

Irena Rachůnková

Об одной нелинейной задаче для дифференциальных систем n -го порядка

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 34 (1984), No. 2, 285–297

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101950>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1984

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ n -ГО ПОРЯДКА

IRENA RACHŮNKOVÁ (ИРЕНА РАХУНКОВА), Olomouc

(Поступило в редакцию 2/III 1983 г.)

В настоящей статье исследуется задача об отыскании решения дифференциальной системы

$$(0.1) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

определённого в промежутке $[0, +\infty[$ и удовлетворяющего условиям

$$(0.2) \quad \varphi(x_1(0), \dots, x_n(0)) = 0, \quad x_i(t) \geq 0 \quad \text{при } t \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Из работ, посвященных аналогичным задачам для дифференциальных систем, отметим [6–8]. В отличие от упомянутых работ, теоремы разрешимости задачи (0.1), (0.2), доказанные в настоящей статье, охватывают случай знакопеременности функций f_i ($i = 1, \dots, n$). Этот случай рассматривается также в [11–13].

1. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$R =]-\infty, +\infty[; \quad R_+ = [0, +\infty[;$$

$$B_{nm}(r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in R_+^n : x_i \leq r \ (i = 1, \dots, n)\};$$

$L(I)$ – множество вещественных функций, интегрируемых по Лебегу на I ;

$L_{\text{loc}}(I)$ – множество вещественных функций, интегрируемых по Лебегу на каждом сегменте, содержащемся в I ;

$\tilde{C}(I)$ – множество вещественных функций, абсолютно непрерывных на I ;

$\tilde{C}_{\text{loc}}(I)$ – множество вещественных функций, абсолютно непрерывных на каждом сегменте, содержащемся в I ;

запись $f \in K_{\text{loc}}(R_+ \times I)$ означает, что $f : R_+ \times I \rightarrow R$ удовлетворяет локальным условиям Каратеодори на каждом сегменте, содержащемся в R_+ , т.е.

$$f(\cdot, x_1, \dots, x_n) : R_+ \rightarrow R \quad \text{измерима при любом } (x_1, \dots, x_n) \in I,$$

$$f(t, \cdot, \dots, \cdot) : I \rightarrow R \quad \text{непрерывна при почти всех } t \in R_+$$

и $\sup \{ |f(\cdot, x_1, \dots, x_n)| : |x_i| \leq \varrho \ (i = 1, \dots, n) \} \in L_{\text{loc}}(R_+)$ для всех $\varrho \in R_+$. Говорят, что вектор-функция $(g_1, \dots, g_n) : R_+^{n+1} \rightarrow R^n$ не убывает по внедиагональным переменным, если при каждом $i \in \{1, \dots, n\}$ из

$$x_1 \leq y_1, \dots, x_{i-1} \leq y_{i-1}, x_{i+1} \leq y_{i+1}, \dots, x_n \leq y_n$$

вытекает, что

$$g_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq g_i(t, y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n).$$

Всюду ниже предполагается, что $n \geq 2$, функция $\varphi : R_+^n \rightarrow R$ является непрерывной а $f_i \in K_{\text{loc}}(R_+^{n+1})$ для $i = 1, \dots, n$. Решение задачи (0.1), (0.2) ищется в классе вектор-функций

$$(x_1, \dots, x_n) : R_+ \rightarrow R^n, \quad x_i \in \tilde{C}_{\text{loc}}(R_+), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Доказанные ниже теоремы существования касаются случая, когда

$$(1.1) \quad f_i(t, 0, \dots, 0) = 0 \quad \text{и} \quad f_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0 \quad \text{для} \\ i = 1, \dots, n, \quad t \in R_+ \quad \text{и} \quad (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in R_+^{n-1}$$

и φ удовлетворяет условию

$$(1.2m) \quad \varphi(0, \dots, 0) < 0, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) > 0 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^m x_i > r, \quad (x_1, \dots, x_n) \in R_+^n, \\ \text{где} \quad r \in]0, +\infty[, \quad m \in \{1, \dots, n\}.$$

Теорема 1.1. Пусть $m \in \{1, \dots, n-1\}$, выполняются условия (1.1), (1.2m), $a_0 \in R_+$, $a > a_0$, $h \in L_{\text{loc}}(R_+)$ и функция $\delta : R_+ \rightarrow R_+$ удовлетворяет условию

$$(1.3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = +\infty.$$

Пусть, далее, на множестве $[0, a] \times B_{nm}(r)$ выполнены неравенства

$$(1.4) \quad f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$(1.5) \quad \sum_{i=m+1}^n f_i(t, x_1, \dots, x_n) \geq -h(t) \sum_{i=m+1}^n (1 + x_i),$$

на множестве $[a_0, a] \times B_{nm}(r)$ неравенство

$$(1.6) \quad \sum_{i=1}^m f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq -\delta\left(\sum_{i=m+1}^n x_i\right)$$

и на множестве $[a_0, +\infty[\times R_+^n$ неравенство

$$(1.7) \quad \sum_{i=1}^n f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq h(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_i).$$

Тогда задача (0.1), (0.2) разрешима.

Теорема 1.2. Пусть $m \in \{1, \dots, n-2\}$, пусть выполняются условия (1.1)

и (1.2п), и пусть кроме того существуют вещественные числа $a > 0$, $\delta > 0$, $\mu > 0$, $\lambda > 1$, функция $h \in L_{loc}([0, +\infty[)$ и функция $h_0 \in L([0, a])$ такие, что $h_0(t) > 0$ при $0 < t < a$ и

$$(1.8) \quad \int_0^a \left[\int_0^t h_0(\tau) d\tau \right]^{\mu/(1-\lambda)} dt = +\infty.$$

Пусть, далее, на множестве $[0, a] \times B_{nm}(r)$ выполнены неравенства (1.4) и

$$(1.9) \quad \sum_{i=m+1}^n f_i(t, x_1, \dots, x_n) \geq -h_0(t) \sum_{i=m+1}^n (1+x_i)^\lambda,$$

на множестве $]0, a[\times B_{nm}(r)$ неравенство

$$(1.10) \quad \sum_{i=1}^m f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq -\delta \left(\sum_{i=m+1}^n x_i \right)^\mu$$

и на множестве $]0, +\infty[\times R_+^n$ неравенство (1.7).

Тогда задача (0.1), (0.2) разрешима.

Теорема 1.3. Пусть выполняются условия (1.1) и (1.2п) и пусть на множестве $]0, +\infty[\times R_+^n$ выполнено неравенство (1.7), где $h \in L_{loc}([0, +\infty[)$.

Тогда задача (0.1), (0.2) разрешима.

2. ЛЕММЫ

В этом пункте мы приведем леммы, нужные для доказательства теорем.

Лемма 2.1 (О дифференциальных неравенствах). Пусть $I \subset R^n$, $g_i \in K_{loc}(R_+ \times I)$, ($i = 1, \dots, n$), вектор-функция $(g_1, \dots, g_n) \text{ sign}(t - t_0)$ не убывает по внедиагональным переменным и задача

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$x_i(t_0) = x_{0i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad t_0 \in R_+, \quad (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in I$$

имеет определенное на R_+ верхнее и нижнее решения (x_1^*, \dots, x_n^*) и (x_{1*}, \dots, x_{n*}) .

Тогда, какова бы ни была вектор-функция (y_1, \dots, y_n) , $y_i \in \tilde{C}_{loc}(R_+)$ ($i = 1, \dots, n$), удовлетворяющая неравенствам

$$y_i(t_0) \leq x_{0i}, \quad (y_i'(t) - g_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \text{ sign}(t - t_0)) \leq 0$$

$$\text{при } t \in R_+ \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$[y_i(t_0) \geq x_{0i}, \quad (y_i'(t) - g_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \text{ sign}(t - t_0)) \geq 0$$

$$\text{при } t \in R_+ \quad (i = 1, \dots, n)],$$

будем иметь

$$y_i(t) \leq x_i^*(t) \quad [y_i(t) \geq x_{i*}(t)] \quad \text{при } t \in R_+ \quad (i = 1, \dots, n).$$

Доказательство. [9], Лемма 4.3, стр. 44–48.

Лемма 2.2. Пусть $f_{ip} \in K_{\text{loc}}(R_+^{n+1})$ ($i = 1, \dots, n$; $p = 1, 2, \dots$) и пусть на множестве R_+^{n+1} выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^n |f_{ip}(t, x_1, \dots, x_n)| \leq f_0(t, x_1, \dots, x_n) \quad (p = 1, 2, \dots)$$

и

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_{ip}(t, x_1, \dots, x_n) = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

где $f_0 \in K_{\text{loc}}(R_+^{n+1})$. Пусть, далее, при любом натуральном p система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{ip}(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

имеет решение (x_{1p}, \dots, x_{np}) , удовлетворяющее условию (0.2), и пусть существует функция $\psi(t) \in L_{\text{loc}}(R_+)$ такая, что

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n |x_{ip}(t)| : p = 1, 2, \dots \right\} \leq \psi(t) \quad \text{при } t \in R_+.$$

Тогда из последовательности $\{(x_{1p}, \dots, x_{np})\}_{p=1}^{+\infty}$ можно выделить равномерно сходящуюся на каждом сегменте $I \subset R_+$ подпоследовательность, предел которой является решением задачи (0.1), (0.2).

Доказательство. [9], предложение 2.1, стр. 17–19.

В следующей лемме для системы (0.1) рассматривается вспомогательная краевая задача

$$(2.1) \quad \varphi(x_1(0), \dots, x_n(0)) = 0, \quad x_i(b) = 0 \quad (i = 2, \dots, n),$$

где $b > 0$.

Лемма 2.3. Пусть выполняются условия (1.1) и (1.2₁) и пусть на множестве $[0, b] \times R_+^n$

$$\sum_{i=1}^n |f_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq h^*(t) \sum_{i=2}^n (1 + x_i),$$

где $h^* \in L([0, b])$.

Тогда задача (0.1), (2.1) имеет хотя бы одно решение (x_1, \dots, x_n) такое, что

$$x_i(t) \geq 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq b \quad (i = 1, \dots, n).$$

Доказательство. [13], лемма 3.2.

Лемма 2.4 (Об априорной оценке). Пусть $m \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_0 \in R_+$, $a > a_0$, $r > 0$, $h \in L_{loc}(R_+)$, $h(t) \geq 0$ при $t \in R_+$ и $\delta_0 : R_+ \rightarrow R_+$ — неубывающая непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$(2.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \delta_0(x) > \frac{r}{a - a_0}.$$

Тогда существует число $r^* > r$ такое, что каковы бы ни были $b > a$ и абсолютно непрерывные функции $x_i : [0, b] \rightarrow R_+$ ($i = 1, \dots, n$), из неравенств

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^m x_i(0) \leq r, \quad x_i(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq b \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$(2.4) \quad x_i'(t) \leq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq a \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$(2.5) \quad \sum_{i=m+1}^n x_i'(t) \geq -h(t) \sum_{i=m+1}^n (1 + x_i(t)) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq a,$$

$$(2.6) \quad \sum_{i=1}^m x_i'(t) \leq -\delta_0 \left(\sum_{i=m+1}^n x_i(t) \right) \quad \text{при} \quad a_0 \leq t \leq a,$$

$$(2.7) \quad \sum_{i=1}^n x_i'(t) \leq h(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_i(t)) \quad \text{при} \quad a_0 \leq t \leq b$$

вытекает оценка

$$(2.8) \quad \sum_{i=1}^n x_i(t) \leq r^* \exp \left[\int_0^t h(\tau) d\tau \right] \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq b.$$

Доказательство. Подберем $r_0 > 0$ таким образом, чтобы имело место неравенство

$$(2.9) \quad \delta_0(x) > \frac{r}{a - a_0} \quad \text{при} \quad x > r_0.$$

Ввиду (2.3) и (2.4) из (2.6) получим

$$r \geq \sum_{i=1}^m x_i(a_0) - \sum_{i=1}^m x_i(a) \geq \int_{a_0}^a \delta_0 \left(\sum_{i=m+1}^n x_i(t) \right) dt.$$

Отсюда согласно (2.9) вытекает существование такого числа $t_0 \in [a_0, a]$, что

$$(2.10) \quad \sum_{i=m+1}^n x_i(t_0) \leq r_0.$$

С учетом (2.10) из (2.5) получаем

$$\sum_{i=m+1}^n (1 + x_i(t)) \leq (r_0 + n) \exp \int_t^{t_0} h(\tau) d\tau \leq (r_0 + n) \exp \int_0^a h(\tau) d\tau$$

$$\text{при} \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Ввиду (2.3) и (2.4) из последнего неравенства вытекает

$$(2.11) \quad \sum_{i=1}^n (1 + x_i(t)) \leq r^* \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_0,$$

где

$$r^* = r + (n + r_0) \exp \int_0^a h(\tau) d\tau.$$

Отсюда, в силу (2.7), следует

$$(2.12) \quad \sum_{i=1}^n (1 + x_i(t)) \leq r^* \exp \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau \quad \text{при } t_0 \leq t \leq b.$$

Из (2.11) и (2.12) вытекает оценка (2.8), где r^* — постоянная, независимая от b, x_1, \dots, x_n .

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 1.1. Без ограничения общности можно предполагать, что $h(t) \geq 0$ при $t \in R_+$. Подберем число $r_0 \in]r, +\infty[$ и неубывающую непрерывную функцию $\delta_0 : R_+ \rightarrow R_+$ таким образом, чтобы

$$\delta(x) \geq \delta_0(x) \quad \text{при } x \geq 0$$

и

$$\delta_0(x) = \delta_0(r_0) > \frac{r}{a - a_0} \quad \text{при } x \geq r_0.$$

Пусть $r^* > r$ постоянная, фигурирующая в лемме 2.4. Положим

$$\varrho(t) = r^* \exp \left[\int_0^t h(\tau) d\tau \right] + r_0,$$

$$\sigma(t, s) = \begin{cases} s & \text{при } 0 \leq s \leq \varrho(t) \\ \varrho(t) & \text{при } s > \varrho(t), \end{cases}$$

$\tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) = f_i(t, \sigma(t, x_1), \dots, \sigma(t, x_n))$ ($i = 1, \dots, n$) и построим дифференциальную систему

$$(3.1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Из определения функций \tilde{f}_i ($i = 1, \dots, n$) следует, что

$$(3.2) \quad \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{при}$$

$$(t, x_1, \dots, x_n) \in R_+^{n+1}, \quad \sum_{i=1}^n x_i \leq \varrho(t);$$

на множестве $[0, a] \times B_{n_m}(r)$ выполнены неравенства

$$(3.3) \quad \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$(3.4) \quad \sum_{i=m+1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=m+1}^n f_i(t, \sigma(t, x_1), \dots, \sigma(t, x_n)) \geq \\ \geq -h(t) \sum_{i=m+1}^n (1 + \sigma(t, x_i)) \geq -h(t) \sum_{i=m+1}^n (1 + x_i),$$

на множестве $[a_0, a] \times B_{n_m}(r)$ неравенство

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^m \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq -\delta \left(\sum_{i=m+1}^n \sigma(t, x_i) \right) \leq -\delta_0 \left(\sum_{i=m+1}^n x_i \right),$$

и на множестве $[a_0, +\infty[\times R_+^n$ неравенство

$$(3.6) \quad \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq h(t) \sum_{i=1}^n (1 + \sigma(t, x_i)) \leq h(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_i).$$

Далее, функции \tilde{f}_i ($i = 1, \dots, n$) на множестве R_+^{n+1} удовлетворяют неравенству

$$(3.7) \quad \sum_{i=1}^n |\tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq h^*(t),$$

где

$$h^*(t) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |f_i(t, x_1, \dots, x_n)| : 0 \leq x_j \leq \varrho(t), (j = 1, \dots, n) \right\}$$

и

$$h^* \in L_{\text{loc}}(R_+).$$

В силу леммы 2.3 при любом натуральном p система (3.1) имеет решение (x_{1p}, \dots, x_{np}) , определённое на отрезке $[0, a + p]$ и удовлетворяющее условиям

$$(3.8) \quad (x_{1p}(0), \dots, x_{np}(0)) = 0, \quad x_{ip}(t) \geq 0 \\ \text{при } 0 \leq t \leq a + p \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ввиду (1.2m) и (3.3) мы имеем

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^m x_{ip}(t) \leq \sum_{i=1}^m x_{ip}(0) \leq r \quad \text{при } 0 \leq t \leq a.$$

С другой стороны, согласно неравенствам (3.3)–(3.6), мы получаем

$$(3.10) \quad x'_{ip}(t) \leq 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq a \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$(3.11) \quad \sum_{i=1}^m x'_{ip}(t) \geq -h(t) \sum_{i=m+1}^n (1 + x_{ip}(t)) \quad \text{при } 0 \leq t \leq a,$$

$$(3.12) \quad \sum_{i=1}^m x'_{ip}(t) \leq -\delta_0 \left(\sum_{i=m+1}^n x_{ip}(t) \right) \quad \text{при } a_0 \leq t \leq a$$

и

$$(3.13) \quad \sum_{i=1}^n x'_{ip}(t) \leq h(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_{ip}(t)) \quad \text{при } a_0 \leq t \leq a + p.$$

В силу леммы 2.4 из (3.8)–(3.13) вытекает оценка

$$(3.14) \quad \sum_{i=1}^n x_{ip}(t) \leq \varrho(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq a + p.$$

Из условий (3.2), (3.8) и (3.14) следует, что (x_{1p}, \dots, x_{np}) является решением систем (0.1) на $[0, a + p]$. Полагая

$$f_{ip}(t, x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_i(t, x_1, \dots, x_n) & \text{при} \quad 0 \leq t \leq a + p \\ 0 & \text{при} \quad t > a + p \end{cases}$$

и учитывая (3.14), можно, в силу леммы 2.2, из последовательности $\{(x_{1p}, \dots, x_{np})\}_{p=1}^{\infty}$ выделить равномерно сходящуюся на каждом сегменте $I \subset R_+$ подпоследовательность, предел которой является решением задачи (0.1), (0.2) на R_+ .

Доказательство теоремы 1.2. Без ограничения общности число $a > 0$ можно выбрать настолько малым, что

$$(3.15) \quad \int_0^a h_0(t) dt < \frac{n_0^{1-\lambda}}{\lambda - 1}, \quad \text{где} \quad n_0 = n - m.$$

В силу (1.8) и (3.15) существуют числа $a_0 \in]0, a[$ и $\varepsilon \in]0, 1[$ такие, что

$$(3.16) \quad \varrho(t) = \left[\varepsilon + (\lambda - 1) \int_0^t h_0(\tau) d\tau \right]^{1/(1-\lambda)} - n_0 > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq a$$

и

$$(3.17) \quad \delta \int_{a_0}^a (\varrho(t))^{\mu} dt > r.$$

Положим

$$\sigma(s, k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leq s \leq k \\ 2 - (s/k) & \text{при} \quad k < s < 2k \\ 0 & \text{при} \quad 2k \leq s \end{cases}$$

и

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) = \\ & = f_i(t, \sigma\left(\sum_{i=1}^m x_i, r\right) x_1, \dots, \sigma\left(\sum_{i=1}^m x_i, r\right) x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, m + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) = \\ & = \sigma\left(\sum_{i=1}^m x_i, r\right) \sigma\left(\sum_{i=m+1}^m x_i, \varrho(0)\right) f_i(t, x_1, \dots, x_n), \\ & \quad (i = m + 1, \dots, n), \quad \text{при} \quad t \leq a_0, \end{aligned}$$

$$\tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{при} \quad t > a_0.$$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$(3.18) \quad \frac{dx_i}{dt} = \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n).$$

Тогда ввиду (1.4) на множестве $[0, a] \times B_{nm}(r)$ выполнено неравенство

$$(3.19) \quad \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad (i = 1, \dots, m).$$

С учетом (1.9) на множестве $[a_0, a] \times B_{nm}(r)$

$$\sum_{i=m+1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=m+1}^n f_i(t, x_1, \dots, x_n) \geq -h_0(t) \sum_{i=m+1}^n (1 + x_i)^2$$

и на множестве $[0, a_0] \times B_{nm}(r)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=m+1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) &= \sigma\left(\sum_{i=1}^m x_i, r\right) \sigma\left(\sum_{i=m+1}^n x_i, \varrho(0)\right) \sum_{i=m+1}^n f_i(t, x_1, \dots, x_n) \geq \\ &\geq \sigma\left(\sum_{i=1}^m x_i, r\right) \sigma\left(\sum_{i=m+1}^n x_i, \varrho(0)\right) (-h_0(t) \sum_{i=m+1}^n (1 + x_i)^2) \geq \\ &\geq -h_0(t) \sum_{i=m+1}^n (1 + x_i)^2, \end{aligned}$$

т.е. на множестве $[0, a] \times B_{nm}(r)$ выполняется неравенство

$$(3.20) \quad \sum_{i=m+1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \geq -h_0(t) \sum_{i=m+1}^n (1 + x_i)^2.$$

Аналогично, с учетом (1.10), на множестве $[a_0, a] \times B_{nm}(r)$

$$\sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq -\delta \left(\sum_{i=m+1}^n x_i\right)^\mu$$

и на множестве $]0, a_0] \times B_{nm}(r)$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{i=1}^m f_i(t, \sigma\left(\sum_{i=1}^m x_i, r\right) x_1, \dots, \sigma\left(\sum_{i=1}^m x_i, r\right) x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \leq -\delta \left(\sum_{i=m+1}^n x_i\right)^\mu, \end{aligned}$$

т.е. на множестве $]0, a] \times B_{nm}(r)$ мы имеем

$$(3.21) \quad \sum_{i=1}^m \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq -\delta \left(\sum_{i=m+1}^n x_i\right)^\mu.$$

Пусть

$$\tilde{h}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \max \left\{ \left[\sum_{i=m+1}^n (1 + x_i) \right]^{-1} \sum_{i=m+1}^n |f_i(t, x_1, \dots, x_n)| : (x_1, \dots, x_n) \in B_{nm}(2r), \right. \\ \left. \sum_{i=m+1}^n x_i \leq 2\varrho(0), \quad 0 \leq t \leq a_0, \right. \\ \left. h(t) \text{ при } t > a_0. \right. \end{array} \right\}$$

Тогда на множестве $[0, a_0] \times B_{nm}(r)$ выполняется неравенство

$$(3.22) \quad \sum_{i=m+1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \geq \\ \geq -\sigma\left(\sum_{i=1}^m x_i, r\right) \sigma\left(\sum_{i=m+1}^n x_i, \varrho(0)\right) \sum_{i=m+1}^n |f_i(t, x_1, \dots, x_n)| \geq -\tilde{h}(t) \sum_{i=m+1}^n (1 + x_i).$$

Далее, на множестве $]0, a_0] \times B_{nm}(r)$ имеет место (3.21), где функция $\delta\left(\sum_{i=m+1}^n x_i\right)^\mu$ удовлетворяет условию (1.3) теоремы 1.1. Для $(t, x_1, \dots, x_n) \in [0, a_0] \times R_+^n$ мы получаем ввиду (3.19) неравенство

$$\sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq \sum_{i=m+1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq \\ \leq \sigma\left(\sum_{i=1}^m x_i, r\right) \sigma\left(\sum_{i=m+1}^n x_i, \varrho(0)\right) \sum_{i=m+1}^n |f_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq \\ \leq \tilde{h}(t) \sum_{i=m+1}^n (1 + x_i) \leq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_i)$$

и при $(t, x_1, \dots, x_n) \in (a_0, \infty) \times R_+^n$ имеем

$$\sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq h(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_i) = \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_i).$$

Это значит, что на множестве $[0, \infty[\times R_+^n$ выполняется неравенство

$$(3.23) \quad \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_i).$$

Согласно (3.19), (3.21)–(3.23) функции \tilde{f}_i ($i = 1, \dots, n$) удовлетворяют условиям теоремы 1.1 и поэтому система (3.18) имеет решение (x_1, \dots, x_n) , удовлетворяющее условиям (0.2). Ввиду (1.2m) и (3.19)

$$(3.24) \quad 0 \leq \sum_{i=1}^m x_i(t) \leq \sum_{i=1}^m x_i(0) \leq r \quad \text{при } 0 \leq t \leq a.$$

Интегрируя (3.21) от a_0 до a , мы получаем в силу (3.24) неравенство

$$(3.25) \quad r \geq \sum_{i=1}^m x_i(a_0) - \sum_{i=1}^m x_i(a) \geq \delta \int_{a_0}^a \left(\sum_{i=m+1}^n x_i(t)\right)^\mu dt.$$

Из (3.17) и (3.25) вытекает существование такого $t_0 \in [a_0, a]$, что

$$\sum_{i=m+1}^n (x_i(t_0) + 1) < \varrho(t_0) + n_0.$$

Согласно (3.20) и (3.16) мы получаем

$$\sum_{i=m+1}^n (1 + x_i(t))' \geq h_0(t) \left(\sum_{i=m+1}^n (1 + x_i(t))\right)^\lambda \quad \text{при } 0 \leq t \leq a$$

и

$$\varrho'(t) = -h_0(t)(\varrho(t) + n_0)^\lambda \quad \text{при } 0 \leq t \leq a.$$

Применяя лемму 2.1, мы заключаем, что

$$\sum_{i=m+1}^n (1 + x_i(t)) < \varrho(t) + n_0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=m+1}^n (1 + x_i(t)) < \varrho(0) + n_0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_0$$

т.е. имеет место неравенство

$$(3.26) \quad \sum_{i=m+1}^n x_i(t) < \varrho(0) \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_0.$$

Из (3.24), (3.26) и определения функций \tilde{f}_i ($i = 1, \dots, n$) вытекает, что (x_1, \dots, x_n) является решением системы (0.1).

Доказательство теоремы 1.3. Пусть

$$f^*(t) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |f_i(t, x_1, \dots, x_n)| : (x_1, \dots, x_n) \in B_{nn}(4r), t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

и пусть $a > 0$ настолько мало, что

$$\int_0^a f^*(t) dt < r.$$

Положим

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} f^*(t) & \text{при } 0 \leq t \leq a \\ h(t) & \text{при } t > a \end{cases}$$

$$\varrho(t) = 2r \exp \int_0^t \tilde{h}(\tau) d\tau \quad \text{при } t \in \mathbb{R}^+$$

и

$$\sigma(v(t), s) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq s \leq v(t) \\ 2 - (s/v(t)) & \text{при } v(t) < s < 2v(t) \\ 0 & \text{при } s \geq 2v(t). \end{cases}$$

Далее, положим

$$\tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sigma(2r, \sum_{i=1}^n x_i) f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad \text{при } 0 \leq t \leq a,$$

$$\tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sigma(\varrho(t), \sum_{i=1}^n x_i) f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad \text{при } t > a$$

($i = 1, \dots, n$) и рассмотрим дифференциальную систему (3.1).

Функции \tilde{f}_i ($i = 1, \dots, n$) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq \sigma(2r, \sum_{i=1}^n x_i) \sum_{i=1}^n |f_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_i)$$

при $0 \leq t \leq a$, $(x_1, \dots, x_n) \in R_+^n$,

$$\sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq \sigma(\varrho(t), \sum_{i=1}^n x_i) h(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_i) \leq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_i)$$

при $t > a$, $(x_1, \dots, x_n) \in R_+^n$.

Следовательно,

$$(3.27) \quad \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_i) \quad \text{при } t \geq 0, (x_1, \dots, x_n) \in R_+^n.$$

Далее

$$(3.28) \quad \sum_{i=1}^n |\tilde{f}_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq h^*(t) \quad \text{при } t \geq 0, (x_1, \dots, x_n) \in R_+^n,$$

где

$$h^*(t) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |f_i(t, x_1, \dots, x_n)| : (x_1, \dots, x_n) \in B_{nn}(2\varrho(t)) \right\}$$

и

$$h^* \in L_{\text{loc}}(R_+).$$

Из (3.28) в силу леммы 2.3 следует, что при любом натуральном p система (3.1) имеет решение (x_{1p}, \dots, x_{np}) , определенное на отрезке $[0, a + p]$ и удовлетворяющее условиям (3.8). Ввиду (1.2п) мы имеем

$$(3.29) \quad \sum_{i=1}^n x_{ip}(0) \leq r.$$

С другой стороны, согласно неравенству (3.27), мы получаем

$$\left(\sum_{i=1}^n (1 + x_{ip}(t)) \right)' \leq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^n (1 + x_{ip}(t)) \quad \text{при } t \geq 0.$$

Следовательно, ввиду (3.29), отсюда вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^n x_{ip}(t) \leq \varrho(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq a + p.$$

Далее

$$\left| \sum_{i=1}^n x_{ip}(t) \right| \leq r + \int_0^a f^*(t) dt < 2r \quad \text{при } 0 \leq t \leq a.$$

Отсюда видно, что при любом натуральном p вектор-функция (x_{1p}, \dots, x_{np}) является решением задачи (0.1), (0.2) на $[0, a + p]$. Доказательство существования решения задачи (0.1), (0.2) на R_+ аналогично доказательству теоремы 1.1.

- [1] *A. Kneser*: Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen Werthen des Arguments, Journ. für die reine und angew. Math., 116 (1896), 178—212.
- [2] *A. Mambriani*: Sul un teorema relative alle equazioni differenziali ordinarie del 2^{do} ordine, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, 9 (1929), 620—622.
- [3] *P. Hartman, A. Wintner*: On the non-increasing solutions of $y'' = f(x, y, y')$, Amer. Journal of Math., 73 (1951), 390—404.
- [4] *I. T. Kiguradze*: On the non-negative non-increasing solutions of non-linear second order differential equations, Ann. di Mat. pura ed appl., 81 (1969), 169—192.
- [5] *И. Т. Кигурадзе*: О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка, Изв. АН СССР, сер. матем., 33 (1969), 1373—1398.
- [6] *P. Hartman, A. Wintner*: On monotone solutions of systems of non linear differential equations, Amer. Journ of Math., 76 (1954), 860—866.
- [7] *C. V. Coffman*: Non-linear differential equations on cones in Banach spaces, Pacific Journ. Math., 14 (1964), 9—16.
- [8] *Т. А. Чантурия*: О задаче типа Кнезера для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Матем. заметки, 15 (1974), 897—906.
- [9] *И. Т. Кигурадзе*: Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. Тбилисского унив., Тбилиси, 1975.
- [10] *И. Т. Кигурадзе, И. Рахункова*: О разрешимости нелинейной задачи типа Кнезера, Дифф. уравнения, 15 (1979), 1754—1765.
- [11] *И. Рахункова*: О задаче Кнезера для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, Сообщ. АН Грузинской ССР, 94 (1979), 545—547.
- [12] *I. T. Kiguradze, I. Rachůnková*: On a certain nonlinear problem for two-dimensional differential systems, Arch. Math. (Brno), 16 (1980), 15—38.
- [13] *I. Rachůnková*: On a Kneser problem for a system of nonlinear ordinary differential equations, Czechoslovak Math. J., 31 (106) (1981), 114—126.

Адрес автора: 771 46 Olomouc, Gottwaldova 15, ČSSR (Přirodovědecká fakulta UP).