Czechoslovak Mathematical Journal, 37 (112) 1987, Praha

АРХИМЕДОВЫ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ СО СВОЙСТВОМ ОТЩЕПЛЯЕМОСТИ

А. В. КОЛДУНОВ, Г. Я. РОТКОВИЧ, Ленинград

(Поступило в редакцию 21/I 1980 г.)

Решеточно упорядоченные группы (l-группы) со свойством отщеплаяемости рассматривались П. Конрадом с сотрудниками, С. Бернау, Я. Якубиком. Последний в [13] доказал ряд достаточных условий для того, чтобы архимедова l-группа обладала свойством отщепляемости. М. Андерсон, О. Кенни и П. Конрад в [1] доказали некоторые условия, равносильные тому, что архимедова l-группа обладает свойством отщепляемости. В предлагаемой статье дается внутренее описание архимедовой l-группы со свойством отщепляемости. Основным результатом является теорема 2, из которой в качестве следствий получено внутреннее строение архимедовых l-групп со свойством отщепляемости, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. В статье приводятся два примера, показывающие невозможность улучшения приведенных результатов.

Термины, которые имеют одинаковый смысл для решеточно упорядоченных групп и для векторных решеток, используются те же, что и в [2], [6]. Если одно и то же понятие названо в них по-разному, то предпочтение отдается [6]. Только вместо „компонента" говорится „полоса" (в [1], [13] в этом случае употребляется термин „поляра"). Топологическая терминология используется та же, что и в книге [7].

Все рассматриваемые группы предполагаются архимедовыми. Дедекиндово пополнение (K-пополнение) l-группы X будем обозначать kX, а то максимальное расширение — IX.

Будем называть l-группу X o-полной (соответственно равномерно полной относительно регулятора $u \in X_+$), если для любой такой последовательности $\{x_n\} \subset X$, что $|x_{n+p} - x_n| \leqq \gamma_n \downarrow \mathbf{0}$ $(p \in N)$ (соответственно $m(n) \mid x_{n+p} - x_n| \leqq u$, $m(n) \to +\infty$) существует элемент $x \in X$, для которого $|x - x_n| \leqq \gamma_n \downarrow \mathbf{0}$ (соответственно, $m(n) |x - x_n| \leqq u$) (см., например, [9]). l-группа, равномерно полная относительно любого $u \in X_+$, называется r-полной. Наименьшую l-подгруппу из kX, содержащую образ X и r-полную, называют r-пополнением X и обозначают rX.

Непрерывную функцию, которая задана на компакте (т.е. компактном хаусдорфовом пространстве B) и может принимать бесконечные значения на нигде не плотных множествах из B, называют расширенной ([6]). Как известно, всякая архимедова l-группа X алгебраически и решеточно изоморфна l-группе $X(B)$ расширенных функций на некотором компакте B. Если при этом $X(B)$ разделяет точки B, то реализацию будем называть минимальной ([3]). Если $v \in X_+$, то минимальную реализацию X, при которой v соответствует характеристическая функция χ_{Bv} ее носителя B_v, будет обозначаться $X(v, B)$. В этой реализации $B_{v,1} = v^{-1}(1)$, $B_{v,0} = v^{-1}(0)$. Описанный изоморфизм будем обозначать $X \cong X(v, B)$.

Предложение 1. *Пусть X есть архимедова l-группа и пусть условие* (a) *означает*

(a) *X есть l-идеал в архимедовой l-группе Y. Тогда эквивалентны утверждения*:

I) *из* (a) *следует, что X есть полоса с проекциями в Y*;

II) *из* (a) *следует, что X есть полоса в Y*;

III) *из* (a) *следует, что существуют l-подгруппа $Z \subset Y$ и положительные линейные операторы $p\colon Y \to X$ и $q\colon Y \to Z$, для которых $(p + q)(y) = y$ $(y \in Y)$, $p(x) = x$ $(x \in X)$*;

IV) *из* (a) *следует, что если $\varphi\colon X \to R$ есть линейный решеточный (т.е. $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$) функционал такой, что $\varphi(X) \equiv 0$, то и $\varphi(X^{dd}) \equiv 0$.*

Доказательство. Доказательство проводим по схеме I) $\Leftrightarrow$ II), I) $\Leftrightarrow$ III), I) $\Leftrightarrow$ IV).

I) $\Rightarrow$ II) очевидно.

II) $\Rightarrow$ I). Пусть Z есть l-группа в kY вида $\{\mathrm{Pr}_X\, \omega_+ - \mathrm{Pr}_X\, \omega_- \mid \omega \in Y\}$. Покажем, что X есть l-идеал в Z. Если $u \in Z_+$, то $u = \mathrm{Pr}_X\{v \in Y_+\}$ и $v \wedge x \in X_+$, то есть $u \wedge x = \mathrm{Pr}\,(v \wedge x) = v \wedge x \in X_+$; это и означает, что $X = Z$, т.е. X содержит проекцию любого элемента из Y.

I) $\Rightarrow$ III). Достаточно задать $py = \mathrm{Pr}_X\, y$, $qy = y - py$.

III) $\Rightarrow$ I). Покажем, что $py = \sup_{kY}\{x \in X_+ \mid x \leqq y\} = A$ для любого $y \in Y_+$. Поскольку $py \in X_+$, то $py \leqq A$ (т.к. $y \geqq u = py + py \wedge qy \geqq py$, $u \in X$). С другой стороны, если $x \in X_+$, $x \leqq y$, то $py \geqq px = x$. Остается заметить, что $py = \sup_{kY}\{x \in X_+ \mid x \leqq y\} = \mathrm{Pr}_{X^{dd}}\, y$, т.е. X^{dd} полоса с проекциями в Y. Если же $u \in X^{dd}$, то $u = \sup_{kY}\{x \in X_+ \mid x \leqq u\} = pu \in X$, т.е. $X = X^{dd}$.

I) $\Rightarrow$ IV). Поскольку $X = X^{dd}$, то из I) следует IV).

IV) $\Rightarrow$ I). Пусть X есть l-идеал в Y, но не полоса, т.е. найдется $u \in X^{dd} \setminus X$; пусть Z есть l-идеал в Y, порожденный X и u. Тогда $Z \subset X^{dd}$. Рассмотрим $Z(u, B)$. По предположению существует $t \in u^{-1}(1) = B_{u,1}$, для которого $x(t) = 0$ $(u \in X)$. Функционал $\varphi(y) = y(t)$ $(y \in Z(u, B))$ линейный и решеточный (т.к. Z порождено X и u, и $u(t) = 0$, $x(t) = 0$, то $\varphi(y) \in R$); $\varphi[X] \equiv 0$, но $\varphi[X^{dd}] \not\equiv 0$, т.к. $\varphi(u) = 1$. Таким образом доказано, что из a) следует, что $X = X^{dd}$, т.е. IV) $\Rightarrow$ II), а по предыдущему II) $\Rightarrow$ I).

Определение 1. (*Архимедова*) *l-группа, удовлетворяющая любому из условий* I)–IV) *называется l-группой со свойством отщепляемости.*

Замечание 1. Из условия 1 и доказательства I) $\Rightarrow$ III) следует, что при проверке свойства отщепляемости в данной l-группе X можно считать, что X есть l-идеал в Y и $X^{dd} = Y$.

Замечание 2. Требование архимедовости Y в условии (a) отбросить нельзя. В самом деле, в лексикографическом произведении X и Z группа Z является l-идеалом, но не полосой с проекциями (напомним, что лексикографическим произведением l-групп X и Z называется l-группа, состоящая из всех пар (x, z) $(x \in X,\ z \in Z)$ с покоординатными алгебраическими операциями и следующим упорядочением: $(x, z) \leqq (x_1, z)$, если $x < x_1$ при производольных z, z_1 или если $x = x_1$ и $z \leqq z_1$.

Учитывая сказанное, будем рассматривать только архимедовы l-группы, что в дальнейшем не будет специально оговариваться.

Определение 2. В l-группе X система

$$\{x_\alpha \in X_+ \mid \alpha \in A\} \tag{1}$$

будет называться полудизъюнктной, если для любого $\alpha \in A$ множество $\{\beta \in A \mid x_\alpha \wedge x_\beta \neq \mathbf{0}\}$ конечно.

Теорема 2. *Для l-группы X эквивалентны утверждения*

1) *X обладает свойством отщепляемости;*

2) *Если* (I) *такая полудизъюнктная система, что для любого $x \in X_+$ $\sup\{x \wedge x_\alpha \mid \alpha \in A\} \in X$, то $\sup\{x_\alpha\} \in X$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Из полудизъюнктности системы (I) и латеральной полноты IX следует $y = \sup\{x_\alpha \mid \alpha \in A\} \in IX$. Предположим, $y \bar{\in} X$.

Пусть Y есть l-подгруппа в IX, порожденная X и y; будем рассматривать реализацию $Y(y, B)$. Ниже будет доказано, что X является l-идеалом в Y, т.е. $X = X^{dd} \ni y = \sup\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Сначала заметим, что любой элемент $z \in Y$ имеет вид $z = \sup\limits_{m \in M} \inf\limits_{n \in N(m)} \{p_{mn} y + x_{mn}\}$, где M, $N(m)$-конечные подмножества N, $p_{mn} \in \mathbb{Z}$, $x_{mn} \in X$. Кроме того, существует $t_0 \in B_{Y,1}$, в которой $x(t_0) = 0$ для любого $x \in X$ (действительно, в противном случае для любого $t \in B_{Y,1}$, существует $x_t \in X_+$, для которого $1 < x_t(t) \leqq \infty$. Выбираем конечное покрытие $\{x_{t_k}^{-1}(1, +\infty]\}$ компакта $B_{Y,1}$ и полагаем $z = \sup\{x_{t_k} \mid k \leqq k_0\} \in X_+$, тогда $z \geqq y$ и $y = z \wedge y \in X_+$). Если $t \in B_{Y,1} \setminus \{t_0\} = T$, то существует $x \in X_+$, для которого $x(t) > 0$ (поскольку $Y(y, B)$-минимальная реализация). Дальнейшее доказательство разобьем на ряд шагов:

1) Если $t \in T$, то найдется $x_t \in X_+ \cap \{y\}^{dd} = X_1$, для которого $x \equiv 1$ на окрестности точки t. Действительно, для некоторого $x \in X_+(y, B)$, $x(t) > 0$ и найдется $n \in N$, $z(t) = n\,x(t) > 1$. Полагаем $x_t = \sup\{x_\alpha \wedge z \mid \alpha \in A\} = y \wedge z$.

2) Если $t_1, t_2 \in T$, найдется $x \in X_1$, для которого $x(t_1) > 0$ и $x \equiv 0$ на некото-

рой окрестности t_2. По 1) найдутся $z_1, z_2 \in X_1$, такие, что $z_1 \leqq y$, $z_1(t_1) = z_1(t_2) = 1$ $z_2(t_1) > z_2(t_2)$. Тогда при подходящих $l, m \in N$ искомым будет $x = (lz_2 - mz_1)_+$.

3) Для $t \in T$ найдется $x \in X_1$, $x(t) \geqq 1$ и $x \equiv 0$ на некоторой окрестности t_0. В силу 1) существует $x_1 \in X_1$, $x_1(t) > 1$. Положим $x_2 = 2 \sup \{x_1 \wedge x_\alpha \mid \alpha \in A\} \in X_1$, $x_3 = \sup \{2x_1 \wedge x_\alpha \mid \alpha \in A\} \in X_1$. Тогда $z = x_2 - x_3 \in X_+$, $z(t) \geqq 1$, $z[\{p \in B_{y,1} \mid \varkappa_1(p) < 1/2\}] \equiv 0$.

4) Для любой окрестности $W \ni t_0$ и $t \in B_{Y,1} \setminus \mathrm{cl}\, W$ найдется $x \in X_1$, $x(t) \geqq 1$ и $x[W] \equiv 0$. В силу 3) существует $x_1 \in X_1$, $x_1(t) \geqq 1$ и $x_1 \equiv 0$ на некоторой окрестности $V \ni t_0$. Для любого $p \in \mathrm{cl}\, W \setminus V$ существует $x_p \in X_1$, $x_p(t) \geqq 1$ и $x_p \equiv 0$ на некоторой окрестности $W_p \ni p$ (по 2)). В силу компактности $\mathrm{cl}\, W \setminus V$ найдется его конечное подпокрытие $\{W_{p_k} \mid k \leqq k_0\}$. Остается положить

$$x = \inf \{x_1 \wedge x_{p_k} \mid k \leqq k_0\} .$$

5) Для любой окрестности $W \in t_0$ найдется $x \in X_1$, $x \leqq y$, $x[B_{Y,1} \setminus W] \equiv 1$ и $x \equiv 0$ на некоторой окрестности точки t_0. Выберем окрестность $W_1 \ni t$, для которой $\mathrm{cl}\, W_1 \subset W$. По 4) для любой $t \in B_{Y,1} \setminus W_1$ найдется $x_t \in X_1$, $x_t(t) \geqq 1$ и $x_t \equiv 0$ на окрестности $W_t \ni t_0$. Пусть $\{x_{t_k}^{-1}(1/2, +\infty) \mid k \leqq k_0\}$ конечное покрытие компакта $B_{Y,1} \setminus W_1$, $\bar{x} = \sup \{x_{t_k} \mid k \leqq k_0\} \in X_1$. Элемент $x = \sup \{x_\alpha \wedge 2\bar{x} \mid \alpha \in A\}$ искомый, т.к. $2\bar{x} \geqq 1$ на $B_{Y,1} \setminus W_1$ и $2\bar{x} \equiv 0$ на $\bigcap \{W_{t_k} \mid k \leqq k_0\} \ni t_0$.

6) Если $z \in Y_+$, $z \equiv 0$ на некоторой окрестности $W \ni t_0$, $z[B_{Y,0}] \equiv 0$ и $z \leqq cy$, то $z \in X_+$. Поскольку $z \in Y$, то

$$z = \sup_{m \in M} \inf_{n \in N(m)} (p_{mn} y + x_{mn}) . \tag{2}$$

В силу 5) найдется $z_1 \in X_1$, $z_1(B_{Y,1} \setminus W) \equiv 1$, $z_1 \equiv 0$ на $V \ni t_0$. Тогда $(c + 1) z_1 \geqq z$, т.к. $cy \geqq z$. Снова в силу 5) найдется $z_2 \in X_1$, $z_2[z_1^{-1}(0, +\infty)] \equiv 1$, $z_2 \leqq y$. Положим $\bar{z} = \sup\limits_{m \in M} \inf\limits_{n \in N(m)} (p_{mn} z_2 + x_{nm})$, где все элементы взяты из (2). Покажем, что $z \equiv |\bar{z}|$ на $z_2^{-1}(1) \cup B_{Y,0}$. Действительно, если $t \in B_{Y,0}$, то $0 \leqq z(t) = \sup\limits_{m \in N} \inf\limits_{n \in N(m)} x_{mn}(t) = |\sup\limits_{m \in M} \inf\limits_{n \in N(m)} x_{mn}(t)| = |\bar{z}|(t)$. Аналогично для $t \in z_2^{-1}(1)$ имеем $z_2(t) = 1 = y(t)$ и $z(t) = |z(t)| = |\bar{z}(t)|$.

Теперь положим $x = (c + 1) z_1 \wedge |\bar{z}| \in X_1$. Если $t \in B_{Y,0}$, то $z_1(t) = x(t) = 0$, т.е. $z(t) = 0 = x(t)$ (по условию). Если $t \bar{\in} B_{Y,1} \cap z_2^{-1}(1)$, то $z_1(t) = 0$ и $z(t) = 0$, т.е. $z(t) = 0 = ((c + 1) z_1 \wedge |\bar{z}|)(t) = x(t)$. Если $t \in B_{Y,1} \cap z_2^{-1}(1)$, то $z(t) = |\bar{z}(t)| = |(c + 1) z_1 \wedge |\bar{z}(t)|\,|(t) = x(t)$ (т.к. $(c + 1) z_1(t) \geqq z(t) = |\bar{z}(t)|$).

Окончательно $z = x \in X_1$.

7) Если $z \in Y_+$, $v \in X_+$, то найдется $x \in X_+$ и окрестность точки t_0, на которой $z \wedge v \equiv x$. Если $z(t_0) \neq 0$ то $z \wedge v \equiv v$ на $z^{-1}((\frac{1}{2} z(t_0), \frac{3}{2} z(t_0))) \cap v^{-1}([0, \frac{1}{3} z(t_0))) \ni t_0$. Пусть теперь $z(t_0) = 0$. Тогда, как и выше,

$$z = \sup_{m \in M} \inf_{n \in N(m)} (p_{mn} y + x_{mn})$$

причем $\inf\limits_{n\in N(m)}(p_{mn}y + x_{mn})(t_0) \leqq 0$ при любом $m \in N$. Обозначим

$$M' = \{m \in M \mid \inf_{n\in N(m)}(p_{mn}y + x_{mn})(t_0) = 0\}.$$

Если $m \in M'$, то положим $N'(m) = \{n \in N(m) \mid p_{mn} = 0\}$. Поскольку $z(t_0) = 0$ и $x_{mn}(t_0) = 0$, то на некоторой окрестности V точки t_0 имеем $z \equiv \sup\limits_{m\in M'}\inf\limits_{n\in N(m)}(p_{mn}y + x_{mn})$. Далее для $m \in M'$ имеем $p_{mn} \geqq 0$ для любого $n \in N(m)$ и $\inf\limits_{n\in N(m)}(p_{mn}y + x_{mn})(t_0) = 0$, откуда $\inf\limits_{n\in N(m)}(p_{mn}y + x_{mn}) \equiv \inf(p_{mn}y + x_{mn})$ на некоторой окрестности $V_m \in t_p$, то есть

$$\inf_{n\in N1(m)}(p_{mn}y + x_{mn}) \equiv \inf_{n\in N(m)} x_{mn} \in X \quad \text{на} \quad V_m .$$

Окончательно, на окрестности $\bigcap\{V \cap V_m \mid m \in M'\} \ni t_0$ имеем $z \equiv \sup\limits_{m\in M'}\inf\limits_{n\in N'(m)} x_{mn} \in \in X$. Остается положить $x = (\sup\limits_{m\in M'}\inf\limits_{n\in N'(m)} x_{mn})_+ \in X$.

8) Покажем, наконец, что если $z \in Y_+$, $v \in X_+$, то $z \wedge v \in X_+$, т.е. что X есть l-идеал в Y. Пусть, как и выше, $z = \sup\limits_{m\in M}\inf\limits_{n\in N(m)}(p_{mn}y + x_{mn})$. Положим $u = z \wedge \wedge v - v \wedge \sup\limits_{m\in M}\inf\limits_{n\in N(m)} x_{mn}$. Имеют место следующие факты:

a) $u \equiv 0$ на $B_{Y,0}$, т.к. $z = \sup\limits_{m\in M}\inf\limits_{n\in N(m)} x_{mn}$ на $B_{Y,0}$.

b) u совпадает с некоторым $\bar{x} \in X$ на окрестности точки t_0. В силу 7) $z \wedge v \equiv \equiv x_1$ на некоторой окрестности $V \ni t_0$, тогда $u \equiv x_1 - v \wedge \sup\limits_{m\in M}\inf\limits_{n\in N(m)} x_{mn} \in X$ на V.

c) u ограничено на B. В самом деле, если $A = \max\{|p_{mn}| \mid m \in M,\ n \in N(m)\}$, то $x_{mn}(t) + A \geqq (p_{mn}y + x_{mn})(t) \geqq x_{mn}(t) - A$ для $t \in B$, т.е. $\sup\limits_{m\in M}\inf\limits_{n\in N(m)} x_{mn} + A \geqq \geqq z \geqq \sup\limits_{m\in M}\inf\limits_{n\in N(m)} x_{mn} - A$ для $t \in B$. Таким образом,

$$|u|(t) = |z - \sup_{m\in M}\inf_{n\in N(m)} x_{nm}|(t) \leqq A \quad (t \in B).$$

Рассмотрим

$$u_1 = u_+ - \sup\{\bar{x}_+ \wedge x_\alpha \mid \alpha \in A\},$$
$$u_2 = u_- - \sup\{\bar{x}_- \wedge x_\alpha \mid \alpha \in A\},$$

где $\bar{x} \in X$ из в).

Заметим, что

$$z \wedge v = u + v \wedge \sup_{m\in M}\inf_{n\in N(m)} x_{mn} = u_+ - u_- + v \wedge \sup_{m\in M}\inf_{n\in N(m)} x_{mn} =$$
$$= u_1 - u_2 + \sup\{\bar{x}_+ \wedge x_\alpha \mid \alpha \in A\} - \sup\{\bar{x}_- \wedge x_\alpha \mid \alpha \in A\} +$$
$$+ v \wedge \sup_{m\in M}\inf_{n\in N(m)} x_{mn},$$

поэтому, если доказать, что $u_i \in X$, то отсюда следовало бы сразу $z \wedge v \in X$. Докажем, что $u_i \in X$. По а) $u_i \equiv 0$ на $B_{Y,0}$; по в) $u_i \equiv 0$ на некоторой окрестности точки t_0; по с) u_i ограничено. Тогда по 6) $u_i \in X$. Таким образом импликация 1).$\Rightarrow$ 2) доказана.

2) $\Rightarrow$ 1). Если X не обладает свойством отщепляемости, то существует l-группа $Y = X^{dd} \supset X$ и $Y \neq X$, причем X есть l-идеал в Y; тогда найдется $y \in Y_+ \setminus X$. Рассмотрим $Y(y, B)$. В ней в силу ее минимальности существует единственная $t_0 \in B_{Y,1}$ такая, что $x(t_0) = 0$ для всех $x \in X$. Если же $t \in B_{Y,1} \setminus \{t_0\}$, то найдется $x_t \in X$, для которого $x_t(t) > 1$. Выберем в X максимальную дизъюнктную систему $\{z_\alpha \in X_+ \mid z_\alpha \leqq y,\ \alpha \in A\}$. Для каждого $\alpha \in A$ и $n \in W$ положим $h_1^{\alpha n} = (n+2)\, z_\alpha - (n+2)\, z_\alpha \wedge y \in X_+$, $h_2^{\alpha n} = n z_\alpha \wedge y - (n-1)\, z_\alpha \wedge$ $\wedge\, y \in X_+$ и $h_{\alpha n} = h_1^{\alpha n} \wedge h_2^{\alpha n} \in X_+$. Тогда $h_{\alpha n} \equiv 0$ на $B \setminus z_\alpha^{-1}((1/(n+2), 1/(n-1)))$ и $h_{\alpha n} \geqq 1/n(n+1)$ на $z_\alpha^{-1}([1/(n+1), 1/n])$. (Действительно, $h_1^{\alpha n} \equiv 0$ на $B \setminus$ $\setminus\, z_\alpha^{-1}((1/(n+2), 2))$; на $B \setminus z_\alpha^{-1}([0, 1/(n-1)])$ $h_2^{\alpha n} \equiv 0$; $h_1^{\alpha n} \geqq 1/(n+1)$ на $z_\alpha^{-1}([1/(n+1), 1/n])$ и $h_2^{\alpha n} \geqq 1/n(n+1)$ на $z_\alpha^{-1}([1/(n+1), 1/n])$). Поэтому система $\{z_{\alpha n} = n(n+1)\, h_{\alpha n} \wedge y \in X_+\}$ является полудизъюнктной и $\sup\{z_{\alpha n}\} = y$. Но $\sup\{z_{\alpha n} \wedge v\} = y \wedge v \in X_+$ для любого $v \in X_+$, что означает по условию 2) $y = \sup\{z_{\alpha n}\} \in X_+$, что противоречит выбору y. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) доказана.

Теорема 2 полностью доказана.

Замечание 1. Известный факт, что латерально полная l-группа обладает свойством отщепляемости, непосредственно следует из теоремы 2.

Замечание 2. По условию полная l-группа (k-группа) с условием отщепляемости обладает порядковой единицей. Но как показывают примеры, уже условно σ-полная l-группа (даже k_σ-пространство, т.е. условню σ-полная векторная решетка) не обязана обладать порядковой единицей. В примере, известном авторам, существенно используется конструкция, введенная в [11].

Пример 1. K_σ-пространство с свойством отщепляемости и без порядковой единицы.

Пусть ω_1 и ω_2 суть наименьшие порядковые типы, соответствующие кардиналам $\aleph_1, \aleph_2$, $W_1 = \{\xi < \omega_1\}$, $W_2 = \{\eta < \omega_2\}$ и $T = W_1 \times W_2$ – их декартово произведение. Если $\bar\eta \in W_2$, то $A(\bar\eta) = \{(\xi, \bar\eta) \in T \mid \xi \in W_1\}$ назовем горизонталью; если $\bar\xi \in W_1$, то $B(\bar\xi) = \{(\bar\xi, \eta) \in T \mid \eta \in W_2\}$ назовем вертикалью. Сопоставим каждой горизонтали $A(\bar\eta)$ трансфинитную последовательность $a_{\bar\eta} =$ $= \{a_{\bar\eta}(\xi, \bar\eta) \mid \xi \in W_1\}$, причем $a_{\bar\eta}(\xi, \bar\eta) = 1, 2$ и если $\eta_1 \neq \eta_2$, то $a_{\eta_1}(\xi, \eta_1)$ и $a_{\eta_2}(\xi, \eta_2)$ не становятся кратными ни с какого $\xi_0 < \omega_1$ (точнее, для любых $\eta_1 \neq \eta_2 < \omega_2$ и $\lambda \in R$, любого $\xi_0 < \omega_1$ существует $\xi_1 < \omega_1$, $\xi_0 < \xi_1$, для которого $\lambda a_{\eta_1}(\xi_1, \eta_1) \neq$ $\neq a_{\eta_2}(\xi_1, \eta_2)$) (существование таких последовательностей a_η следует, например, из [12] – Т.I; § 3, гл. XVII).

Обозначим через X совокупность всех вещественных функций x на T, обладающим следующими свойствами:

1) на каждой горизонтали $A(\eta)$ существуют $\lambda_{x,\eta} \in R$ и $\xi(x, \eta) \in W_1$, для которых $x(\xi, \eta) \equiv \lambda_{x,\eta} a_\eta(\xi, \eta)$ при $\xi > \xi(x, \eta)$. Причем card $\{\eta \in W_2 \mid \lambda_{x,\eta} \neq 0\} = \aleph_1$, т.е. для $\forall \varkappa \in X$ существует $\eta_\varkappa \in W$: для $\eta < \eta_\varkappa$ $\varkappa(\xi, \eta) \equiv 0$, начиная с некоторого $\bar\xi(\varkappa, \eta) < \omega_1$.

2) На каждой вертикали $B(\xi)$ существуют $b(x, \xi) \in R$ и $\eta(\varkappa, \xi) \in W_2$, для

которых $x(\xi, \eta) = b(x, \xi)$ при $\eta < \eta(\varkappa, \xi)$. Заметим, что

$$h_{\xi n}(t) = \begin{cases} 1, & t = (\xi, \eta) \\ 0, & t \neq (\xi, \eta) \end{cases} \in X, \quad \mathbf{1}_\xi(t) = \begin{cases} 1, & t \in A(\xi) \\ 0, & t \,\overline{\in}\, A(\xi) \end{cases} \in X.$$

Покажем, что X есть K_σ-пространство. Действительно, X-векторная решетка. Если $x_n \in X (n \in N)$ и $x_n \leqq x \in X$, то положим $z(\xi, \eta) = \sup\{x_n(\xi, \eta) \mid n \in N\}$. Проверим, что $z \in X$. Пусть $\eta \in W_2$, тогда положим $\lambda_{z\eta} = \sup\{\lambda_{x_n\eta}\}$. Выберем $\xi_0 < \omega_1 \colon \xi_0 > \xi(x_n, \eta)$ $(n \in N)$; тогда $z(\xi, \eta) = \lambda_{z\eta} a_\eta(\xi, \eta)$ при $\xi < \xi_0$; причем, если $\eta \in W_2 \setminus \bigcup_{n \in N} \{\eta \in W_2 \colon \lambda_{x_n\eta} \neq 0\}$, то $\lambda_{z\eta} = 0$ $(\lambda_{x_n\eta} = 0,\ n \in N)$. Пусть $\xi \in W_1$, положим $b_{z,\xi} = \sup\{b(x_{n,\xi}) \mid n \in N\}$ и выберем $\eta(z, \xi) < \omega_2 \colon \eta(z, \xi) > \eta(x_n, \xi)$ . . $(n \in N)$; тогда $z(\xi, \eta) = b_{z,\xi}$ для любого $\eta > \eta(z, \xi)$. Таким образом, $z \in X$.

Далее, X-векторная решетка без единицы. Остается проверить, что X со свойством отщепляемости. Предположим противное, т.е. X есть l-идеал в l-группе $Y = X^{dd}$, но не полоса. Пусть $Y(B)$ есть такая минимальная реализация Y, что каждый $h_{\xi\eta}$ есть характеристическая функция на B. Поскольку $X(B)$ есть l-идеал в $Y(B)$, то $h_{\xi\eta}^{-1}(1)$ есть точка $p_{\xi\eta}$, изолированная в B. Положим $\tilde{T} = \bigcup p_{\xi\eta} \subset B$.

По предположению существует $y \in Y_+ \setminus X$. Покажем, что $y|_{\tilde{T}}$ не совпадает ни с каким $x|_{\tilde{T}}$ для $x \in X(B)$; в противном случае $\mathbf{0} \neq |x - y| \in X^{dd}$, т.е. существует $x_1 \in X_+ \colon x_1 \wedge |\varkappa - y| \neq \mathbf{0}$; тогда для некоторого $\mathbf{0} < \lambda h_{\xi\eta} \leqq x_1 \wedge |x - y|$, что противоречит $|x - y|(\xi, \eta) = 0$. Поэтому $y|_{\tilde{T}} \,\overline{\in}\, X(\tilde{T}) = \{x|_T \mid x \in X(B)\}$. Сначала заметим, что $y|_{A(\eta)} \in X(\tilde{T})$ (поскольку $\tilde{T} \cong T$, то $A(\eta)$ в $\tilde{T}$ имеет смысл). Действительно, $na_\eta \wedge y \in X(\tilde{T})$. Предположим, что для любого $n \in N$ существует $\xi(\eta, n) < \omega_1$, для которого если $\xi > \xi(\eta, n)$, то $na_\eta(\xi, \eta) \wedge y(\xi, \eta) = na_\eta(\xi, \eta)$; но тогда для любого $\xi_0 < \xi(\eta, n)$ (для любого $n \in N$) имеем $n \leqq na_\eta(\xi_0, \eta) \leqq$ $\leqq y(\xi_0, \eta) < +\infty$. Поэтому существует $n_0 \in N$, для которого $n_0 a_\eta(\xi, \eta) \wedge$ $\wedge\, y(\xi, \eta) \neq n_0 a_\eta(\xi, \eta)$, начиная ни с какого $\xi < \omega_1$. Но $n_0 a_\eta(\xi, \eta) \wedge y(\xi, \eta) =$ $= \alpha a_\eta(\xi, \eta)$ при $\bar{\xi} < \xi < \omega_1$, т.е. $y(\xi, \eta) = \alpha a_\eta(\xi, \eta)$ при $\xi > \bar{\xi}$ и $y|_{A(\eta)} \in X(\tilde{T})$. Затем $y|_{B(\xi)} \in X(\tilde{T})$. Действительно, для любого $n \in N$ имеем $n\,\mathbf{1}_\xi \wedge y \in X(\tilde{T})$. Если для любого $n \in N$ существует $\eta(n, \xi) \in W_2$: при $\eta_0 > \eta(n, \xi)$ $(n\,\mathbf{1}_\xi \wedge y)$ . . $(\xi, \eta) = n\,\mathbf{1}_\xi(\xi, \eta)$, то найдется $\eta_0 \in W_2$, $\eta_0 < \eta(n, \xi)$ для любого $n \in N$, но тогда $n = n\,\mathbf{1}_\xi(\xi, \eta_0) \leqq y(\xi, \eta_0) < +\infty$. Поэтому существует $n_0 \in N$, лдя которого $n_0\,\mathbf{1}_\xi \wedge y(\xi, \eta) \neq n\,\mathbf{1}_\xi(\xi, \eta)$ начиная ни с какого $\eta < \omega_2$. Но $n_0\,\mathbf{1}_\xi \wedge y \in X$ и при $\eta < \bar{\eta} \in W_2$ $(n_0\,\mathbf{1}_\xi \wedge y)(\xi, \eta) \equiv a$, т.е. $a = y(\xi, \eta)$ $(\eta > \bar{\eta})$ и $y|_{B(\xi)} \in X(\tilde{T})$.

Заметим, что $y|_{B(\xi)}(\xi, \eta) \equiv a_\xi$ при $\eta < \eta(\xi)$. Пусть $\eta_0 > \eta(\xi)$ для любого $\xi < \omega_1$; тогда для любых $\eta_1, \eta_2 \geqq \eta_0$ $y|_{A(\eta_1)} \equiv y|_{A(\eta_2)}$. Это означает, что существует $\xi_0 < \omega_1 \colon y|_{A(\eta_0)}(\xi, \eta_0) \equiv y|_{A(\eta)}(\xi, \eta) = 0$ при $\xi > \xi_0$, $\eta \geqq \eta_0$. Положим

$$z(\xi, \eta) = \begin{cases} y(\xi, \eta_0), & \xi < \xi_0 \\ 0, & \xi \geqq \xi_0 \end{cases} \in X$$

и рассмотрим

$$u(\xi, \eta) = y(\xi, \eta) - z(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \eta > \eta_0 \\ y(\xi, \eta), & \eta \leqq \eta_0. \end{cases}$$

Проверим, что $u \in X$. Поскольку $u|_{A(\eta)} \equiv y|_{A(\eta)}$ при $\eta \leqq \eta_0$ а $y|_{A(\eta)} \equiv \lambda a_\eta$ при $\xi > \xi_\eta$, то условие 1) выполнено. Условие 2) выполнено, т.к. $u(\xi, \eta) \equiv 0$ при $\eta > \eta_0$.

Таким образом, $y = z + u \in X$, что противоречит выбору y.

Установим аналог теоремы 2 для случая l-группы с порядковой единицей $\mathbf{1}$. При этом будем использовать понятие башни, введенное [8] и по существу (в нашем случае) появившееся в [5]: последовательность $\{x_n \in X_+ \mid n \in N\}$ называется башней, если $x_n \wedge m\mathbf{1} = x_m (m \leqq n)$ и $\{n\mathbf{1} - x_n \mid n \in N\}$ полно в X.

Предложение 3. *Если X l-группа с $\mathbf{1}$, то эквивалентны утверждения*

1) *X обладает свойством отщепляемости.*

2) *Если $\{x_n\}$ башня в X и $\sup\{x_n \wedge x\} \in X_+$ для любого $x \in X_+$, то $\sup\{x_n\} \in X$.*

Доказательство. Будем рассматривать реализацию $X(\mathbf{1}, B)$. Известно ([5], [8]), что для любой $\{x_n\}$ в $X(\mathbf{1}, B)$ $f = \sup\{x_n\}$ есть расширенная функция на B.

Докажем 1) $\Rightarrow$ 2). Для любого $n \in N$ существует $u_n \in X_+$, для которого $u_n(f^{-1}([n, n+1])) \equiv n+1$ и $u_n(B \setminus f^{-1}((n-1, n+2))) \equiv 0$. Тогда $\{u_n\}$ есть счетная (полная) полудизъюнктная система в X; тогда и система $\{\omega_n = u_n \wedge \wedge \varkappa_{n+1}\}$ является полудизъюнктной и $\sup_{IX}\{\omega_n\} = \sup_{IX}\{x_n\}$. Поэтому для любого положительного $v \in X_+$ имеем $\sup\{\omega_n \wedge v\} = \sup\{x_n \wedge v\} \in X$ и по теореме 2 $\sup\{\varkappa_n\} = \sup\{\omega_n\} \in X_+$.

Докажем 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть X есть l-идеал, но не полоса в Y. Рассмотрим $Y(\mathbf{1}, B)$, тогда по предположению существует $z \in X_+^{dd} \setminus X$, т.е. z есть расширенная непрерывная функция на $\mathbf{1}^{-1}(1) = B_{1,1}$, но тогда ([5]) $z = \sup\{z \wedge n\mathbf{1} \in X\}$ и $\{z \wedge n\mathbf{1} \mid n \in N\}$ башня в X. Если $v \in X_+$, то $\sup\{z \wedge n\mathbf{1} \wedge v\} = v \wedge z \in X$, тогда по условию 2) $z = \sup\{z \wedge n\mathbf{1}\} \in X$, что противоречит выбору z.

Следствием из предложения 3 являются необходимые и достаточные условия, чтобы l-группа с сильной единицей $\mathbf{1}$ обладала свойством отщепляемости. Как оказывается, такие группы связаны с введенными А. И. Векслером ([4]) P'-пространствами, которые характеризуются тем, что в них не существует нигде не плотных нуль-множеств (примером P'-компакта могут служить $\beta N \setminus N$, $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$).

Предложение 4. *Пусть X есть l-группа с сильной единицей $\mathbf{1}$. Эквивалентны утверждения:*

1) *X обладает свойством отщепляемости;*

2) *$X \cong X(\mathbf{1}, B)$, где B есть P'-компакт;*

3) *если $x_n \downarrow \mathbf{0}$ в X, то $\{x_n\}$ равномерно сходится к $\mathbf{0}$;*

4) *любая не более чем счетная полудизъюнктная система в X либо конечна, либо неполна в X.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Если $\{x_n\}$ башня в X, $v \in X_+$, то $v \leqq n_0\mathbf{1}$ и $\sup\{\varkappa_n \wedge v\} = \sup\{\varkappa_n \wedge v \mid n \leqq n_0\} \in X_+$. Тогда по предложению 3

$\sup\{\varkappa_n\} \in X \subset C(B)$, т.е. любая расширенная функция принадлежит $C(B)$, что означает B есть P'-пространство.

$2) \Rightarrow 1)$. Если $\{x_n\}$ башня в $X(B)$, то ([4], [8]) существует $n_0 \in N$, для которого $x_n = x_{n_0}(n_0 \leqq n)$. По предложению 3 X обладает свойством отщепляемости.

Эквивалентность условий 3), 4) условию 2) непосредственно следует из определения P'-пространства и свойств o-сходимости (см., например, [10]).

Следующее утверждение является усилением предложения 3 для случая o-полных l-групп с единицей.

Теорема 5. *Пусть X есть o-полная l-группа с единицей* $\mathbf{1}$. *Эквивалентны утверждения:*

1) *X обладает свойством отщепляемости;*

2) *если $\{x_n\}$ башня в X, то* $\sup\{x_n\} \in X$;

3) *$X(\mathbf{1}, B)$ мажорирует решетку $\mathscr{D}_\infty(B)$ всех расширенных непрерывных функций на B.*

Доказательство. Будем рассматривать реализацию $X(\mathbf{1}, B)$.

$1) \Rightarrow 2)$. Пусть $v \in X_+$ и $\{x_n\}$ башня в X_+. Нужно проверить, что $\sup\{v \wedge \varkappa_n\} \in$ $\in X_+$. Если $v \leqq n_0\,\mathbf{1}$, то

$$v \wedge x_{n_0} = v \wedge x_n(n \geqq n_0)\,, \quad \sup\{v \wedge x_n\} = v \wedge x_{n_0} \in X_+\,.$$

Если $v \mathrel{\bar{\in}} C(B)$, то покажем, что существуют $u_n \in X_+$, $u_n \downarrow \mathbf{0}$,

$$u_n(v^{-1}([n, +\infty])) \geqq v\,, \quad u_n(v^{-1}([0, n-1])) \equiv 0\,.$$

Тогда $|v \wedge x_{n+p} - v \wedge x_n| \leqq u_n \downarrow \mathbf{0}$ и по o-полноте X существует $y \in X_+$, для которого $|y - x_n \wedge v| u_n$, т.е. $y = \sup\{v \wedge x_n\} \in X_+$ и по предложению 3 импликация $1) \Rightarrow 2)$ доказана. В качестве же u_n положим $\inf\{(k+1)[v - (k-1)\,\mathbf{1} \wedge v] \mid k \leqq n\}$. Действительно, $u_n \downarrow \mathbf{0}$ и $v - (k-1)\,\mathbf{1} \wedge v \equiv 0$ на $v^{-1}([0, k-1])$. Остается проверить, что $(k+1)[v - (k-1)\,\mathbf{1} \wedge v] \geqq v$ на $v^{-1}([k, +\infty])$: пусть $v(t) = k + s$, где $s \geqq 0$, тогда $(v - (k-1)\,\mathbf{1} \wedge v)(t) = v(t) - k + 1 = s + 1$ и $(k+1)[v - (k-1)\,\mathbf{1} \wedge v](t) = (k+1)(s+1) \geqq k + s = v(t)$.

$2) \Rightarrow 3)$. Пусть $f \in \mathscr{D}_\infty(B)$, $f \geqq 0$. Существуют $u_n \in X_+$, $u_n(f^{-1}([0, n-1])) \equiv 0$, $u_n(f^{-1}([n, +\infty])) \equiv n$ и $u_n \leqq n\,\mathbf{1}$. Положим $v_k = \sup\{u_n \mid n \leqq k\} \in X_+$; при $k \geqq n$, $v_k \wedge n\,\mathbf{1} = [\sup\{u_p \mid p \leqq n\} \vee \sup\{u_p \mid k \geqq p > n\}] \wedge n\,\mathbf{1} = v_n \vee \vee \sup\{u_p \wedge n\,\mathbf{1} \mid k \geqq p > n\}$, но $u_p \equiv 0$ на $f^{-1}([0, n])$, $u_p \wedge n\,\mathbf{1} \leqq n$ (для $k \geqq p > n$), т.е. $u_p \wedge n\,\mathbf{1} \leqq u_n$ и $v_k \wedge n\,\mathbf{1} = v_n$. Наконец, если $(n\,\mathbf{1} - v_n)(t) = 0$ для любого $n \in N$, то $v_n(t) = n$ и $t \mathrel{\bar{\in}} f^{-1}([0, n-1])$, т.е. $t \in f^{-1}(+\infty)$, что означает полноту системы $\{n\,\mathbf{1} - x_n \mid n \in N\}$ в X. Таким образом, $\{v_k \mid k \in N\}$ башня в X и $\sup\{v_k \mid k \in N\} \geqq f$.

$3) \Rightarrow 1)$. Следует из предложения 3.

Замечание 1. Если l-группа X с сильной единицей равномерно полна и со свойством отщепляемости, то X o-полная.

Замечание 2. В формулировке теоремы 5 $\mathscr{D}_\infty(B)$ можно считать векторной решеткой, т.к. из o-полноты $X(\mathbf{1}, B)$ следует o-полнота компакта (или Θ-продолжимость, в другой терминологии) B ([10]). В общем случае, как хорошо известно, $\mathscr{D}_\infty(B)$ не обязано быть линейным пространством.

Замечание 3. Если l-группа $X \cong \mathscr{D}_\infty(B)$, то по теореме 5 X обладает свойством отщепляемости; но не каждая o-полная l-группа со свойством отщепляемости гомоморфна некоторому $\mathscr{D}_\infty(B)$. Укажем класс o-полных l-групп с единицей, в котором все l-группы со свойством отщепляемости имеют вид $\mathscr{D}_\infty(B)$.

Предложение 6. *Для того, чтобы o-полная l-группа X с единицей* $\mathbf{1}$ *и свойством отщепляемости имела вид* $X \cong \mathscr{D}_\infty(B)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $n \in N$ *существовал* $x_n \in X_+$, $\mathbf{0} \leqq x_n \leqq nx_n \leqq \mathbf{1} \leqq (n+1)\,x_n$.

Доказательство. Необходимость. Если $X \cong \mathscr{D}_\infty(B)$, то $(1/(n+1))\,\mathbf{1}$ является требуемым x_n.

Достаточность. Рассмотрим $X = X(\mathbf{1}, B)$, со свойством отщепляемости. Из условия следует, что для любого $t \in B$ и любого $n \in N$ существует $x_{tn} \in X_+(\mathbf{1}, B)$, для которого $0 < x_{tn}(t) < 1/n$. Если теперь $f \in C(B)$, то для любого $t \in B$ и $n \in N$ существует

$$y_{tn} \in X_+(\mathbf{1}, B)\,, \quad y_{tn} \leqq f\,, \quad 0 < f(t) - y_{tn}(t) < 1/n\,.$$

Выбираем конечное покрытие B множествами вида $\{(f - y_{t_k n})^{-1}(0, 1/n) \mid k \leqq k(n)\}$ и полагаем $z_n = \sup\{y_{t_k n} \mid k \leqq k(n)\}$. Тогда $|f - z_n| < 1/n$ на B, т.е. $|f - z_n| \leqq x_{n-1}$, где x_{n-1} из условия предложения 6. Остается заметить, что $x_n \downarrow \mathbf{0}$ по o-полноте X, имеем $f \in X$, т.е. $C(B) \subset X(\mathbf{1}, B)$. Если теперь $g \in \mathscr{D}_\infty(B)$, $g \geqq \mathbf{0}$, то $\{g_n = g \wedge n\,\mathbf{1} \mid n \in N\}$ есть башня в $C(B) \subset X(\mathbf{1}, B)$ и по теореме 5 (2), $g = \sup\{g_n\} \in X(\mathbf{1}, B)$, т.е. $X(\mathbf{1}, B) = \mathscr{D}_\infty(B)$.

Замечание. Как показывают примеры, условие o-полноты в теореме 5 и предложении 6 нельзя заменить на близкое ему условие r-полноты, даже для случая векторной решетки.

Пример 2 (CH). Существует r-полная векторная решетка (тем более l-группа) счетного типа с единицей, обладающая свойством отщепляемости и с неограниченной башней.

Напомним, что точка t в топологическом пространстве T называется p-точкой, если для любой последовательности окрестностей u_n точки t имеет место $t \in \operatorname{int} \cap \{u_n \mid n \in N\}$.

Выберем P-точку $t_0 \in \beta N \setminus N$ (CH). Пусть

$$\{f_\alpha \in C_\infty(\beta N) \mid f \geqq \mathbf{1},\ f \,\bar{\in}\, C(\beta N)\} = \{f_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}\ (CH)\,.$$

Построим ниже три трансфинитные последовательности

$$\{g_\alpha \in C_\infty^+(\beta N)\}\,, \quad \{p_\alpha \in \beta N \setminus N\}\,, \quad \{s_\alpha \in \beta N \setminus N\} \quad (\alpha < \omega_1)$$

для которых выполняются следующие условия:

1) если $g_\alpha = f_\alpha$, то $p_\alpha = \emptyset$, $s_\alpha = \emptyset$; если $g_\alpha \neq f_\alpha$, то p_α, s_α суть P-точки в $\beta N \setminus N$;

2) $g_\alpha(n) \neq 0$ при $n \in N$;

3) $g_\alpha(t_0) < +\infty$;

4) $g_\alpha(p_\alpha) = g_\alpha(s_\alpha) = +\infty$;

5) $g_\alpha/g_{\alpha_1}(p_{\alpha_1}) = g_\alpha/g_{\alpha_1}(s_{\alpha_1}) < +\infty$ (в силу 2) частное g_α/g_{α_1} имеет смысл для всех $\alpha, \alpha_1 < \omega_1$);

6) если $g_\alpha \neq f_\alpha$, то $(f_\alpha \wedge g_\alpha/g_\alpha)(p_\alpha) \neq (f_\alpha \wedge g_\alpha/g_\alpha)(s_\alpha)$.

Покажем, что если эти последовательности уже имеются, то можно построить наш пример. Пусть Z есть векторная решетка, порожденная в $C_\infty(\beta N)$ всеми $\{g_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$, $\{h \in C(\beta N) \mid h[\beta N \setminus N] \equiv \text{const}\}$. Если $X = rZ$, то

$$X \subset \{f \in C_\infty(\beta N) \mid f/g_\alpha(p_\alpha) = f/g_\alpha(s_\alpha) \in R\} = T_\alpha .$$

Тогда X есть r-полная векторная решетка счетного типа с неограниченной башней $\{x_n\}$, где

$$x_n(m) = \begin{cases} n\,, & m \geqq n \\ m\,, & m < n \end{cases}$$

Остается проверить, что X обладает свойством отщепляемости. Для этого достаточно установить, что X не может быть l-идеалом в l-группе $Y \subset C_\infty(\beta N)$. Действительно, если X есть l-идеал в l-группе Y, то пусть $Y = Y(\mathbf{1}, B)$; тогда, если $y_n \in X \subset C_\infty(\beta N)$ и $y_n(n) = 1$, $y_n(m) = 0$ $(m \neq n)$, то соответствующий элемент $\varepsilon y_n + Y(\mathbf{1}, B)$ таков, что он есть характеристическая функция, $(\varepsilon y_n)^{-1}(1)$ есть точка, т.к. $X(B)$ есть l-идеал в $Y(\mathbf{1}, B)$. Если $y \in X_+^{dd} \setminus X$, то существует $z \in X(B)$, т.ч. $\mathbf{0} \neq |z| \wedge y \in X(B)$. В этом случае найдется $\varepsilon y_n \in X(B)$, для которого $\alpha\varepsilon y_n \leqq |z| \wedge y$. Таким образом $\bigcup[(\varepsilon y_n)^{-1}(1) \mid n \in N]$ плотно в $\mathbf{1}^{-1}(1)$ и $y \in C_\infty(\beta \cup (\varepsilon y_n)^{-1}(1)) \cong C_\infty(\beta N)$. Если $y \in Y_+ \setminus X$, то $f_{\alpha_0} = y \vee \mathbf{1} \in Y_+ \setminus X$. Тогда $f_{\alpha_0} \neq g_{\alpha_0}$ и $p_{\alpha_0}, s_{\alpha_0} \neq \emptyset$. По 6) $f_{\alpha_0} \wedge g_{\alpha_0}/g_{\alpha_0}(p_{\alpha_0}) \neq f_{\alpha_0} \wedge g_{\alpha_0}/g_{\alpha_0}(s_{\alpha_0})$, что противоречит $f_{\alpha_0} \wedge g_{\alpha_0} \in X \subset T_{\alpha_0}$.

Перейдем к построению указанных объектов. Предположим, что $\{g_\alpha\}$, $\{p_\alpha\}$, $\{s_\alpha\}$ построены для всех $\alpha < \alpha_0 < \omega_1$. Построим $g_{\alpha_0}, p_{\alpha_0}, s_{\alpha_0}$. Для этого будет рассмотрен ряд возможностей, для каждой из которых будут построены требуемые объекты — непосредственная проверка того, что свойства 1)–6) выполнены для семейств при $\alpha \leqq \alpha_0$, опускается.

a) $f_{\alpha_0}^{-1}(+\infty) \setminus \bigcup\{g_\alpha^{-1}(+\infty) \mid \alpha < \alpha_0\} \neq \emptyset$. Как известно, $\beta N \setminus N$ есть P'-компакт ([4]), поэтому существует непустое открытое $W \subset \beta N \setminus N$, для которого $\operatorname{cl} W \cap g_\alpha^{-1}(+\infty) = \emptyset (\alpha < \alpha_0)$, $W \subset f_{\alpha_0}^{-1}(+\infty)$. Выберем P-точки $p_{\alpha_0}, s_{\alpha_0} \in W$, отличные от t_0 и уже построенных p_α, s_α $(\alpha < \alpha_0)$. Берем $g_{\alpha_0} \in C_\infty^+(\beta N)$, удовлетворяющее условиям 2)–3), для которого $g_{\alpha_0}(p_\alpha) = g_{\alpha_0}(s_\alpha) = 0$ при $\alpha < \alpha_0$, $g_{\alpha_0} \equiv f_{\alpha_0}^2$ на окрестности точки p_{α_0} и $g_{\alpha_0} \equiv \sqrt{f_{\alpha_0}}$ на окрестности точки s_{α_0}.

b) $f_{\alpha_0}^{-1}(+\infty) \subset \bigcup\{g_\alpha^{-1}(+\infty) \mid \alpha < \alpha_0\}$ и существует $\bar\alpha < \alpha_0$, для которого либо $f_{\alpha_0}/g_{\bar\alpha}(p_{\bar\alpha}) = +\infty$, либо $f_{\alpha_0}/g_{\bar\alpha}(s_{\bar\alpha}) = +\infty$. Пусть $f_{\alpha_0}/g_{\bar\alpha}(p_{\bar\alpha}) = +\infty$; по 4) $f_{\alpha_0}(p_{\bar\alpha}) = +\infty$. Существует $h \in C_\infty^+(\beta N)$ такое, что $h(p_{\bar\alpha}) = 0$, $hf_{\alpha_0}/g_{\bar\alpha}(p_{\bar\alpha}) = +\infty$. Поскольку $p_{\bar\alpha}$ — есть P-точка, то в $\beta N \setminus N$ существует окрестность $W \in p_{\bar\alpha}$ такая, что $f_{\alpha_0}(W) \equiv +\infty$, $hf_{\alpha_0}(W) \equiv hf_{\alpha_0}/g_{\alpha_1}(W) = +\infty$ при любом $\alpha_1 < \alpha_0$ (это следует из 5 и равенства $hf_{\alpha_0}/g_{\alpha_1}(W) = hf_{\alpha_0}/g_{\bar{\alpha}} \cdot g_{\bar{\alpha}}/g_{\alpha_1}$). Выберем P-точки p_{α_0}, $s_{\alpha_0} \in W$, отличные от p_α, s_α при $\alpha < \alpha_0$ и от t_0, и построим $g_{\alpha_0} \in C_\infty^+(\beta N)$, удовлетворяющее 2)—3), для которого $g_{\alpha_0}(p_\alpha) = g_{\alpha_0}(s_\alpha) = 0$ $\alpha < \alpha_0$, $g_{\alpha_0} \equiv f_{\alpha_0}^2$ на окрестности точки p_{α_0} и $g_{\alpha_0} \equiv hf_{\alpha_0}$ на окрестности точки s_{α_0}.

c) $f_{\alpha_0}^{-1}(+\infty) \subset \bigcup\{g_\alpha^{-1}(+\infty) \mid \alpha < \alpha_0\}$, $f_{\alpha_0}/g_\alpha(p_\alpha)$, $f_{\alpha_0}/g_\alpha(s_\alpha) \in R$ при $\alpha < \alpha_0$ и найдется $\bar{\alpha} < \alpha_0$, для которого $f_{\alpha_0}/g_{\bar{\alpha}}(p_{\bar{\alpha}}) \neq f_{\alpha_0}/g_{\bar{\alpha}}(s_{\bar{\alpha}})$. Выберем дизъюнктные окрестности $W \in p_{\bar{\alpha}}$, $U \in s_{\bar{\alpha}}$, на которых $f_{\alpha_0} \leqq \lambda g_{\bar{\alpha}}$, $g_{\bar{\alpha}} \equiv +\infty$, $g_\alpha/g_{\bar{\alpha}} \equiv g_\alpha/g_{\bar{\alpha}}(p_\alpha) \leqq$ $\leqq g_\alpha/g_{\bar{\alpha}}(s_\alpha)$ при $\alpha < \alpha_0$, $f_{\alpha_0} \mid g_{\bar{\alpha}} \equiv f_{\alpha_0} \mid g_{\bar{\alpha}}(p_{\bar{\alpha}})$, $f_{\alpha_0}/g_{\bar{\alpha}} \equiv f_{\alpha_0}/g_{\bar{\alpha}}(s_{\bar{\alpha}})$. Выберем P-точки $p_{\alpha_0} \in W$, $s_{\alpha_0} \in U$, отличные от p_α, s_α при $\alpha < \alpha_0$ и от t_0. Построим $g_{\alpha_0} \in C_\infty^+(\beta N)$, $g_{\alpha_0}(p_\alpha) = g_{\alpha_0}(s_\alpha) = 0$ при $\alpha < \alpha_0$, $g_{\alpha_0} \equiv \lambda g_{\bar{\alpha}}$ на окрестностях точек p_{α_0}, s_{α_0}.

d) $f_{\alpha_0}^{-1}(+\infty) \subset \bigcup\{g_\alpha^{-1}(+\infty) \mid \alpha < \alpha_0\}$, $f_{\alpha_0}/g_\alpha(p_\alpha) = f_{\alpha_0}/g_\alpha(s_\alpha) \in R$ при $\alpha < \alpha_0$. Имеем $f_{\alpha_0}(t_0) \in R$ (в силу 3). Положим $g_{\alpha_0} = f_{\alpha_0}$ и $p_{\alpha_0} = s_{\alpha_0} = \emptyset$.

Литература

[1] *M. Anderson, P. Conrad, O. Kenny:* Splitting properties in archimedean l-groups. J. Austral. Math. Soc., 1977, *23* (Ser. A), No 2, 247—256.

[2] *Г. Биркгоф:* Теория структур. М., 1952.

[3] *А. И. Векслер:* Понятие нормальной в себе линейной структуры и некоторые приложения этого понятия и теории линейных нормированных структур. Изв. ВУЗов, математика, 1966, Но 4, 13—22.

[4] *А. И. Векслер:* P'-точки, P'-множества, P'-пространства. Новый класс порядково-непрерывных мер и функционалов. ДАН СССР, 1973, *212*, 784—792.

[5] *Б. З. Вулих:* О свойстве внутренней нормальности обобщенных полуупорядоченных колец. Уч. зап. Лен. педаг. ин-та, 1958, *166*, 3—15.

[6] *Б. З. Вулих:* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., 1961.

[7] *L. Gillman, M. Jerison:* Rings of continuous functions. Princeton, 1960.

[8] *В. К. Захаров:* О башенном пополнении архимедовой векторной структуры. Оптимизания. 1973, № 12, 77—85.

[9] *F. Papangelou:* Order convergence and topological completion of commutative lattice-groups. Math. Ann., 1964, *155*, 81—107.

[10] *А. В. Колдунов:* σ-пополнение и o-пополнение $C(B)$. Функциональный анализ. Межвузовский сборник, вып. 6, Ульяновск, 1976, 76—83.

[11] *Г. Я. Роткович:* О погружении полуупорядоченного пространства в пространство с единицей. Сиб. мат. журн., 1965, № 4, 918—923.

[12] *W. Sierpinski:* Cardinal and ordinal numbers. Warszawa, 1958.

[13] *J. Jakubík:* Splitting property of lattice ordered groups. Czechoslovak Math. J., 1974, *24* (*99*), 257—269.

Адрес автора: Колдунов, Андрей Витальевич, 198255, Ленинград, пр. Ветеранов 21, кв. 59; Роткович, Георгий Яковлевич, 194017, Ленинград, ул. Дрезденская 26, кв. 27.