Evgenii Viktorovich Voskresenskii

Покомпонентная асимптотика и гомеоморфизм дифференциальных уравнений на многообразиях

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 35 (1985), No. 3, 455–461,462–466

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102035`

Czechoslovak Mathematical Journal, 35 (110) 1985, Praha

ПОКОМПОНЕНТНАЯ АСИМПТОТИКА И ГОМЕОМОРФИЗМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

ЕВГЕНИЙ ВИКТОРОВИЧ ВОСКРЕСЕНСКИЙ, Саранск

(Поступило в редакцию 14/5 1984)

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнения

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)\,x + f(t, x)\,, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)\,y\,, \tag{2}$$

где

$$f\colon [T, +\infty) \times R^n \to R^n\,, \quad f \in C([T, +\infty) \times R^n)\,,$$

$A(t)$ – $(n \times n)$ непрерывная на множестве $[T, +\infty)$ матрица. Вопрос об асимптотической эквивалентности и гомеоморфизме уравнений (1) и (2) рассматривался в работах [1]–[6] и многих других. В настоящей статье эта проблема обсуждается при более общей постановке вопроса.

Пусть

$$\|f(t, x)\| \leqq \lambda(t, |x_{i_1}|, \ldots, |x_{i_q}|) \leqq \omega(t, \|x_q\|)\,. \tag{3}$$

Здесь $x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}$ – компоненты вектора x, $1 \leqq i_1 \leqq \ldots < i_q \leqq n$, $x_q = \operatorname{colon}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_q})$. Пусть $\lambda\colon [T, +\infty) \times R^q_+ \to R^1_+$, $R^1_+ = [0, +\infty)$, $\lambda \in C([T, +\infty) \times R^q_+)$, $\omega\colon [T, +\infty) \times R^1_+ \to R^1_+$, $\omega \in C([T, +\infty) \times R^1_+)$,

$$\lambda(t, r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_q) \leqq \lambda(t, \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_j, \ldots, \bar{r}_q)\,, \quad r_j \leqq \bar{r}_j \quad (j = \overline{1, q})$$

и любом $t \in [T, +\infty)$, $\omega(t, \alpha_1) \leqq \omega(t, \alpha_2)$ при $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ и лююбом $t \in [T, +\infty)$.

Фундаментальная матрица $Y(t) = (y_{ij}(t))$, $i, j = \overline{1, n}$ уравнения (2) будем считать нормированной в точке $t = t_0 \in [T, +\infty)$ и

$$Y^{-1}(t) = (y^{ji}(t))\,.$$

1. ОСНОВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Уравнения (1) и (2) называются покомпонентно асимптотически эквивалетными относительно функций $\mu_i(t)$ на многообразии $Q \in R^n$, если существует отображение $P: Q \to Q$ такое, что

$$x_i(t\colon t_0, x_0) = y_i(t\colon t_0, y_0) + O(\mu_i(t)) \quad \text{при} \quad t \to +\infty\,, \tag{4}$$

где $x(t\colon t_0, x_0) = \operatorname{colon}(x_1(t\colon t_0, x_0), \ldots, x_n(t\colon t_0, x_0))$ – решение уравнения (1), $x(t_0\colon t_0, x_0) = x_0$, $y(t\colon t_0, y_0) = \operatorname{colon}(y_1(t\colon t_0, y_0), \ldots, y_n(t\colon t_0, y_0))$ – решение уравнения (2), $y(t_0\colon t_0, y_0) = y_0$, $Px_0 = y_0$, $i = i_1, \ldots, i_q$. При этом эквивалентность называется *эквивалентностью*:

a) *по Немыцкому,* если P – гомеоморфизм;

в) *по Левинсону,* если P – отображение, устанавливающее взаимно однозначное соответствие;

c) *по Брауеру* в общем случае.

2. ОСНОВНЫЕ УСЛОВИЯ I

Рассмотрим множества

$$N = \{1, \ldots, n\}\,, \quad B \subseteq N\,, \quad N_0 \subseteq M \subseteq N\,, \quad M = N \setminus B\,. \tag{5}$$

Пусть функции $\mu_i\colon [t_0, +\infty) \to R^1_+$, $m_i\colon [t_0, +\infty) \to R^1_+$ удовлетворяют неравенствам

$$\mu_i(t) \geqq \max_{j \in N_0} |y_{ij}(t)|\,, \quad T \leqq t_0 \leqq t < +\infty\,, \quad i = i_1, \ldots, i_q\,, \tag{6}$$

$$m_i(t) \geqq \max_{j \in M} \{\max |y_{ij}(t)|, \mu_i(t)\}\,, \quad T \leqq t_0, \leqq t, < +\infty\,, \quad i = i_1, \ldots, i_q\,. \tag{7}$$

Будем считать, что для любого $C > 0$ и $0 < \delta < C - \sum_{k \in M} |\gamma_k|$, $C > \sum_{k \in M} |\gamma_k|$ существует $t_0 \in [T, +\infty)$ такое, что справедливы нижеследующие неравенства (8), (9), (10) и $\bigcup_{t_0, y_0} y(t\colon t_0, y_0) = \{y(t\colon t_0, y_0)\}$ есть совокупность всех решений уравнения (2), где $y_0 = \operatorname{colon}(y_{01}, \ldots, y_{0n})$,

$$y_{0i} = \begin{cases} \gamma_i\,, & i \in M \\ 0\,, & i \notin M\,. \end{cases}$$

$$\sum_{k \in M \cap N_0} \int_{t_0}^{+\infty} |y^{jk}(s)|\, \lambda(s, C\, m(s))\, \mathrm{d}s < \frac{\delta}{3n}\,, \tag{8}$$

$$\int_t^{+\infty} \Big| \sum_{k \in M | N_0} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s) \Big|\, \lambda(s, C\, m(s))\, \mathrm{d}s < \frac{\delta}{3n}\, \mu_i(t)\,, \tag{9}$$

$$\int_{t_0}^{t} \Big| \sum_{k \in \beta} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s) \Big|\, \lambda(s, C\, m(s))\, \mathrm{d}s < \frac{\delta}{3n}\, \mu_i(t)\,, \tag{10}$$

$$t_0 \leqq t < +\infty\,, \quad j \in N\,, \quad i = i_1, \ldots, i_q\,, \quad m(s) = (m_1(s), \ldots, m_{iq}(s))\,.$$

3. МНОГООБРАЗИЕ Q

В этой работе мы будем рассматривать конкретное многообразие $Q \subset R^n$, определяемое следующим образом:

$$Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \colon x_j = 0\,, \quad j \notin M\}\,. \tag{11}$$

Впредь мы будем рассматривать лишь решения $x(t\colon t_0, x_0)$ и $y(t\colon t_0, x_0)$, где $x_0, y_0 \in Q$.

4. ОТОБРАЖЕНИЕ P

Будем считать, что $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, ..., $i_q = q$. Пусть

$$\Omega = \{\varphi(t)\colon |\varphi_i(t)| \leqq C_1\, m_i(t),\ i = \overline{1, q},\ |\varphi_i(t)| \leqq C_2\, P_i(t)\,, \\ i = \overline{q+1, n},\ t \geqq t_0\} \tag{12}$$

— множество всех непрерывных на $[t_0, +\infty)$ вектор-функций $\varphi(t)$, $\dim \varphi(t) = n$, C_1, C_2 — произвольные положительные числа,

$$P_i(t) = C \sum_{j \in M} |y_{ij}(t)| + \int_{t_0}^{t} \Big|\sum_{\substack{j \in N \\ k \in B}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\Big|\, \lambda(s, C\, m(s))\, \mathrm{d}s + \\ + \int_{t}^{+\infty} \Big|\sum_{\substack{j \in N \\ k \in M}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\, \lambda(s, C\, m(s))\, \mathrm{d}s\,, \quad i = \overline{q+1, n}\,,$$

C — фиксированное положительное число.

Допустим

$$\|\varphi\|_\Omega = \max \begin{cases} \max\limits_{i} \sup\limits_{t \geqq t_0} \dfrac{|\varphi_i(t)|}{m_i(t)}\,, & i = \overline{1, q}\,, \\ \max\limits_{i} \sup\limits_{t \geqq t_0} \dfrac{|\varphi_i(t)|}{P_i(t)}\,, & i = \overline{q+1, n}\,. \end{cases} \tag{13}$$

Тогда, определив естественным образом операции линейного пространства на множестве Ω, мы получим банахово пространство.

Пусть $C_1 = C$, $C_2 = 1$. Тогда получим подмножество $S \subset \Omega$. Подберем число δ так, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < \delta < C - \sum_{k \in M} |\gamma_k|\,,$$

где γ_k — действительные числа и $\sum_{k \in M} |\gamma_k| < C$. На S определим оператор L следующим образом:

$$(L\varphi(t))_i = \sum_{k \in M} y_{ik}(t)\, \gamma_k + \int_{t_0}^{t} \sum_{j \in N} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\, f_j(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}s - \tag{14}$$

$$-\int_t^{+\infty}\sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}} y_{ik}(t)\, \dot{y}^{jk}(s)\, f_j(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}s\,, \quad i=\overline{1,n}\,.$$

Теорема 1. *Оператор* L, *определенный выражением* (14), *есть* $L: S \to S$.

Доказательство. При достаточно большом t_0 справедливы неравенства (8), (9), (10). Тогда из (10) получим

$$\left|\int_{t_0}^{t}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in B}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\, f_j(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}s\right| \leqq \tag{15}$$

$$\leqq \sum_{j\in N}\int_{t_0}^{t}\left|\sum_{k\in B} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\right| \lambda(s, C\, m(s))\, \mathrm{d}s < \frac{\delta}{3}\,\mu_i(t)\,.$$

Из (8) и (9) получим

$$\left|\int_{t}^{+\infty}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in M\cap N_0}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\, f_j(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}s\right| \leqq \tag{16}$$

$$\leqq \sum_{j\in N}\left|y_{ik}(t)\right| \int_{t}^{+\infty}\left|y^{jk}(s)\right| \lambda(s, C\, m(s)\, \mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq \mu_i(t) \sum_{\substack{j\in N\\ k\in M\cap N_0}} \int_{t}^{+\infty}\left|y^{jk}(s)\right| \lambda(s, C\, m(s))\, \mathrm{d}s \leqq \frac{\delta}{3}\,\mu_i(t)\,,$$

$$\left|\int_{t}^{+\infty}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in M|N_0}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\, f_j(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}s\right| \leqq \tag{17}$$

$$\leqq \sum_{j\in N}\int_{t}^{+\infty}\left|\sum_{k\in M|N_0} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\right| \lambda(s, C\, m(s))\, \mathrm{d}s \leqq \frac{\delta}{3}\,\mu_i(t)\,.$$

Тогда

$$\left|(L\varphi(t))_i\right| \leqq \Big(\sum_{j\in M}\left|\gamma_j\right|\Big) m_i(t) + \delta\, \mu_i(t) \leqq \Big(\sum_{j\in M}\left|\gamma_j\right| + \delta\Big)\, m_i(t) \leqq C\, m_i(t)\,.$$

Неравенство

$$\left|(L\varphi(t))_i\right| \leqq P_i(t)\,, \quad i = \overline{q+1, n}$$

очевидно. Теорема доказана.

Теорема 2. L *непрерывен на* S.

Доказательство. Пусть $\varphi_l \in S$ и при $l \to +\infty$ $\varphi_l \to \varphi$. Тогда $\varphi_l(t) \to \varphi(t)$ равномерно на каждом конечном сегменте на множестве $[t_0, +\infty)$. Рассмотрим сегмент $[t_0, T_1]$. При фиксированном $\varepsilon > 0$ и при $t \in [t_0, T_1]$, $t_1 \geqq T_1$ имеем

$$\left|(L\varphi_l(t))_i - (L\varphi(t))_i\right| \leqq$$

$$\leqq \int_{t_0}^{t}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in B}}\left|y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\right| \left|f_j(s, \varphi_l(s)) - f_j(s, \varphi(s))\right| \mathrm{d}s +$$

$$+\int_{t}^{t_1}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in M}}\left|y_{ik}(t)\,y^{jk}(s)\right|\left|f_j(s,\varphi_l(s))-f_j(s,\varphi(s))\right|\mathrm{d}s\,+$$

$$+\int_{t_1}^{+\infty}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in M}}\left|y_{ik}(t)\,y^{jk}(s)\right|\left|f_j(s,\varphi_l(s))-f_j(s,\varphi(s))\right|\mathrm{d}s\,.$$

Пусть $l_0>0$ и t_1 настолько большие числа, что при $l\geqq l_0$ выполняются неравенства

$$\left|f_j(s,\varphi_l(s))-f_j(s,\varphi(s))\right|\leqq\frac{\varepsilon}{3nk(T_1-t_0)},\quad t_0\leqq s\leqq T_1\,;$$

$$\left|f_j(s,\varphi_l(s))-f_j(s,\varphi(s))\right|\leqq\frac{\varepsilon}{3nk_1(t_1-t)},\quad t\leqq s\leqq t_1\,;$$

$$\int_{t_1}^{+\infty}\left|y^{jk}(s)\right|\lambda(s,C\,m(s))\,\mathrm{d}s\leqq\frac{\varepsilon}{6k_2n},\quad j\in N\,,\quad k\in M\,,$$

где

$$k=\sup_{\substack{t_0\leqq t_1\leqq t\leqq T_1\\ i,j\in N\\ k\in M}}\left|y_{ik}(t)\,y^{jk}(t_1)\right|,\qquad k_1=\sup_{\substack{t\leqq t_2\leqq t_3\leqq t_1\\ i,j\in N\\ k\in M}}\left|y_{ik}(t_2)\,y^{jk}(t_3)\right|,$$

$$K_2=\sup_{\substack{t_0\leqq t\leqq T_1\\ i\in N\\ k\in M}}\left|y_{ik}(t)\right|.$$

Тогда при $l\geqq l_0$, $t\in[t_0,T_1]$ имеем

$$\left|(L\varphi_l(t))_i-(L\varphi(t))_i\right|<\varepsilon\,,\quad i=\overline{1,n}\,.$$

Следовательно, оператор L непрерывен на S.

Теорема 3. *LS равностепенно непрерывно в каждой точке $t\in[t_0,+\infty)$.*

Доказательство. Так как

$$y'_{ij}(t)=\sum_{p\in N}a_{ip}(t)\,y_{pj}(t)\,,\qquad\sum_{k\in N}y_{ik}(t)\,y^{jk}(t)=\delta_{ij}\,,$$

где $A(t)=(a_{ip}(t))$, то

$$\left|(L\varphi(t))'_i\right|\leqq\sum_{p\in N}\left|a_{ip}(t)\right|\Big[\sum_{j\in M}\left|y_{pj}(t)\right|\left|\gamma_j\right|+$$

$$+\sum_{j\in N}\int_{t_0}^{t}\Big|\sum_{k\in B}y_{pk}(t)\,y^{jk}(s)\Big|\,\lambda(s,C\,m(s))\,\mathrm{d}s\,+$$

$$+\sum_{j\in N}\int_{t_0}^{+\infty}\Big|\sum_{k\in N}y_{pk}(t)\,y^{jk}(s)\Big|\,\lambda(s,C\,m(s))\,\mathrm{d}s\Big]+\lambda(t,C\,m(t))\,.$$

Отсюда следует, что $\left|(L\varphi(t))'_i\right|$ является ограниченной функцией на любом конечном сегменте, принадлежащем множеству $[t_0,+\infty)$. Следовательно, LS — равностепенно непрерывно в каждой точке множества $[t_0,+\infty)$.

Так как LS — равномерно ограничено, то на основании доказанных теорем выполняются для L все условия принципа Шаудера. Следовательно, L имеет в S неподвижную точку. Пусть $Lx(t) = x(t)$. Известно, что $x(t)$ является решением уравнения (1). Так как

$$\left|x_i(t) - \sum_{j\in M} y_{ij}(t)\,\gamma_j\right| \leqq \sum_{j\in N}\int_{t_0}^{t}\left|\sum_{k\in B} y_{ik}(t)\,y^{jk}(s)\right|\lambda(s, C\,m(s))\,\mathrm{d}s + \\ + \sum_{j\in N}\int_{t}^{+\infty}\left|\sum_{k\in N\setminus N_0} y_{ik}(t)\,y^{jk}(s)\right|\lambda(s, C\,m(s))\,\mathrm{d}s + \\ + \mu_i(t)\sum_{\substack{j\in N\\ k\in N\setminus N_0}}\int_{t}^{+\infty}\left|y^{jk}(s)\right|\lambda(s, C\,m(s))\,\mathrm{d}s\,, \quad i = \overline{1, q}\,,$$

то $\left|x_i(t) - \sum_{j\in M} y_{ij}(t)\,\gamma_j\right| = O(\mu_i(t))$ при $t \to +\infty$, $i = 1, q$. Компоненты оператора L можно записать так:

$$(19)\qquad (L\varphi(t))_i = \sum_{k\in M} y_{ik}(t)\left(\bar\gamma_k + \int_{t_0}^{+\infty}\sum_{j\in N} y^{jk}(s)\,f_j(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s\right) + \\ + \int_{t_0}^{t}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in B}} y_{ik}(t)\,y^{jk}(s)\,f_j(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t}^{+\infty}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in M}} y_{ik}(t)\,y^{jk}(s)\,f_j(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s\,,$$

где

$$(20)\qquad \bar\gamma_k = \gamma_k - \int_{t_0}^{+\infty}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in M}} y^{jk}(s)\,f_j(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

Обозначим $\bar\gamma_k = x_k(t_0)$, $\gamma_k = y_k(t_0)$. Тогда из (20) получим

$$(21)\qquad y_k(t_0) = x_k(t_0) + \int_{t_0}^{+\infty}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in M}} y^{jk}(s)\,f_j(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s\,,$$

где $x(t\colon t_0, x_0)$ – решение уравнения (1) и

$$x_{0i} = \begin{cases} x_k(t_0)\,, & i = k\,,\\ 0\,, \quad i \neq k\,, & k \in M\,.\end{cases}$$

Итак, (21) каждому решению $y(t\colon t_0, y_0)$ уравнения (2), где $y_0 \in Q$, ставит в соответствие решение $x(t\colon t_0, x_0)$ уравнения (1), то есть построено отображение $Py_0 = x_0$ такое, что при любом $y_0 \in Q$ существует вектор $x_0 \in Q$ и

$$(22)\qquad x_i(t\colon t_0, x_0) = y_i(t\colon t_0, y_0) + O(\mu_i(t))$$

при $t \to +\infty$, $i = i_1, \ldots, i_q$.

5. ОСНОВНЫЕ УСЛОВИЯ II

Рассмотрим скалярное уравнение

$$(23)\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \lambda_1(t, z)\,,$$

где

$$\lambda_1(t, z) = \sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}} |y^{jk}(s)|\, \omega(s, z\|m(s)\|)\,,$$

$$\omega(t, \|x_q\|) = \lambda(t, |x_{i1}|, \ldots, |x_{iq}|)\,.$$

Пусть выполняются следующие условия:

(24) a) $I(\alpha) = \int_{t_0}^{+\infty} \lambda_1(t, \alpha)\, \mathrm{d}t < +\infty$ при любом $\alpha \in [0, +\infty)$;

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{I(\alpha)} = +\infty\,.$

c) $q(t, \alpha) = \int_{t_0}^{t} \frac{\lambda_1(s, \alpha)}{I(\alpha)}\, \mathrm{d}s$ при всех $t \in [t_0, +\infty)$ является неубывающей функцией по переменной α.

6. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПО БРАУЕРУ

Теорема 4. *Если* $\lambda(t, |x_{i1}|, \ldots, |x_{iq}|) = \omega(t, \|x_q\|)$ *и выполняются основные условия* I, II, *то уравнения* (1) *и* (2) *покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функций* $\mu_i(t)$ $(i = i_1, \ldots, i_q)$ *на многообразии* Q.

Доказательство. Рассмотрим решение $x(t\colon t_0, x_0)$, $x_0 \in Q$. Первоначально докажем, что $|x_i(t\colon t_0, x_0)| \leqq D(r)\, m_i(t)$, $i = i_1, \ldots, i_q$, $D(r) > 0$, $\|x_0\| \leqq r$.

Справедливо неравенство

$$|x_i(t)| \leqq m_i(t) \sum_{j\in M} |\gamma_i| + \int_{t_0}^{t} \Big|\sum_{\substack{k\in B\\ j\in N}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\Big|\, |f_j(s, x(s))\, \mathrm{d}s +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Big|\sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\Big|\, |f_j(s, x(s))|\, \mathrm{d}s\,.$$

Пусть $x_i(t) = u_i(t)\, m_i(t)$. В этом случае будем иметь:

$$|u_i(t)| \leqq \sum_{j\in M} |\gamma_i| + \frac{1}{m_i(t)} \int_{t_0}^{t} \Big|\sum_{k\in B} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\Big|\, |f_j(s, x(s))|\, \mathrm{d}s +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}} |y^{jk}(s)|\, f_j(s, x(s))\, \mathrm{d}s\,.$$

Введем обозначение $\bar{C} = \sum_{j\in M} |\gamma_j|$. Отсюда получим

$$|u_i(t)| \leqq \bar{C} + \frac{1}{m_i(t)} \int_{t_0}^{t} \Big|\sum_{\substack{k\in B\\ j\in N}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\Big|\, \omega(s, \|x_q\|)\, \mathrm{d}s +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}} |y^{jk}(s)|\, \omega(s, \|x_q\|)\, \mathrm{d}s\,.$$

Пусть $u(t) = \operatorname{colon}(u_1(t), \dots, u_q(t))$. Тогда

$$\|u(t)\| \leqq \bar{C} + \left\|\operatorname{colon}\left(\frac{1}{m_i(t)} \int_{t_0}^{t} \Big| \sum_{\substack{k \in B \\ j \in N}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\, \omega(s, \|u(s)\|\, \|m(s)\|)\, \mathrm{d}S\right\| + $$

$$+ \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k \in M \\ j \in N}} |y^{jk}(s)|\, \omega(s, \|u(s)\|\, \|m(s)\|\, \mathrm{d}s\,.$$

Введем функцию

$$\psi(\|u(t)\|) = \begin{cases} \min\left(1, \dfrac{T_2}{\|u(t)\|}\right), & u(t) \neq 0\,, \\ 1\,, \quad u(t) = 0\,, \end{cases} \tag{25}$$

T_2 — произвольное фиксированное положительное число. Рассмотрим неравенство

(26)

$$\|u(t)\| \leqq \bar{C} + \left\|\operatorname{colon}\left(\frac{1}{m_i(t)} \int_{t_0}^{t} \Big| \sum_{\substack{k \in B \\ j \in N}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\, \omega(s, \psi(\|u(s)\|))\, \|u(s)\|\, \|m(s)\|)\, \mathrm{d}s + \right.$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k \in M \\ j \in N}} |y^{jk}(s)|\, \omega(s, \|u(s)\|\, \|m(s)\|)\, \mathrm{d}s\,.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное сколь угодно малое число. Тогда на основании основных условий при достаточно большом t второе слагаемое правой части неравенства (26) будет меньше ε.

$$\|u(t)\| \leqq \bar{C} + \varepsilon + \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k \in M \\ j \in N}} |y^{jk}(s)\, |\omega(s, \|u(s)\|\, \|m(s)\|)\, \mathrm{d}s\,, \quad t \geqq l(\varepsilon)\,. \tag{27}$$

Тогда на основании теоремы 2.2 из работы [3] и основных условий II будем иметь неравенство $\|u(t)\| \leqq D(r)$, $t_0 \leqq t < +\infty$, $\|x_0\| \leqq r$. Следовательно, $|x_i(t)| \leqq D(r)\, m_i(t)$. Отсюда вытекает, что отображение P, индуцируемое соответствием (21), отображает Q на Q. Следовательно, (1) и (2) покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауеру относительно функций $\mu_i(t)$ на многообразии Q.

7. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПО ЛЕВИНСОНУ

Теорема 5. *Пусть выполняются все условия теоремы* 4 *и существует непрерывная функция* $\lambda_1\colon [t_0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *такая, что*

(28) $|f_j(t, \varphi_1) - f_j(t, \varphi_2)| \leqq \lambda_1(t, \|\varphi_{1q}\|, \|\varphi_{2q}\|)\, |\varphi_{1_1} - \varphi_{2_1}|$ *при любых* $\varphi_1, \varphi_2 \in R^n$;

(29) $\quad \lambda_1(t, \alpha_1, \alpha_2) \leqq \lambda_1(t, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ *при любом* $t \geqq t_0$, *если* $\alpha_1 \leqq \bar{\alpha}_1$, $\alpha_2 \leqq \bar{\alpha}_2$;

лдя любого $y(t\colon t_0, y_0)$, $y_0 \in Q$, существует $\bar{t}_0 \geqq t_0$, при котом справедливы неравенства

$$(30) \qquad \frac{2c}{m_i(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \Big|\sum_{\substack{j\in N\\ k\in B}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\Big|\, \lambda_1(s, C\|m(s)\|, C\|m(s)\|)\, m_1(s)\,\mathrm{d}s + \right.$$

$$\left. + \int_{t}^{+\infty} \Big|\sum_{\substack{j\in N\\ k\in M}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\Big|\, \lambda_1(s, C\|m(s)\|, C\|m(s)\|)\, m_1(s)\,\mathrm{d}s\right] \leqq p < 1\,, \quad i = \overline{1, q}\,,$$

$$2c\left[\int_{t_0}^{t} \Big|\sum_{\substack{j\in N\\ k\in B}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\Big|\, \lambda_1(s, C\|m(s)\|, C\|m(s)\|)\, m_1(s)\,\mathrm{d}s + \right.$$

$$\left. + \int_{t}^{+\infty} \Big|\sum_{\substack{j\in N\\ k\in M}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\Big|\, \lambda_1(s, C\|m(s)\|, C\|m(s)\|)\,\mathrm{d}s\right] \leqq p < 1\,,$$

$$i = \overline{q + 1, n},\ C = \|y(\bar{t}_0\colon t_0, y_0)\|\,.$$

Тогда уравнения (1) *и* (2) *покомпонентно асимптотически эквивалентны по Левинсону относительно функций $\mu_i(t)$ на многообразии Q.*

Доказательство. Рассмотрим оператор L. Тогда $LS \subset S$ и

$$(31) \qquad \|L\varphi_1 - L\varphi_2\|_\Omega \leqq d\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\Omega\,, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in S\,, \quad 0 < d < 1\,.$$

Следовательно, L – оператор сжатия и поэтому он в S имеет единственную неподвижную точку. Отсюда следует, что оператор P отображает Q на Q взаимно однозначно. Теорема доказана.

8. ГОМЕОМОРФИЗМ РЕШЕНИЙ

Предварительно докажем лемму о гомеоморфизме двух подмножеств произвольного банахова пространства.

Лемма. *Пусть B – банахово пространство и $F\colon B \to B$ – оператор сжатия, U и V непустые подмножества B такие, что $(I - F)\, V \subset U$ (I – тождественный оператор). Если $H\colon U \to V$ удовлетворяет соотношению*

$$(32) \qquad Hy = y + FHy\,,$$

то H – гомеоморфизм U на V.

Доказательство. Так как F – оператор сжатия, то при фиксированном y Hy – единственное решение уравнения

$$Hy = y + FHy\,, \quad y \in U\,.$$

Пусть $y_1 \neq y_2$. Покажем, что $Hy_1 \neq Hy_2$. Если допустить противное, то

$$Hy_1 = y_1 + FHy_1\,, \quad Hy_2 = y_2 + FHy_2$$

и $y_1 - y_2 = 0$. Следовательно, $Hy_1 = Hy_2$. Пусть x – фиксированный элемент. Рассмотрим уравнение

$$x = y + Fx.$$

В этом случае $y = x - Fx$, то есть уравнение имеет единственное решение. Следовательно, существует H^{-1}. Докажем непрерывность H и H^{-1}. Пусть $y_n \to y_0$ при $n \to +\infty$. Тогда

$$Hy_n - Hy_0 = y_n - y_0 + FHy_n - FHy_0$$

и

$$\|Hy_n - Hy_0\| \leqq \|y_n - y_0\| + q\|Hy_n - Hy_0\|, \quad 0 < q < 1,$$

отсюда

$$\|Hy_n - Hy_0\| \leqq \frac{1}{1-q}\|y_n - y_0\|,$$

то есть $Hy_n \to Hy_0$ при $y_n \to y_0$.

Докажем непрерывность H^{-1}. Легко заметить, что $H^{-1}y$ удовлетворяет соотношению

$$y = H^{-1}y + Fy, \quad y \in V.$$

Тогда, если $y_n \to y_0$ при $n \to +\infty$, то

$$\|H^{-1}y_n - H^{-1}y_0\| \leqq \|y_n - y_0\| + q\|y_n - y_0\|,$$

то есть $H^{-1}y_n \to H^{-1}y_0$. Лемма доказана.

Пусть в (12) C – произвольное положительное число. Тогда получим новое банахово пространство $\Omega_1 \supset \Omega$.

Частный случай этой леммы рассмотрен в работе [5].

Теорема 6. *Если выполняются условия теоремы* 5, *то множества* $\{y(t\colon t_0, y_0), y_0 \in Q\}$, $\{x(t\colon t_0, x_0), x_0 \in Q\}$ *решений уравнений* (1) *и* (2) *гомеоморфны в топологии банахова пространства* Ω_1.

Доказательство. Рассмотрим для каждого фиксированного решения $y(t\colon t_0, y_0)$, $y_0 \in Q$ оператор

$$L_y\, x(t) = y(t) + F\, x(t), \quad x \in \Omega_1. \tag{33}$$

Здесь оператор F является оператором сжатия. Пусть $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ – пространства решений уравнений (1) и (2). Определим оператор $H\colon \mathscr{L}_2 \to \mathscr{L}_1$ следующим образом: для каждого $y \in \mathscr{L}_2$ Hy будет неподвижной точкой оператора сжатия L_y. Тогда

$$Hy(t) = L_y H\, y(t).$$

Если допустим $U = \mathscr{L}_2$, $V = \mathscr{L}_1$, то на основании леммы H есть гомеоморфизм $\mathscr{L}_2$ на $\mathscr{L}_1$.

Теорема 7. *При условиях теоремы* 5 *существует замена переменной*

$$(34) \qquad x(t) = y(t) + F(t, x(t)),$$

которая переводит уравнение (1) *в уравнение* (2) *на многообразии и*

$$x(t) = \operatorname{colon}(x_1(t\colon t_0, x_0), \ldots, x_n(t\colon t_0, x_0)),$$

$$y(t) = \operatorname{colon}(y_1(t\colon t_0, x_0), \ldots, y_n(t\colon t_0, y_0)),$$

$$x_0 \in Q, \quad Px_0 = y_0,$$

$$F(t, x(t)) = \operatorname{colon}\Bigg(\int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{j\in N\\ k\in B}} y_{1k}(t)\, y^{jk}(s) f_j(s, x(s))\, ds -$$

$$- \int_{t}^{+\infty} \sum_{\substack{j\in N\\ k\in M}} y_{1k}(t)\, y^{jk}(s)\, f_j(s, x(s))\, ds, \ldots, \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{j\in N\\ k\in B}} y_{nk}(t)\, y^{jk}(s) f_j(s, x(s))\, ds -$$

$$- \int_{t}^{+\infty} \sum_{\substack{j\in N\\ k\in M}} y_{nk}(t)\, y^{jk}(s) f_j(s, x(s))\, ds\Bigg).$$

Доказательство выполняется непосредственным дифференцированием (34).

Определение 4. Дифференциальные уравнения (1) и (2) называются *гомеоморфными*, если существуют преобразования

$$(35) \qquad x(t) = \Phi(t, y(t)), \quad y(t) = \Phi^{-1}(t, x(t)),$$

переводящие решения одного уравнения в решения другого и при каждом фиксированном $t = t_0$ осуществляющие гомеоморфное отображение пространства R^n на себя.

Теорема 8. *Пусть выполняются условия теоремы* 5 *и*

$$(36) \qquad \int_{t_0}^{+\infty} |y^{jk}(s)|\, m_1(s)\, \lambda_1(s, C\, \|m(s)\|, C\, \|m(s)\|)\, ds < +\infty, \quad j \in N, \quad k \in M,$$

$$(37) \qquad \int_{t_0}^{+\infty} |y^{jl}(s)|\, \bar{\mu}_1(s)\, \lambda_1(s, C\, \|m(s)\|, C\, \|m(s)\|)\, ds < +\infty, \quad j, l \in N, \quad k \in M,$$

где $\bar{\mu}_1(s) \geqq \max\limits_{j\in N} \{|y_{1j}(s)|\}$, $\forall C \in R^1_+$.

Тогда уравнения (1) *и* (2) *на* Q *асимптотически эквивалентны по Немыцкому относительно функций* $\mu_i(t)$ $(i = \overline{1, q})$ *и гомеоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим замену переменной (34). Так как выполняются условия теоремы 5, то она задает преобразования (35). Пусть $t = t_0$. Тогда получим отображение (21). Покажем, что оно непрерывно при заданных условиях. Из (21) вытекают неравенства:

$$(38) \qquad |y_k(t_0) - \bar{y}_k(t_0)| \leqq |x_k(t_0) - \bar{x}_k(t_0)| +$$
$$+ D \int_{t_0}^{+\infty} \sum_{\substack{j \in N \\ k \in M}} |y^{jk}(s)|\, \lambda_1(s, C\, \|m(s)\|, C\, \|m(s)\|)\, |x_1(s) - \bar{x}_1(s)|\, \mathrm{d}s\,, \quad k \in M\,, \quad D > 0\,;$$
$$(39) \qquad |x_1(t) - \bar{x}_1(t)| \leqq \sum_{j \in M} y_{1j}(t)\, |\gamma_j - \bar{\gamma}_j| +$$
$$+ D_1 \int_{t_0}^{t} \sum_{l, j \in N} |y_{kl}(t)|\, |y^{jl}(s)|\, \lambda_1(s, C\, \|m(s)\|, C\, \|m(s)\|)\, |x_1(s) - \bar{x}_1(s)|\, \mathrm{d}s\,;$$
$$(40) \qquad \frac{|x_1(t) - \bar{x}_1(t)|}{\bar{\mu}_1(t)} \leqq D_1 \sum_{j \in M} |\gamma_j - \bar{\gamma}_j| +$$
$$+ D_2 \int_{t_0}^{t} \sum_{l, j \in N} |y^{jl}(s)|\, \lambda_1(s, C\, \|m(s)\|, C\, \|m(s)\|)\, \bar{\mu}_1(s)\, \frac{|x_1(s) - \bar{x}_1(s)|}{\bar{\mu}_1(s)}\, \mathrm{d}s\,.$$
$$D_1, D_2 > 0\,.$$

Тогда из (40) получим:

$$(41) \qquad |x_k(t) - \bar{x}_k(t)| \leqq D_3 \|x_q(t_0) - \bar{x}_q(t_0)\|\,, \quad D_3 > 0\,.$$

Из (38) и (41) вытекает неравенство

$$(42) \qquad |y_k(t_0) - \bar{y}_k(t_0)| \leqq \|x_q(t_0) - \bar{x}_q(t_0)\|\,.$$
$$.\left(1 + D_4 \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{j \in N \\ k \in M}} |y^{jk}(s)|\, \bar{\mu}_1(s)\, \lambda_1(s, C\, \|m(s)\|, C\, \|m(s)\|)\, \mathrm{d}s\right), \qquad D_4 > 0\,.$$

Из (42) вытекает непрерывность отображения (21). Следовательно, уравнения (1) и (2) покоординатно асимптотически эквивалентны по Немыцкому относительно функций $\mu_i(t)$ на многообразии Q и гомеоморфны на этом многообразии.

Литература

[1] *Brayer F.:* Asymptotic equivalence and asymptotic behaviour of linear systems. — Michigan Math. J., 1962, *9*, p. 33—43.

[2] *Haščák A., Švec M.:* Integral equivalence of two systems of differential equations. — Czech. Math. J., 1982, *32* (*107*), 3, p. 423—436.

[3] *Воскресенский Е. В.:* Асимптотическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений с линейным автономным первым приближением. — Comment. Math. Univ. Carolinae, *24*, 1 (1983), p. 31—50.

[4] *Тихонова Э. А.:* Аналогия и гомеоморфизм возмущенной и невозмущенной систем с блочно-треугольной матрицей. — Дифференц. уравнения, 6, Но 7, 1970, с. 1221 — 1229.

[5] *Boudourides M., Georgiou D.:* Asymptotic equivalence of differential equations with Stepanoff — bounded functional perturbations. — Czech. Math. J., 1982, *32* (107), 4, p. 633—639.

[6] *Kitamura Y.:* Remarks on the asymptotic relationships beetwen solutions of two systems of ordinary differential equations. — Hiroshima Math. J., 1976, *6*, p. 403—420.

Адрес автора: СССР, 430000, Саранск, улица Большевистская, 68, (Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва).