Lando Degoli

Sur la caractéristique de la Jacobienne des systèmes linéaires de quadriques

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 36 (1986), No. 3, 476–484

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102107

Czechoslovak Mathematical Journal, 36 (111) 1986, Praha

SUR LA CARACTÉRISTIQUE DE LA JACOBIENNE DES SYSTÈMES LINÉAIRES DE QUADRIQUES

LANDO DEGOLI, Modena

(Received April 17, 1985)

Dans l'espace linéaire S_r de coordonnées projectives homogénes x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, r)$ choisissons $d + 1$ quadriques linéairement indépendantes:

$$f_q = \sum_{i,k=0}^{r} a_q^{ik} x_i x_k \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, d)\,.$$

Le système linéaire L_d de dimension d, qui en résulte, est exprimé par l'equation:

$$\sum_{q=0}^{d} \mu_q f_q = 0\,.$$

Supposons que la matrice Jacobienne à $r + 1$ lignes et $d + 1$ colonnes:

$$J = \left\| \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \right\| \quad \begin{pmatrix} q = 0, 1, 2, \ldots, d \\ i = 0, 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

soit à caractéristique $m \leqq d$.

Si la caractéristique de la Jacobienne est $m = r - h$ $(h \geqq 0)$, un point générique de S_r est conjugué avec un S_h par rapport à toutes les quadriques du système.

Un système $L_{d/m}$ de dimension d et caractéristique m possède $d + 1$ quadriques linéairement indépendantes, parmi les quelles on peut choisir m quadriques fonctionellement indépendantes, desquelles toutes les autres dépendent.

Un système $L_{d/m}(m \leqq d)$, qui ne possède pas de *systèmes subordonnés essentiels* $L_{g/c}$ (voir: [6]), avec:

$$2 \leqq g \leqq d - 1\,, \quad 2 \leqq c \leqq m - 1\,, \quad c \leqq g$$

est dit *irréductible de prémier espèce.*

Nous avons démontré (voir: [6]) le:

Théorème A. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire irréductible de prémière espèce soit à Jacobienne de caractéristique $r - k \leqq d$ $(k \geqq 0)$ c'est que les quadriques du système, qui passent par un point générique de S_r, possédent en commun un S_{k+1}.*

Donnés deux systèmes linéaires L_a et L_b, qui ont en commun un système linéaire L_c, leur *système-union* résulte de dimension: $a + b - c$.

Nous dirons le système $L_{d/m}$ $(m \leqq d)$ *réductible*, s'il est l'union des systèmes subordonnés, parmi lesquels un au moins: $L_{a/b}(b \leqq a)$ n'a pas des quadriques en commun avec les autres.

Nous dirons que les systèmes linéaires $L_{d_1}, L_{d_2}, \ldots, L_{d_s}$ forment une *chaine* quand ils ne sont pas réductibles et si L_{d_1} et L_{d_2} ont en commun une quadrique au moins, leur système union L_a a en commun avec L_{d_3} au moins une quadrique, et le système L_b union de L_a avec L_{d_3} a en commun au moins une quadrique avec L_{d_4} et ainsi de suite jusqu'à L_{d_s}.

Il existe le:

Lemme 1. *Si le système L_d possède une chaine de systèmes subordonnés $L_{d_1}, L_{d_2}, \ldots$ $\ldots, L_{d_s}$ et pas d'autres quadriques fonctionellement indépendantes, il est possible choisir parmi les quadriques de $L_{d_1}, L_{d_2}, \ldots, L_{d_s}$, qui passent par un point P de S_r, d quadriques linéairement indépendantes, lesquelles individualisent le système L_{d-1} de quadriques de L_d, qui passent par P.*

Les équations de L_{d_1} et L_{d_2} résultent:

$$\mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_h f_h + \ldots + \mu_{d_1} f_{d_1} = 0\,, \tag{1}$$
$$\xi_0 g_0 + \xi_1 g_1 + \ldots + \xi_h g_h + \ldots + \xi_{d_2} g_{d_2} = 0\,.$$

L'équation du système-union L_d devient:

$$\begin{aligned} &\nu_0 f_0 + \nu_1 f_1 + \ldots + \nu_h f_h + \ldots + \nu_{d_1} f_{d_1} + \\ &+ \theta_0 g_0 + \theta_1 g_1 + \ldots + \theta_h g_h + \ldots + \theta_{d_2} g_{d_2} = 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Puisque L_{d_1} et L_{d_2} ont en commun au moins une quadrique, nous pouvons supposer f_h coincident avec g_h.

Soit P un point de S_r. Indiquons $f_0(P), f_1(P), \ldots, g_0(P),\ g_1(P) \ldots$ les valeurs complexes des quadriques en P. En remplaçant les coordonnées de P dans (1) on peut déterminer μ_h et ξ_h en fonction des μ et ξ restants.

On obtient:

$$\mu_0\left(f_0 + \frac{f_0(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \mu_1\left(f_1 + \frac{f_1(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \ldots + \mu_{d_1}\left(f_{d_1} + \frac{f_{d_1}(P)}{f_h(P)} f_h\right) = 0\,, \tag{3}$$
$$\xi_0\left(g_0 + \frac{g_0(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \xi_1\left(g_1 + \frac{g_1(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \ldots + \xi_{d_2}\left(g_{d_2} + \frac{g_{d_2}(P)}{f_h(P)} f_h\right) = 0\,.$$

Dans ces systèmes L_{d_1-1} et L_{d_2-1} manquent les paramètres μ_h et ξ_h. En opérant de même façon dans le système (2) et en éliminant le paramètre $(\nu_h + \theta_h)$ on obtient:

$$\begin{aligned} &\nu_0\left(f_0 + \frac{f_0(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \nu_1\left(f_1 + \frac{f_1(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \ldots + \nu_{d_1}\left(f_{d_1} + \frac{f_{d_1}(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \\ &+ \theta_0\left(g_0 + \frac{g_0(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \theta_1\left(g_1 + \frac{\zeta_1(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \ldots + \theta_{d_2}\left(g_{d_2} + \frac{g_{d_2}(P)}{f_h(P)} f_h\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Puisque le système linéaire (4) est individualisé par les mêmes quadriques linéairement indépendantes des systèmes (3), il en résulte que le système L_{d-1} des quadriques de L_d, qui passent par P, est individualisé par a quadriques linéairement indépendantes de L_{d_1-1} et L_{d_2-1}.

Mais par hypothèse les systèmes subordonnés de L_d forment une chaine. Donc le système-union L_a possède en commun avec L_{d_3} au moins une quadrique.

En opérant de même façon on prouvera que le système L_{b-1} de quadriques de L_b, système-union de L_a avec L_{d_3}, qui passent par P, est individualisé par b quadriques linéairement indépendantes extraites de L_{a-1} et L_{d_3-1}, c'est à dire de: L_{d_1-1}, L_{d_2-1}, L_{d_3-1}.

En continuant de cette manière, puisque L_d ne possède pas d'autres quadriques fonctionellement indépendantes, le lemme résulte démontré.

Il existe le:

Théorème B. *La condition nécessaire et suffisante pour que le système linéaire de quadriques L_d, qui possède une chaine de systèmes irréductibles de prémière espéce $L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, \ldots, L_{d_s/m_s}$ $(m_i \leqq d_i;\ i = 1, 2, \ldots, s)$ et pas d'autres quadriques fonctionellement indépendantes, soit à Jacobienne de caractéristique $r - k \leqq d$ $(k \geqq 0)$, c'est que les quadriques du système qui passent par un point quelconque de S_r possèdent en commun un S_{k+1}.*

Supposons d'abord que la caractéristique de la Jacobienne soit:

$$r - k \leqq d\,, \quad (k \geqq 0)\,.$$

Cela signifie que parmi le $d + 1$ quadriques linéairement indépendantes qu'individualisent L_d il y a $r - k$ quadriques fonctionellement indépendantes.

Puisque L_{d_1} est un système irréductible de prémière espèce, il satisfait au théorème A. Donc les quadriques de L_{d_1}, qui passent par un point générique P de S_r ont en commun un S_{r-m_1+1}. Elles constituent le système L_{d_1-1}.

Considérons le système L_{d-1} de quadriques de L_d, qui passent par P. Les quadriques fonctionellement indépendantes de ce système, qui n'appartient pas à L_{d_1-1} sont $r - k - m_1$.

En effet soient:

$$\begin{aligned} &\mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_{d_1} f_{d_1} = 0\,, \\ &\xi_0 f_0 + \xi_1 f_1 + \ldots + \xi_{d_1} f_{d_1} + \xi_{d_1+1} f_{d_1+1} + \ldots + \xi_d f_d = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

les équations respectives de L_{d_1} et L_d.

Si nous imposons à tout les deux systèmes de passer par P, en éliminant μ_0 et ξ_0 on obtient.

$$\mu_1\left(f_1 + \frac{f_1(P)}{f_0(P)} f_0\right) + \mu_2\left(f_0 + \frac{f_2(P)}{f_0(P)} f_0\right) + \ldots + \mu_{d_1}\left(f_{d_1} + \frac{f_{d_1}(P)}{f_0(P)} f_0\right) = 0\,, \tag{6}$$

$$\xi_1\left(f_1 + \frac{f_1(P)}{f_0(P)} f_0\right) + \xi_2\left(f_0 + \frac{f_2(P)}{f_0(P)} f_0\right) + \ldots + \xi_{d_1}\left(f_{d_1} + \frac{f_{d_1}(P)}{f_0(P)} f_0\right) +$$

$$+ \xi_{d_1+1}\left(f_{d_1+1} + \frac{f_{d_1}(P)}{f_0(P)} f_0\right) + \ldots + \xi_d\left(f_d + \frac{f_d(P)}{f_0(P)} f_0\right) = 0 .$$

Le nombre de quadriques, fonctionellement indépendantes de L_d qui n'appartiennent pas à L_{d_1}, c'est la difference des caractéristiques; c'est à dire: $r - k - m_1$.

Ma (5) et (6) prouvent que ce nombre reste invarié en passant à L_{d-1} et L_{d_1-1} parce que les quadriques, qui individualisent L_{d_1-1}, se trouvent toutes dans L_{d-1}.

Les hyperplans polaires des $r - k - m_1$ quadriques fonctionellement indépendantes de L_{d-1}, qui n'appartiennent pas à L_{d_1-1}, passent tous par P. Ils coupent l'S_{r-m_1+1} selon un S_{k+1}, qui résulte au moins tangente à toutes les quadriques de L_{d-1}.

Ce résultat est donc indépendant de d_1 et de m_1.

En opérant de même manière sur L_{d_2/m_2}, L_{d_3/m_3} etc. jusqu'à L_{d_s/m_s} on obtiendra les espaces:

$$S_{r-m_2+1},\ S_{r-m_3+1}, \ldots, S_{r-m_s+1} ,$$

lesquels, entrecoupés par les hyperplans polaires des restantes quadriques fonctionellement indépendantes de L_{d-1}, donnent toujours le même S_{k+1}.

Pour cela toutes les quadriques de $L_{d_1-1}, L_{d_2-1}, \ldots, L_{d_s-1}$ ont en commun le precédent S_{k+1}, parce qu'il est conténu dans les:

$$S_{r-m_1+1},\ S_{r-m_2+1}, \ldots, S_{r-m_s+1} .$$

précédents.

Mais puisque $L_{d_1}, L_{d_2}, \ldots, L_{d_s}$ forment une chaine dans L_d et ce système ne possède pas d'autres quadriques fonctionellement indépendantes, il est toujour possible à cause du lemme 1, choisir dans $L_{d_1-1}, L_{d_2-1}, \ldots, L_{d_s-1}$, d quadriques linéairement indépendantes, qui individualisent L_{d-1}.

Mais ces d quadriques ont en commun S_{k+1}, il en résulte que toutes les quadriques de L_{d-1} possèdent en commun S_{k+1}, comme il fallait démontrer.

Viceversa si toutes les quadriques de L_d, qui passent par un point P, ont en commun un S_{k+1}, il est évident que le point P a pour conjugué le même S_{k+1} par rapport à toutes les quadriques, qui passent par P.

Une quadrique G de L_d, qui ne passe pas par P, ne contient pas S_{k+1}. L'hyperplan polaire de G par rapport à P ne contient pas S_{k+1}, autrement dît P appartiendrai à la quadrique.

Pour cela l'hyperplan coupera S_{k+1} selon S_k par rapport à toutes les quadriques de L_d. Cela signifie que la Jacobienne de L_d est à caractéristique $r - k$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Le théorème est valable aussi dans l'hypothèse que $L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, \dots$
$\dots, L_{d_s/m_s}$ $(m_i \leqq d_i,\ i = 1, 2, \dots, s)$ soient des systèmes analogues à L_d, qui satisfont au théorème B.

En effet L_d, par le théorème démontré juît de la même propriété des systèmes irréductibles de prémière espèce et pour cela rien change dans la démonstration précedente.

Il s'ensuit que le théorème existe aussi dans l'hypothèse que L_d possède une chaine de systèmes linéaires L_{d_i/m_i} $(m_i \leqq d_i,\ i = 1, 2, \dots, s)$ quelconques, à condition qu'il ne possède pas d'autres quadriques fonctionellement indépendantes.

Nous dirons *systèmes irréductibles de seconde espèce*, les systèmes linéaires de quadriques, qui satisfont aux hypothèses du théorème B avec les considérations de la Remarque précedente.

Il existe le:

Lemme 2. *Considérons un système* $L_{d/m}$ $(m \leqq d)$ *de* S_r, *qui possède seulement des systèmes subordonnés* $L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, \dots, L_{d_s/m_s}$ $(m_i \leqq d_i,\ \ i = 1, 2, \dots, s)$ *irréductibles (de prémière on de seconde espèce), qui ne s'entrecoupent pas et éventuellement* p $(p \geqq 0)$ *quadriques fonctionellement indépendantes.*

Il en résulte:

$$d = d_1 + d_2 + \dots + d_s + s + p - 1\,,$$

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_s + p\,.$$

En effet, L_d résulte le système-union des systèmes donnés et des p $(p \geqq 0)$ quadriques fonctionellement indépendantes, et pour cela sa dimension augmentée de l'unité sera égal à la somme des dimensions des systèmes subordonnés augmentés de l'unité, et du nombre de quadriques fonctionellement indépendantes.

On aura:

$$d + 1 = (d_1 + 1) + (d_2 + 1) + \dots + (d_s + 1) + p\,.$$

C'est a dire:

$$d = d_1 + d_2 + \dots + d_s + s + p - 1\,.$$

En outre les quadriques fonctionellement indépendantes parmi les $d + 1$ linéairement indépendantes, qui individualisent L_d, sont: m.

Les quadriques fonctionellement indépendantes de chacun système sont toujours diverses des quadriques des autres systèmes, car les systèmes n'ont pas des quadriques en commun. Il s'ensuit que le nombre des quadriques fonctionellement indépendantes de tous les systèmes subordonnés est donné par la somme des caractéristiques:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_s\,.$$

Ce nombre augmenté de p, c'est à dire du nombre des quadriques fonctionellement indépendantes externes aux systèmes, donnera le nombre total des quadriques fonctionellement indépendantes de L_d. Il en résulte:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_s + p\,,$$

comme il fallait prouver.

Il éxiste le:

Théorème C. *Condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire L_d de quadriques de S_r, qui possède les systèmes subordonnés irréductibles (de première ou de seconde espèce):*

$$L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, \dots, L_{d_s/m_s} \quad (m_i \leqq d_i,\ i = 1, 2, \dots, s)\,,$$

tels que les quadriques d'un système n'appartiennent pas aux autres, et eventuellement $p(p \geqq 0)$ quadriques fonctionellement indépendantes, soit à Jacobienne de caractéristique $r - k \leqq d$, c'est que les quadriques des systèmes subordonnés, qui passent par un point génerique de S_r constituent un L_{d-s-p}, et possèdent en commun un S_{k+s+p}.

Puisque les systèmes subordonnés satisfont l'hypothèse du lemme 2, il s'ensuit:

$$d = d_1 + d_2 + \dots + d_s + s + p - 1 \tag{7}$$

$$r - k = m_1 + m_2 + \dots + m_s + p\,. \tag{8}$$

Puisque les systèmes: $L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, \dots, L_{d_s/m_s}$ sont irréductibles de prémière ou de seconde espèce ils satisfont au théorème A, ou bien au théorème B.

Dans les deux cas par un point P de S_r il passe respectivement un:

$$L_{d_1-1}, L_{d_2-1}, \dots, L_{d_s-1}$$

de quadriques, qui ont en commun respectivement un:

$$S_{r-m_1+1}, S_{r-m_2+1}, \dots, S_{r-m_s+1}\,.$$

Ces espaces par (7) se coupent dans un:

$$S_{r-m_1-m_2-\dots-m_s+s} = S_{k+s+p}\,.$$

Mais puisque on peut choisir en chacun des systèmes, $d_1, d_2, \dots, d_s$ quadriques linéairement indépendantes, on trouve que les quadriques de ces systèmes, qui passent par P forment par (8) un système:

$$L_{d_1+d_2+\dots+d_s-1} = L_{d-s-p}\,,$$

dont les quadriques ont en commun S_{k+s+p}, comme il fallait demontrer.

La condition est donc nécessaire.

Elle est aussi suffisante.

En effet dans les hypothèse du théorème, supposons que par un point P de S_r

il passe un système L_{d-s-p}, individualisé par des quadriques, qui appartiennent à:

$$L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, \ldots, L_{d_s/m_s},$$

et qui possèdent en commun un S_{k+s+p}.

Notons x la caractéristique de L_d.

Pour le lemme 2 il s'ensuit:

$$d = d_1 + d_2 + \ldots + d_s + s + p - 1, \tag{9}$$

$$x = m_1 + m_2 + \ldots + m_s + p .$$

Puisque les systèmes subordonnés sont irréductibles par un point générique P de S_r il passe respectivement un:

$$L_{d_1-1}, L_{d_2-1}, \ldots, L_{d_s-1}$$

de quadriques, qui possèdent en commun respectivement un:

$$S_{r-m_1+1}, S_{r-m_2+1}, \ldots, S_{r-m_s+1} .$$

Ces espaces par (9) s'entrecoupent dans:

$$S_{r-m_1-m_2-\cdots-m_s+s} = S_{r-x+s+p} .$$

Mais de ces systèmes on peut extraire respectivement $d_1, d_2, \ldots, d_s$ quadriques linéairement indépendantes, qui individualisent le système:

$$L_{d_1+d_2+\cdots+d_s-1} = L_{d-s-p}$$

de quadriques, qui ont en commun $S_{r-x+s+p}$.

Les quadriques, qui individualisent L_{d-s-p} sont toutes quadriques linéairement indépendantes, qui appartiennent aux systèmes subordonnés et qui passent par P. Mais telles quadriques possèdent en commun par hypothèse S_{k+s+p}, qui devra coincider avec $S_{r-x+s+p}$.

Il s'ensuit $x = r - k$, comme il fallait démontrer.

Les systèmes $L_{d/m} (m \leqq d)$ irréducibles de prémière et seconde espèce ne sont pas les seuls à jouir des propriétés exprimées par les théorèmes A et B.

Il existe le:

Théorème D. *Condition nécessaire et suffisante pour que les quadriques d'un système linéaire L_d, qui passent par un point P de S_r, possèdent en commun un S_{k+1} c'est que ∞^k cordes de la variété base du système donné sortent de P, en constituant un S_{k+1}.*

Soit un système linéaire L_d tel que toutes les quadriques du système, qui passent par un point générique P, possèdent en commun un S_{k+1}. Les quadriques individualisent un système L_{d-1}. Une ultérieure quadrique de L_d, qui n'appartient pas à L_{d-1}, entrecoupe S_{k+1} selon une quadrique G_k de S_{k+1}, qui résulte commune à toutes les quadriques de système donné et par conséquent elle appartient à sa variété base V.

Une droite générique de S_{k+1}, qui passe par P entrecoupe G_k en deux points, qui appartiennent a V. Il s'ensuit qu'elle est une corde de V.

Puisque on peut répéter ce raisonnement pour toutes les droites de S_{k+1}, qui sortent de P, il s'ensuit que par P passent ∞^k cordes de V.

Viceversa si ∞^k cordes de V, variété base du système L_d, passent par un point générique P et constituent un S_{k+1}, une corde générique s, choisie entr'elles, aura deux points R et T sur V et pour cela sur toutes les quadriques de L_d.

Mais les quadriques qui passent par P, forment un système L_{d-1}, dans le quel chaque quadrique possède trois points P, R, S de la droite s. Donc toute la droite appartiendra à toutes ces quadriques.

Et puisque on peut répéter tel raisonnement pour les ∞^k cordes de V, il en résulte que les quadriques de L_{d-1} possèdent en commun un S_{k+1}.

Il s'ensuit que:

Si les quadriques de L_d, qui passent par P, ont en commun seulement S_{k+1}, en excluant pour cela qu'elles possèdent en commun un $S_h(h \geqq 1)$ tangente en P, la caractéristique de la Jacobienne de L_d est: $r - k$.

En effet notons Q le conjugué de P par rapport à R et T. Il résulte le conjugué de P par rapport à toutes les quadriques du système.

On peut dire la même chose pour chacune des ∞^k cordes et seulement pour elles. Donc P résulte le conjugué d'∞^k points qui constituent une variété à k dimensions.

Celle-ci ne peut pas être qu'un S_k.

En effet elle doit résulter l'intersection des hyperplans polaires de P par rapport à chaque quadrique du système.

Il s'ensuit que P à pour conjugué un S_k et que la caractéristique de la Jacobienne est: $r - k$.

Nous dirons: *système à variété base* ∞^k un système linéaire de quadrique, qui satisfait au théorème D.

Ce type de système renferme, tous les systèmes irréductibles de prémière et seconde espèce à cause des théorèmes A at B.

Mais il y a d'autres systèmes de ce type.

Considerons, par example, le système linéaire individualisée par les quadriques, qu'on déduit des équations:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3}$$

c'est à dire:

$$\mu_0(x_0x_2 - x_1^2) + \mu_1(x_0x_3 - x_1x_2) + \mu_2(x_1x_3 - x_2^2) = 0\,.$$

Puisque les trois quadriques sont fonctionellement indépendantes, le système résulte un $L_{2/3}$ de S_3, évidemment sans systèmes subordonnés essentiels, qui toutefois ne satisfait pas à la condition $r - k \leqq d$ du théorème A.

Mais sa variété base est la cubique de S_3, d'equations parametriques:

$$x_0 = 1\,, \quad x_1 = \lambda\,, \quad x_2 = \lambda^2\,, \quad x_3 = \lambda^3\,.$$

Ses cordes remplissent tout S_3.

Il s'ensuit que tel système est à variété base ∞^0 et que par un point générique de S_3 passent ∞^1 quadriques du système, qui possèdent en commun une droite.

Bibliographie

[1] *F. Palatini:* Sulle superficie algebriche *i* cui $S_h(h+1)$ secanti non riempiono lo spazio ambiente. Atti R. Acc. Torino *41*, (1906).

[2] *G. Bonferroni:* Sui sistemi lineari di quadriche la cui jacobiana ha dimensione irregolare. R. Acc. Scienze Torino vol. *50*, (1914—1915).

[3] *A. Terracini:* Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà. Atti. R. Acc. Sc. Torino. Nota II, *51*, (1916) III, *55*, (1919—1920).

[4] *L. Muracchini:* Sulle varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria. (parte II) Riv. Mat. Univ. di Parma, *3*, (1952), 75—89.

[5] *S. Xambo:* On projectives varieties of minimal degree. Collectanea Mathematica, Barcelona, vol. *XXXII*, (1981).

[6] *L. Degoli:* Un théorème sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indeterminée. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica Budapest. Tomo *17*, (1982), 325—330.

[7] *L. Degoli:* Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla. Collectanea Mathematica, Barcelona, vol. *XXXIII*, (1982).

[8] *L. Degoli:* Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle. Demonstratio Mathematica, Warszawa, Vol. *16*, (1983).

[9] *L. Degoli:* Alcuni teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla. Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation — Cluj-Napoca. Tome *26* (*49*), (1984), 33—43.

Adresse: Via Berengario no 82/C, 41012 Carpi (Modena), Italy.