Peter Volkmann

Équations différentielles ordinaires dans les espaces des fonctions bornées

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 35 (1985), No. 2, 201–211

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102011

Czechoslovak Mathematical Journal, 35 (110) 1985, Praha

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DANS LES ESPACES DES FONCTIONS BORNÉES

PETER VOLKMANN, Karlsruhe

(Reçu le 12 mai 1983)

1. INTRODUCTION

Considérons l'espace de Banach

$$l_\infty(A) = \{x \mid x = (x_\mu)_{\mu \in A},\ x_\mu \text{ réels},\ \|x\| = \sup_{\mu \in A} |x_\mu| < \infty\},$$

l'ensemble d'indices A étant arbitraire. A l'aide du cône

$$l_\infty^+(A) = \{x \mid x \in l_\infty(A),\ x_\mu \geqq 0\ (\mu \in A)\}$$

nous introduisons une relation d'ordre sur $l_\infty(A)$, c.-à-d.

$$x \leqq y \Leftrightarrow y - x \in l_\infty^+(A) \qquad (x, y \in l_\infty(A)).$$

Avec ces no ations nous avons le théorème suivant.

Théorème 1. *Soient $T > 0$, $a \in l_\infty(A)$ et $V \subseteq l_\infty(A)$ un voisinage de a. Soit en outre $f: [0, T] \times V \to l_\infty(A)$ une fonction continue telle que*

(1) $$f(t, x) \leqq f(t, y) \qquad (0 \leqq t \leqq T;\ x, y \in V;\ x \leqq y).$$

Alors le problème de Cauchy

(*) $$u(0) = a\,, \quad u' = f(t, u)$$

possède une solution $u: [0, T_1] \to l_\infty(A)$ (où $0 < T_1 \leqq T$).

Ce théorème devient faux si l'on omet l'hypothèse de monotonie (1) (voir A. Cellina [1] pour un contre-exemple). Le théorème 1 sera démontré ici à partir d'un résultat plus abstrait, qui contient également un théorème analogue pour les équations intégrales de Volterra et qui peut être considéré comme une conséquence simple d'un théorème de point fixe de Birkhoff ([18], p. 125). Ensuite nous comparerons le théorème 1 avec des théorèmes d'existence connus (voir les livres de K. Deimling [2], V. Lakshmikantham et S. Leela [7], R. H. Martin [10] ainsi que les articles [14], [15] de l'auteur).

Si $M \geqq 0$, soit

$$L_M = \{u \mid u\colon [0, T] \to l_\infty(A),\ \|u(s) - u(t)\| \leqq M|s - t|\ (s, t \in [0, T])\}\,.$$

En définissant $u_1 \leqq u_2$ $(u_1, u_2 \in L_M)$ par les inégalités

$$u_1(t) \leqq u_2(t) \qquad (0 \leqq t \leqq T)\,,$$

on obtient une relation d'ordre sur L_M.

Théorème 2. *Soient $M \geqq 0$ et $\Phi\colon L_M \to L_M$ une fonction croissante, c.-à-d.*

$$u_1 \leqq u_2 \Rightarrow \Phi u_1 \leqq \Phi u_2 \qquad (u_1, u_2 \in L_M)\,.$$

Supposons que $v, w \in L_M$ satisfassent aux conditions

(2) $$v \leqq w\,, \quad v \leqq \Phi v\,, \quad w \geqq \Phi w\,.$$

Alors il existe $u \in L_M$ tel que

(3) $$v \leqq u \leqq w\,, \quad u = \Phi u\,.$$

Démonstration. D'après les hypothèses, l'ensemble

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \in L_M,\ v \leqq \omega,\ \omega \geqq \Phi\omega\}$$

n'est pas vide. On voit facilement que

(4) $$\Phi(\Omega) \subseteq \Omega\,.$$

Toute fonction $\omega\colon [0, T] \to l_\infty(A)$ de Ω est de la forme $\omega(t) = (\omega_\mu(t))_{\mu\in A}$, où les

$$\omega_\mu\colon [0, T] \to \mathbb{R}$$

satisfont à la condition de Lipschitz

$$|\omega_\mu(s) - \omega_\mu(t)| \leqq M|s - t| \quad (s, t \in [0, T])\,.$$

A cause de cela (et en tenant compte du fait $\omega \geqq v$) les quantités

$$u_\mu(t) = \inf_{\omega\in\Omega} \omega_\mu(t) \quad (\mu \in A,\ 0 \leqq t \leqq T)$$

existent. En posant

$$u(t) = (u_\mu(t))_{\mu\in A} \quad (0 \leqq t \leqq T)\,,$$

on obtient donc une fonction $u\colon [0, T] \to l_\infty(A)$ telle que

(5) $$u \in L_M\,, \quad v \leqq u \leqq w\,.$$

De

(6) $$u \leqq \omega \quad (\omega \in \Omega)$$

il résulte

$$\Phi u \leqq \Phi\omega \leqq \omega \quad (\omega \in \Omega)\,,$$

d'où

$$(\Phi u)_\mu(t) \leqq \omega_\mu(t) \quad (\omega \in \Omega,\ \mu \in A,\ 0 \leqq t \leqq T),$$

donc

$$(\Phi u)_\mu(t) \leqq u_\mu(t) \quad (\mu \in A,\ 0 \leqq t \leqq T),$$

c.-à-d.

(7) $$\Phi u \leqq u .$$

En tenant compte de (5), on voit donc que $u \in \Omega$. D'après (4) on a aussi $\Phi u \in \Omega$, d'où (en vertu de (6))

$$u \leqq \Phi u .$$

Cette inégalité et les formules (5), (7) montrent que u satisfait aux conditions (3).

3. ÉQUATIONS INTÉGRALES DE VOLTERRA

Si $\mu \in A$, soit

$$K_\mu : [0, T] \times [0, T] \times l_\infty(A) \to \mathbb{R}$$

une fonction continue telle que

$$|K_\mu(t, s, x)| \leqq M < \infty \quad (s, t \in [0, T];\ x \in l_\infty(A))$$

(M indépendant de μ) et

$$K_\mu(t, s, x) \leqq K_\mu(t, s, y) \quad (s, t \in [0, T];\ x, y \in l_\infty(A);\ x \leqq y).$$

Soit $a = (a_\mu)_{\mu \in A} \in l_\infty(A)$, et posons

$$(\Phi u)_\mu(t) = a_\mu + \int_0^t K_\mu(t, s, u(s))\, \mathrm{d}s \quad (u \in L_M,\ 0 \leqq t \leqq T),$$

$$(\Phi u)(t) = ((\Phi u)_\mu(t))_{\mu \in A} \quad (u \in L_M,\ 0 \leqq t \leqq T).$$

On obtient une fonction croissante $\Phi : L_M \to L_M$, et le théorème 2 fournit donc un théorème d'existence pour les équations intégrales de Volterra. Le cas particulier

$$K_\mu(t, s, x) = f_\mu(s, x) \quad (\mu \in A;\ s, t \in [0, T];\ x \in l_\infty(A))$$

correspond au problème de Cauchy $(*)$.

4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Pour $y, z \in l_\infty(A)$, $y \leqq z$, soit

$$[y, z] = \{x \mid x \in l_\infty(A),\ y \leqq x \leqq z\}.$$

De plus, soit $p = (p_\mu)_{\mu \in A} \in l_\infty(A)$ défini par

$$p_\mu = 1 \quad (\mu \in A).$$

Alors la boule fermée

$$S(x;\varrho) = \{y \mid y \in l_\infty(A),\ \|y - x\| \leqq \varrho\}$$

de centre $x \in l_\infty(A)$ et de rayon $\varrho > 0$ n'est autre que

$$S(x;\varrho) = [x - \varrho p,\ x + \varrho p]\,.$$

Or, pour démontrer le théorème 1, on peut supposer que

$$\|f(t, x)\| \leqq M < \infty \quad (0 \leqq t \leqq T,\ x \in V)\,. \tag{8}$$

(Dans le cas contraire il suffit de remplacer V par un voisinage plus petit.) De plus, on peur choisir V de la forme

$$V = [b, c]\,,$$

où $b = a - \varrho p$, $c = a + \varrho p$, $\varrho > 0$ (donc $b \leqq c$). La fonction $P\colon l_\infty(A) \to [b, c]$ définie par

$$(Px)_\mu = \begin{cases} b_\mu & (x_\mu \leqq b_\mu) \\ x_\mu & (b_\mu \leqq x_\mu \leqq c_\mu) \\ c_\mu & (c_\mu \leqq x_\mu) \end{cases} \quad (x \in l_\infty(A),\ \mu \in A)$$

est une projection continue et croissante. A cause de cela, en utilisant la formule

$$f(t, x) = f(t, Px) \quad (0 \leqq t \leqq T,\ x \in l_\infty(A))\,,$$

la fonction $f\colon [0, T] \times [b, c] \to l_\infty(A)$ peut être prolongée en une fonction continue

$$f\colon [0, T] \times l_\infty(A) \to l_\infty(A)\,,$$

et cette nouvelle fonction satisfait aussi aux conditions (1), (8) (avec V remplacé par $l_\infty(A)$). Le procédé que nous venons de décrire permet de se limiter dans ce qui suit aux fonctions f bornées, définies partout dans $[0, T] \times l_\infty(A)$.

Maintenant les formules

$$(\Phi u)_\mu(t) = a_\mu + \int_0^t f_\mu(s, u(s))\,\mathrm{d}s \quad (u \in L_M,\ \mu \in A,\ 0 \leqq t \leqq T)$$

définissent une fonction croissante $\Phi\colon L_M \to L_M$. En observant que les fonctions

$$v(t) = a - Mtp\,, \quad w(t) = a + Mtp \quad (0 \leqq t \leqq T)$$

appartiennent à L_M et satisfont aux conditions (2), le théorème 1 devient une conséquence immédiate du théorème 2.

Le théorème suivant est une variante du théorème 1.

Théorème 3. *Soient $T > 0$, λ réel, $a \in l_\infty(A)$ et $f\colon [0, T] \times l_\infty(A) \to l_\infty(A)$ une fonction continue, bornée, telle que*

$$f(t, y) - f(t, x) \geqq -\lambda(y - x) \quad (0 \leqq t \leqq T;\ x, y \in l_\infty(A);\ x \leqq y)\,. \tag{9}$$

Alors le problème de Cauchy $(*)$ possède une solution $u\colon [0, T] \to l_\infty(A)$.

Démonstration. En posant

$$g(t, x) = e^{\lambda t} f(t, e^{-\lambda t} x) + \lambda x \quad (0 \leqq t \leqq T,\ x \in l_\infty(A)),$$

on obtient une fonction $g: [0, T] \times l_\infty(A) \to l_\infty(A)$ continue, localement bornée, telle que

$$g(t, x) \leqq g(t, y) \quad (0 \leqq t \leqq T;\ x, y \in l_\infty(A);\ x \leqq y).$$

D'après le théorème 1 il existe une solution $v: [0, T] \to l_\infty(A)$ du problème de Cauchy

$$v(0) = a, \quad v' = g(t, v).$$

Alors la fonction $u(t) = e^{-\lambda t} v(t)$ $(0 \leqq t \leqq T)$ est une solution du problème $(*)$.

5. L'EXEMPLE DE DIEUDONNÉ

Dans ce paragraphe nous nous bornons au cas $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Nous écrivons brièvement

$$l_\infty = l_\infty(\mathbb{N}) = \{x \mid x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ suite bornée}\},$$

et nous introduisons le sous-espace fermé

$$c_0 = \{x \mid x \in l_\infty,\ \lim_{n \to \infty} x_n = 0\}$$

de l_∞. La fonction

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 2 & (\xi \geqq 4) \\ \sqrt{\xi} & (0 \leqq \xi \leqq 4) \\ 0 & (\xi \leqq 0) \end{cases} \quad (\xi \in \mathbb{R}) \tag{10}$$

est bornée, croissante et uniformément continue. Les formules

$$f_n(x) = \frac{1}{n} + \varphi(x_n) \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in l_\infty),$$

$$f(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \quad (x \in l_\infty)$$

définissent donc une fonction

$$f: l_\infty \to l_\infty$$

bornée, croissante et uniformément continue. On voit facilement que

$$f(c_0) \subseteq c_0. \tag{11}$$

Il est clair que le problème de Cauchy

$$u(0) = 0, \quad u' = f(u) \tag{12}$$

possède une solution (unique) $u: [0, T] \to l_\infty$, mais selon J. Dieudonné [3]

$$u(t) \notin c_0 \quad (0 < t \leqq T). \tag{13}$$

De là on obtient les deux observations suivantes.

1ère observation. Le théorème de M. Nagumo [11] sur l'existence des solutions d'une équation différentielle ordinaire dans un ensemble fermé ne peut pas être étendu au cadre des théorèmes 1,3. (Nagumo considère les équations différentielles dans l'espace $E = \mathbb{R}^n$; le cas d'un espace de Banach E arbitraire avait été traité notamment par R. H. Martin [8], [9], et par l'auteur [13]; voir aussi les livres cités plus haut). En effet, en vertu de (11) la fonction f considérée ici satisfait évidemment à la condition de Nagumo

$$\varliminf_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \operatorname{dist}(x + h f(x), c_0) = 0 \quad (x \in c_0)$$

(où $\operatorname{dist}(y, c_0) = \inf_{z \in c_0} \|y - z\|$ $(y \in l_\infty)$), mais le problème de Cauchy (12) *n*'admet aucune solution $u\colon [0, T] \to c_0$.

2e observation. Il existe une suite $(u^k)_{k \in N}$ de solutions approximatives du problème (12) *n*'ayant aucune sous-suite uniformément convergente. En effet, en vertu de (11) il existe une suite

$$u^k\colon [0, T] \to c_0 \tag{14}$$

de fonctions continues telles que

$$\max_{0 \leqq t \leqq T} \left\| u^k(t) - \int_0^t f(u^k(s))\, \mathrm{d}s \right\| \leqq \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Pour une sous-suite $(u^{k_m})_{m \in N}$ uniformément convergente sur $[0, T]$ on aurait

$$u^{k_m}(t) \to u(t) \quad (m \to \infty,\ 0 \leqq t \leqq T)$$

(où $u\colon [0, T] \to l_\infty$ représente la solution de (12)), ce qui contredit les formules (13), (14).

6. UNE MODIFICATION DE L'EXEMPLE DE DIEUDONNÉ

Soit

$$f\colon [0, T] \times l_\infty(A) \to l_\infty(A)$$

une fonction bornée, satisfaisant aux hypothèses du théorème 1. Soit $v^0\colon [0, T] \to$ $\to l_\infty(A)$ une sous-fonction du problème $(*)$, c.-à-d.

$$v^0(0) \leqq a\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v^0(t) \leqq f(t, v^0(t)) \quad (0 \leqq t \leqq T)\,,$$

et posons

$$v^n(t) = a + \int_0^t f(s, v^{n-1}(s))\, \mathrm{d}s \quad (n \in \mathbb{N},\ 0 \leqq t \leqq T)\,. \tag{15}$$

Supposons de plus qu'il existe une constante κ tel que

(16) $$\alpha(f([0, T] \times B)) \leqq \kappa\, \alpha(B) \quad (B \subseteq l_\infty(A),\ B \text{ borné}),$$

où α désigne la mesure de non-compacité de C. Kuratowski [6]. Dans ces conditions la suite des fonctions (15) converge vers une solution u: $[0, T] \to l_\infty(A)$ du problème (*),

$$v^n(t) \to u(t) \quad (n \to \infty,\ 0 \leqq t \leqq T),$$

la convergence étant uniforme sur $[0, T]$ (voir S. W. Du et V. Lakshmikantham [4], où l'on trouve aussi un théorème analogue pour les fonctions f satisfaisant à la condition (9) dans les espaces de Banach ordonnés par un cône normal).

Donnons un exemple d'une fonction f (bornée et satisfaisant aux hypothèses du théorème 1) *n*'ayant pas la propriété (16), et d'une suite de la forme (15) ne convergeant pas uniformément vers une solution du problème (*) (v^0 sera une sous-fonction de ce problème): Soient $T = 2$, $A = [0, 1]$,

$$a = (\mu)_{\mu \in [0,1]} \in l_\infty([0, 1]),$$

et soit f: $l_\infty([0, 1]) \to l_\infty([0, 1])$ définie par

$$f_\mu(x) = \varphi(x_\mu) \quad (\mu \in [0, 1],\ x \in l_\infty([0, 1])),$$

où φ signifie la fonction (10). Le problème de Cauchy correspondant à ces données a la forme

(17) $$u_\mu(0) = \mu, \quad u'_\mu(t) = \varphi(u_\mu(t)) \quad (0 \leqq \mu \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 2),$$

d'où immédiatement

(18) $$u_\mu(t) = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{\mu}\right)^2 \quad (0 < \mu \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 2).$$

La fonction $v^0(t) \equiv 0$ est une sous-fonction du problème (17), et la formule (15) devient

$$v^n_\mu(t) = \mu + \int_0^t \varphi(v^{n-1}_\mu(s))\, \mathrm{d}s \quad (n \in \mathbb{N},\ 0 \leqq \mu \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 2).$$

Les fonctions

$$(\mu, t) \to \mu, \quad (\mu, t) \to v^0_\mu(t) = 0 \quad ((\mu, t) \in [0, 1] \times [0, 2])$$

étant continues, il en résulte que toutes les fonctions

(19) $$(\mu, t) \to v^n_\mu(t) \quad ((\mu, t) \in [0, 1] \times [0, 2])$$

($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont continues. Supposons maintenant que la suite $(v^n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 2]$ vers une solution u: $[0, 2] \to l_\infty([0, 1])$ du problème (17). Alors, grâce à la continuité des fonctions (19), la fonction

$$(\mu, t) \to u_\mu(t) \quad ((\mu, t) \in [0, 1] \times [0, 2])$$

est continue, d'où, en vertu de (18),

$$u_0(t) = \frac{t^2}{4} \quad (0 \leqq t \leqq 2). \tag{20}$$

D'autre part,

$$v_0^n(t) = 0 \quad (n \in \mathbb{N},\ 0 \leqq t \leqq 2),$$

donc $u_0(t) \equiv 0$, ce qui contredit (20).

Remarque. Si l'on considère le problème de Cauchy (17) dans le cas, où le paramètre μ varie sur $[-1, 1]$, on obtient des solutions $u\colon [0, 2] \to l_\infty([-1, 1])$, mais pour $0 < t \leqq 2$, les fonctions $u(t)\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ne sont pas continues. De cette observation simple il découle que notre théorème 1 devient faux, si l'on remplace l'espace $l_\infty(A)$ par l'espace $C[-1, 1]$ des fonctions continues $x\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$. (Remarquons que l'intérieur du cône des éléments positifs de $C[-1, 1]$ n'est pas vide, ce qui est contraire à la situation de l'espace c_0)

7. ENCORE UN THÉORÈME D'EXISTENCE

Le théorème suivant est inspiré par B. A. Šuvar et M. I. Kopač [12]. Il serait facile de le généraliser au cas des équations intégrales de Volterra, mais nous resterons ici dans le cadre des équations différentielles. Le théorème peut être considéré comme une conséquence d'un théorème de point fixe de Knaster et Tarski ([5], p. 14).

Théorème 4. *Soient* $b, c \in l_\infty(A)$, $b \leqq c$, $T > 0$,

$$D = \{(y, z) \mid y, z \in l_\infty(A);\ y \leqq z\} \cup \{(y, z) \mid y, z \in l_\infty(A);\ z \leqq y\}$$

et

$$F\colon [0, T] \times D \to l_\infty(A) \tag{21}$$

une fonction continue, bornée, telle que

$$\begin{gathered} 0 \leqq t \leqq T;\quad (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in D; \\ y_1 \leqq y_2,\ z_2 \leqq z_1 \Rightarrow F(t, y_1, z_1) \leqq F(t, y_2, z_2). \end{gathered} \tag{22}$$

Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} v(0) = b, & v' = F(t, v, w) \\ w(0) = c, & w' = F(t, w, v) \end{cases} \tag{23}$$

possède une solution $(v, w)\colon [0, T] \to l_\infty(A) \times l_\infty(A)$.

Démonstration. Soit

$$M = \sup_{0 \leqq t \leqq T, (y,z) \in D} \|F(t, y, z)\|.$$

En posant

$$\Phi(v, w)(t) = \int_0^t F(s, v(s), w(s))\, ds$$

(si le membre de droite existe), soit

$$\Omega = \{(v, w) \mid v, w \in L_M, \ v \leqq w, \ v \leqq b + \Phi(v, w), \ w \geqq c + \Phi(w, v)\},$$

où par b, c on désigne respectivement les fonctions constantes

$$t \to b, \quad t \to c \quad (t \in [0, T]).$$

Si l'on pose

$$v(t) = b - Mtp, \quad w(t) = c + Mtp \quad (0 \leqq t \leqq T),$$

on a $(v, w) \in \Omega$, donc $\Omega \neq \emptyset$. En définissant

$$(24) \qquad (v_1, w_1) \leqq (v_2, w_2) \quad ((v_1, w_1), (v_2, w_2) \in \Omega)$$

par les inégalités

$$v_1 \leqq v_2 \leqq w_2 \leqq w_1,$$

on obtient une relation d'ordre sur Ω. Il est facile de voir que

$$(25) \qquad (v, w) \in \Omega \Rightarrow (v, w) \leqq (b + \Phi(v, w), \ c + \Phi(w, v)) \in \Omega.$$

Or, en appliquant la technique de la démonstration du théorème 2 et en s'appuyant sur le théorème de Zorn, on trouve dans Ω des éléments maximaux (par rapport à l'ordre (24)). En vertu de (25), un tel élément maximal (v, w) sera une solution du problème de Cauchy (23). Le théorème est donc démontré.

Sous des hypothèses convenables, le théorème 4 fournit l'existence d'une solution du problème $(*)$ (sans que f satisfasse à (1)): Considérons (23) avec $b = c = a$ ($a \in l_\infty(A)$ étant fixé). Supposons que ce problème *ne possède qu'une solution.* Alors $v = w$, d'où

$$v(0) = a, \quad v'(t) = F(t, v(t), v(t)) \quad (0 \leqq t \leqq T).$$

Si l'on pose

$$(26) \qquad f(t, x) = F(t, x, x) \quad (0 \leqq t \leqq T, \ x \in l_\infty(A)),$$

la fonction v: $[0, T] \to l_\infty(A)$ est donc une solution de $(*)$.

Or, pour appliquer la remarque précédente au problème $(*)$, il faut trouver une fonction F convenable, f étant donnée. Si la fonction f: $[0, T] \times l_\infty(A) \to l_\infty(A)$ est bornée et uniformément continue, il existe toujours une fonction (21) bornée, uniformément continue et satisfaisant aux conditions (22), (26): En effet, on peut prendre

$$(27) \qquad F(t, y, z) = (F_\mu(t, y, z))_{\mu \in A} \quad (0 \leqq t \leqq T, \ (y, z) \in D),$$

où

$$F_\mu(t, y, z) = \begin{cases} \inf\limits_{y \leqq x \leqq z} f_\mu(t, x) & (y \leqq z) \\ \sup\limits_{z \leqq x \leqq y} f_\mu(t, x) & (z \leqq y) \end{cases}$$

(voir [16]). Mentionnons p. ex. le cas particulier, où la fonction f satisfait de plus à la condition d'unicité de Nagumo

$$\|f(t, x) - f(t, \bar{x})\| \leqq \frac{1}{t} \|x - \bar{x}\| \quad (0 < t \leqq T;\ x, \bar{x} \in l_\infty(A)) .$$

Alors F satisfait également à cette condition, à savoir

$$\|F(t, y, z) - F(t, \bar{y}, \bar{z})\| \leqq \frac{1}{t} \max \{\|y - \bar{y}\|, \|z - \bar{z}\|\}$$

$$(0 < t \leqq T;\ (y, z), (\bar{y}, \bar{z}) \in D) .$$

Mais l'usage de la fonction (27) a aussi ses limites naturelles (voir [17]): Ainsi pour

$$f(x) = -2(\operatorname{sgn} x) \min \{1, \sqrt{|x|}\} \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

la fonction (27) n'est autre que

$$F(y, z) = f(z) \quad (y, z \in \mathbb{R}) .$$

Or, la solution du problème de Cauchy

$$u(0) = 0 , \quad u' = f(u)$$

est unique ($u(t) \equiv 0$), tandis que le problème (23) correspondant (avec $b = c = 0$), à savoir

$$v(0) = w(0) = 0 , \quad v' = f(w) , \quad w' = f(v) ,$$

possède plusieurs solutions, p. ex. $(v(t), w(t)) \equiv (0, 0)$ et $(v(t), w(t)) = (-t^2, t^2)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$.

Littérature

[1] *A. Cellina:* On the nonexistence of solutions of differential equations in nonreflexive spaces. Bull. Amer. Math. Soc. *78* (1972), 1069—1072.

[2] *K. Deimling:* Ordinary differential equations in Banach spaces. Springer-Verlag Berlin et al. 1977.

[3] *J. Dieudonné:* Deux exemples singuliers d'équations différentielles. Acta Sci. Math. *12*B (1950), 38—40.

[4] *S. W. Du* et *V. Lakshmikantham:* Monotone iterative technique for differential equations in a Banach space. J. Math. Analysis Appl. *87* (1982), 454—459.

[5] *J. Dugundji* et *A. Granas:* Fixed point theory, I. Państwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa 1982.

[6] *C. Kuratowski:* Sur les espaces complets. Fundamenta Math. *15* (1930), 301—309.

[7] *V. Lakshmikantham* et *S. Leela:* Nonlinear differential equations in abstract spaces. Pergamon Press Oxford et al. 1981.

[8] *R. H. Martin, Jr.:* Approximation and existence of solutions to ordinary differential equations in Banach spaces. Funkcialaj Ekvac. *16* (1973), 195—211.

[9] *R. H. Martin, Jr.*: Differential equations on closed subsets of a Banach space. Trans. Amer. Math. Soc. *179* (1973), 399—414.

[10] *R. H. Martin, Jr.:* Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces. John Wiley & Sons New York et al. 1976.

[11] *M. Nagumo:* Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, III. Ser. *24* (1942), 551—559.

[12] *Б. А. Шувар* et *М. И. Копач:* О двусторонних интегральных неравенствах типа Вольтерра со многими независимыми переменными. Ukrain. Mat. Žurn. *33* (1981), 848—853.

[13] *P. Volkmann:* Über die Existenz von Lösungen der Differentialgleichung $u' = f(u)$ in einer abgeschlossenen Menge, wenn f eine k-Mengenkontraktion ist. Lecture Notes Math. *564* (1976), 496—503.

[14] *P. Volkmann:* Ein Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen in Banachräumen. Proc. Amer. Math. Soc. *80* (1980), 297—300.

[15] *P. Volkmann:* On the convergence of approximate solutions for an initial value problem in Banach spaces. Nonlinear Analysis 7 (1983), 217—222.

[16] *P. Volkmann* (*П. Фолькманн*)*:* Заметка об интегральных неравенствах типа Вольтерра. Ukrain. Mat. Žurn. *36* (1984), 393—395.

[17] *P. Volkmann:* Einschließung der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. General Inequalities 4 (4th International Conference on General Inequalities, Oberwolfach 1983) Birkhäuser Verlag Basel 1984, 351—357.

[18] *E. Zeidler:* Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis, I: Fixpunktsätze. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1976.

Adresse de l'auteur: Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, Postfach 6380, 7500 Karlsruhe 1, Allemagne Occidentale.