i^{(1-n)/q} \|v_i\|_{q,B_{\varrho_i}}\right) \leqq \tag{9.19}$$
$$\leqq c\varrho_i^{(1-n)/q} \|v_i\|_{q,R^{n-1}} + c\varrho_i^{l-(n-1)/q} \|\nabla_l v_i\|_{q,R^{n-1}} .$$

Оценим правую часть последнего неравенства. Пусть γ — $(n-1)$-мерный мультииндекс длины l. Имеем:

$$D^\gamma v_i(y) = (2\varrho_{i+1})^{-1} \int_{2\varrho_{i+1}}^{\varrho_i} D_y^\gamma(\mathscr{E} u_N(y, z) - P_i(y, z))\, dz . \tag{9.20}$$

С помсщью неравенства Гельдера из (9.17) выводим, что

$$\left|D^\gamma a_k^{(i)}(y)\right| \leqq c\varrho_i^{-k-1/q} \left\|(D_y^\gamma \mathscr{E} u_N)(y, \cdot)\right\|_{q,(\varrho_{i+1}, 2\varrho_{i+1})} ,$$

и значит,

$$\left|D_y^\gamma P_i(y, z)\right| \leqq c\varrho_i^{-1/q} \left\|(D_y^\gamma \mathscr{E} u_N)(y, \cdot)\right\|_{q,(\varrho_{i+1}, 2\varrho_{i+1})} ,$$

где $z \in (\varrho_{i+1}, \varrho_i)$. Из последней оценки и (9.20) следует неравенство

$$\|\nabla_l v_i\|_{q,R^{n-1}} \leqq c\varrho_i^{-1/q} \|\nabla_l \mathscr{E} u_N\|_{q,\Pi_i} , \tag{9.21}$$

где $\Pi_i = \{(y, z) \colon y \in R^{n-1},\ z \in (\varrho_{i+1}, \varrho_i)\}$. Для оценки $\|v_i\|_{q,R^{n-1}}$ применим неравенство Гельдера к интегралу (9.18), а затем воспользуемся соотношением (9.16). В результате найдем, что

$$\|v_i\|_{q,R^{n-1}} \leqq c\varrho_i^{l-1/q} \|\nabla_l \mathscr{E} u_N\|_{q,\Pi_i} . \tag{9.22}$$

Из (9.19), (9.21), (9.22) получим

$$\|\nabla_l \mathscr{E} u_N\|_{q,\Pi_i}^q \geqq c\alpha_i^q \varrho_i^{n-lq} , \quad i = 0, \ldots, N .$$

Суммируя последнее неравенство по i, придем к оценке

$$c_1 \sum_{i=0}^N \alpha_i^q \varrho_i^{n-lq} \leqq \|\nabla_l \mathscr{E} u_N\|_{q,R^n}^q \leqq c_2 \|u_N\|_{p,l,\Omega}^q ,$$

откуда

$$c_3 \sum_{i=0}^N \alpha_i^q \varrho_i^{n-lq} \leqq \|u_N\|_{p,l,\Omega}^q \leqq c_4 \left(\sum_{i=0}^N \alpha_i^p \varrho_i^{1-lp} \varphi(\varrho_i)\right)^{q/p} .$$

Подбирая коэффициенты α_i так, чтобы при всех $i \geqq 0$ выполнялось равенство $\alpha_i^q \varrho_i^{n-lq} = \alpha_i^p \varrho_i^{1-lp} \varphi(\varrho_i)^{n-1}$, найдем:

$$\left(\sum_{i=0}^N \varphi(\varrho_i)^{(n-1)q/(q-p)} \varrho_i^{(np-q)/(p-q)}\right)^{1-q/p} \leqq c_4/c_3 .$$

В последней сумме слагаемое с номером i эквивалентно интегралу

$$\int_{\varrho_{i+1}}^{\varrho_i} (t^\beta/\varphi(t))^{n/(\beta-1)}\, t^{-1}\, \mathrm{d}t\,,$$

где β определено соотношением (9.15). Таким образом,

$$\int_{\varrho_{N+1}}^{1} (t^\beta/\varphi(t))^{n/(\beta-1)}\, t^{-1}\, \mathrm{d}t \leqq c$$

и переходя к пределу при $N \to \infty$, выводим (9.2). Доказательство теоремы закончено.

В последней теореме параграфа рассматривается оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^2)$ для плоской области Ω с внутренним пиком, описанным в определении 8.1.

Теорема 9.4. *Пусть* 0 — *вершина пика, направленного внутрь плоской ограниченной области* Ω, $1 \leqq q < p \leqq \infty$. *Положим* $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$.

(i) *Если*

$$1/q - 1/p = (l - 1/p)(\beta - 1)/(\beta + 1) \tag{9.23}$$

и справедливо неравенство (9.2) *с* $n = 2$, *то существует линейный непрерывный оператор продолжения* $\mathscr{E}$: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^2)$.

(ii) *Если функция* φ *возрастает, удовлетворяет условию* (2.1) *и существует ограниченный оператор продолжения* $\mathscr{E}$: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^2)$, *то выполнено неравенство* (9.2) *с* $n = 2$ *и числом* β, *определяемым соотношением* (9.23).

Доказательство. (i) По теореме 8.1 существует линейный непрерывный оператор продолжения $\mathscr{E}$: $W_p^l(\Omega) \to W_{p,\sigma}^l(R^2)$, где $\sigma(x, y) = 1$ в $R^2 \setminus G$, $\sigma(x, y) = (\varphi(x)/x)^{l-1/p}$ в G, $G = U \setminus \bar{\Omega}$, а U — окрестность из определения 8.1. Можно считать, что для всех $u \in W_p^l(\Omega)$ множество $\operatorname{supp} \mathscr{E}u$ содержится в круге, не зависящем от u. Пусть $v = D^\alpha u$, $|\alpha| \leqq l$. Применяя неравенство Гельдера, найдем, что

$$\|v\|_{q,G} \leqq \|\sigma v\|_{p,G} \left(\int_G \sigma(x, y)^{q/(q/p-1)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right)^{1/q-1/p}.$$

Так как последний интеграл совпадает с интегралом (9.2), то

$$\|v\|_{q,R^2} \leqq c\|\sigma v\|_{q,R^2} \leqq c_1 \|u\|_{p,l,\Omega}\,.$$

Из этого неравенства и леммы 9.1 вытекает ограниченность оператора $\mathscr{E}$: $W_p^l(\Omega) \to W_q^l(R^2)$.

(ii) Рассмотрим функции f, g со свойствами: $f \in C_0^\infty(1, 2)$, $f|_{(4/3,5/3)} = 1$, $g \in C^\infty(R^1)$, $g|_{(-\infty,1)} = 1$, $g|_{(2,\infty)} = 0$. Пусть число $\varrho_0 \in (0, 1)$ столь мало, что $\varphi_+(x) < x$ при $x \in (0, \varrho_0]$. Положим $\varrho_{k+1} = \varrho_k/2$, $k \geqq 0$, и определим на Ω функцию u_N:

$$u_N(x, y) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k f(x/\varrho_{k+1})\, g(y/\varrho_{k+1})\,,$$

если $x \in (0, 1)$, $y > \varphi_+(x)$ и $u_N(x, y) = 0$ в остальных точках области Ω. Здесь N — натуральное число и $\{\alpha_k\}_{k \geqq 0}$ — положительная последовательность, которая будет определена ниже. По лемме 8.2 имеем

$$\int_0^1 \left|u_N(x, \varphi_+(x))\right|^q \varphi(x)^{1-lq}\, \mathrm{d}x \leqq c \left\|\mathscr{E} u_N\right\|_{q,l,R^2}^q ,$$

откуда

$$(9.24) \qquad \Big(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k^q\, \varphi(\varrho_k)^{1-lq}\, \varrho_k\Big)^{1/q} \leqq$$

$$\leqq c_1 \left(\sum_{k=0}^{N} \int_{4\varrho_{k+1}/3}^{5\varrho_{k+1}/3} \left|u_N(x, \varphi_+(x))\right|^q \varphi(x)^{1-lq}\, \mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqq$$

$$\leqq c_2 \left\|u_N\right\|_{p,l,\Omega} \leqq c_3 \Big(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k^p \varrho_k^{2-lp}\Big)^{1/p} .$$

Пусть $p < \infty$. Подбирая коэффициенты α_k так, чтобы выполнялось равенство $\alpha_k^q\, \varphi(\varrho_k)^{1-lq}\, \varrho_k = \alpha_k^p \varrho_k^{2-lp}$ при всех $k \geqq 0$, из (9.24) находим, что

$$\Big(\sum_{k=0}^{N} \varphi(\varrho_k)^{p(lq-1)/(q-p)}\, \varrho_k^{2+p(lq-1)/(p-q)}\Big)^{1/q-1/p} \leqq c_3 .$$

Введем параметр β по формуле (9.23) и заметим, что общий член последней суммы эквивалентен интегралу

$$(9.25) \qquad \int_{\varrho_{k+1}}^{\varrho_k} \left(t^\beta / \varphi(t)\right)^{2/(\beta-1)}\, t^{-1}\, \mathrm{d}t.$$

Таким образом,

$$(9.26) \qquad \int_{\varrho_{N+1}}^{\varrho_0} \left(t^\beta / \varphi(t)\right)^{2/(\beta-1)}\, t^{-1}\, \mathrm{d}t \leqq \mathrm{const} ,$$

откуда, переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем (9.2) с $n = 2$.

Пусть $p = \infty$. В этом случае положим $\alpha_k = \varrho_k^l$, $k \geqq 0$, и из (9.24) выведем оценку

$$(9.27) \qquad \Big(\sum_{k=0}^{N} \varrho_k^{lq+1}\, \varphi(\varrho_k)^{1-lq}\Big)^{1/q} \leqq c_4 \left\|u_N\right\|_{\infty,l,\Omega} \leqq c_5 .$$

При $p = \infty$ общий член суммы в (9.27) эквивалентен интегралу (9.25). Таким образом, из (9.27) выводится (9.26), и, следовательно, (9.2). Теорема доказана.

Литература

[1] *В. Г. Мазья, С. В. Поборчий:* Продолжение функций из классов С. Л. Соболева во внешность области с вершиной пика на границе I.

[2] *И. Стейн:* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973, 342 с.

[3] *В. Г. Мазья:* Пространства С. Л. Соболева. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985, 416 с.

Адресс авторов: Ленинградский государственный униврзитет, Ленинград, СССР.