Czechoslovak Mathematical Journal

N.Ya. Medvedev

О решётке o-аппроксимируемых ℓ-многообразий

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 34 (1984), No. 1, 6–17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101921

Czechoslovak Mathematical Journal, 34 (109) 1984, Praha

О РЕШЁТКЕ o-АППРОКСИМИРУЕМЫХ l-МНОГООБРАЗИЙ

Н. Я. МЕДВЕДЕВ, Барнаул[1])

(Поступило в редакцию 4. мая 1981г.)

l-многообразие V, в котором справедливо тождество $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$ называется o-аппроксимируемым l-многообразием (т.е. многообразие всех решеточно упорядоченных групп). Множество L_o — o-аппроксимируемых l-многообразий является дуально брауэровой решёткой относительно естественно определённых операций объединения и пересечения [1]. Пусть $\bar{V}$, $V \in L_o$, тогда говорят, что $\bar{V}$ накрывает V в решётке L_o, если $\bar{V} \supset V$ и из $\bar{V} \supseteqq U \supseteqq V$ следует $\bar{V} = U$ или $V = U$, где $U \in L_o$. Ранее, в работах [1], [2] ставился и решался вопрос о существовании накрытий для конкретных l-многообразий из L_o. В этой статье получены следующие результаты: 1) доказано, что решётка L_o не обладает свойством накрытия, а именно, построено неконечнобазируемое l-многообразие V, не являющееся наибольшим l-многообразием в решётке L_o и не имеющее накрытий в L_o; 2) доказано, что решётка L_o не является брауэровой; 3) вычислен базисный ранг l-многообразий $\mathscr{L}R$ и $\mathscr{L}N$, определяемых тождествами $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$ и $|x|\,|y| \wedge |y|^2\,|x|^2 = |x|\,|y|$ соответственно, что даёт ответ на вопрос 12 работы [1].

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Очевидно, что l-многообразие $\mathscr{L}R$, определяемое тождеством $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$ есть наибольший элемент в решётке L_o. l-многообразие $\mathscr{L}W$, определяемое тождеством $(|x|^2 \vee y^{-1}|x|\,y)\,|x|^{-2} = e$, называется l-многообразием жёстко упорядоченных l-групп, причём $\mathscr{L}W \subset \mathscr{L}R$ (см. [3]). Решётка L называется брауэровой, если в ней выполнено тождество $x \wedge (\bigvee_{\alpha \in I} y_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in I} (x \wedge y_\alpha)$. Всюду буква N обозначает множество натуральных чисел. Группу G, наделённую линейным порядком P, будем обозначать (G, P). Операции объединения и пересечения в решётке L_o обозначаем $\bigvee$ и $\bigwedge$ соответственно. Как обычно $|x| = x \vee x^{-1}$. $|a| \gg |b|$ означает, что $|a|$ и $|b|$ архимедово неэкви-

[1]) Работа выполнена автором при прохождении научной стажировки на кафедре математики Высшей технической школы в Кошице.

валентны, то есть $|a| > |b|^n$ при всех $n \in N$. Основные факты по линейно и решёточно упорядоченным группам можно найти в [4] и [5], по теории групп — в [6] и [7].

Пусть A_β — подгруппа аддитивной группы действительных чисел R, $1 \neq \beta$ — положительное действительное число, такое, что из $a \in A_\beta$ следует βa, $\beta^{-1}a \in A_\beta$. Пусть B_β — бесконечная циклическая подгруппа мультипликативной группы положительных действительных чисел, порождённая числом β. Рассмотрим множество

$$T_\beta = \{(r, a) \mid r \in B_\beta = (\beta),\ a \in A_\beta\}$$

с операцией умножения

$$(r, a)(r', a') = (rr', r'a + a').$$

Считаем $T_\beta \ni (r, a) \geqq e$, если $r = \beta^p$ и $p > 0$, либо $p = 0$ и $a \geqq 0$. Тогда T_β — линейно упорядоченная группа. Пусть P_β — этот линейный порядок группы T_β. Отметим, что множество элементов T_β вида $(1, a)$, где $a \in A_\beta$, образует выпуклую инвариантную подгруппу T_β, изоморфную A_β и при этом

$$(r, c)^{-1}(1, a)(r, c) = (1, ra).$$

Обозначим эту подгруппу A'_β. Множество элементов T_β вида $(r, 0)$ где $r \in B_\beta$, образует подгруппу B'_β, изоморфную B_β. Так как для произвольного элемента (r, a) группы T_β справедливо $(r, a) = (r, 0)(1, a)$, то группа T_β есть полупрямое произведение A'_β и бесконечной циклической группы B'_β (см. [7], стр. 336).

Лемма 1. *Пусть (G, P) — неабелева линейно упорядоченная группа, обладающая архимедовой, инвариантной, выпуклой подгруппой A, такой, что фактор-группа G/A — бесконечная циклическая группа. Тогда (G, P) изоморфна линейно упорядоченной группе T_β для некоторого $\beta \neq 1$ и $A_\beta \subseteq R$.*

Доказателство. Хорошо известно ([7], стр. 336), что группа G есть полупряморе произведение подгруппы A и бесконечной циклической группы $B = (b)$, где $e < b \notin A$. Поскольку A — выпуклая подгруппа и $b \notin A$, то $b > a$ для каждого $a \in A$. Любой элемент g группы G единственным образом записывается в виде $g = b^p a$ и $g = b^p a > e$, если $p > 0$, либо $p = 0$ и $a > e$ в A. Поскольку A — архимедова, то по теореме Гёльдера ([4], стр. 27) A порядково изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы действительных чисел R. Пусть φ — этот изоморфизм. Так как ([4], стр. 28) любой порядковый автоморфизм линейно упорядоченной группы $\varphi(A) \subseteq R$ есть умножение на некоторое положительное действительное число β, то

$$\varphi(b^{-1}ab) = \beta\, \varphi(a) \quad \text{для} \quad a \in A\,, \quad \beta > 0\,.$$

Так как G — неабелева, то $\beta \neq 1$. Теперь непосредственная проверка показывает, что отображение $f: b^p a \to (\beta^p, \varphi(a))$ являетсю изоморфизмом линейно упорядоченных групп (G, P) и (T_β, P_β), причём $A_\beta = \varphi(A) \subseteq R$ и $B_\beta = (\beta)$.

Пусть $U_\beta = \mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta)$ — l-многообразие, порождённое линейно упорядоченной группой (T_β, P_β). Через $\mathscr{L}A$ обозначим l-многообразие абелевых l-групп.

Лемма 2. *Пусть $U_\beta = \mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta)$. Тогда существует l-многообразие U'_β, обладающее свойствами:* 1) $U'_\beta \subset U_\beta$, 2) $U'_\beta \neq \mathscr{L}A$.

Доказательство. Считаем, вначале, что $\beta > 1$. Тогда существуют натуральные числа k и n такие, что $\beta < n < \beta^k$. Рассмотрим подгруппу $T'_\beta \subseteq T_\beta$, где $T'_\beta = \{(r, a) \mid r \in B'_\beta = (\beta^k),\ a \in A_\beta\}$, линейно упорядоченную относительно индуцированного порядка $P'_\beta = T'_\beta \cap P_\beta$. Покажем, что в качестве U_β можно взять $\mathrm{var}_l(T'_\beta, P_\beta)$. Так как T'_β неабелева, то $\mathrm{var}_l(T'_\beta, P'_\beta) = U'_\beta \neq \mathscr{L}A$ и, поскольку (T'_β, P'_β) — l-подгруппа (T_β, P_β), то $U'_\beta \subseteqq U_\beta$. Покажем теперь, что тождество 1) $(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n = |[x, y]|^n$, где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, выполняется на линейно упорядоченной группе (T'_β, P'_β) и не выполняется на линейно упорядоченной группе (T_β, P_β). Пусть $x, y \in (T'_\beta, P'_\beta)$. Если $[x, y] = e$, то тождество 1) справедливо. Пусть $|[x, y]| = (1, a)$, где $a > 0$. Тогда

$$(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) = (1, \beta^{kt}a)$$

для некоторого $t \in N$. Но

$$(1, \beta^{kt}a) \geqq (1, \beta^k a) > (1, na) = (1, a)^n$$

ввиду выбора $n, k \in N$. Следовательно

$$(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n = (1, \beta^{kt}a) \wedge (1, a)^n = \\ = (1, a)^n = |[x, y]|^n .$$

Значит тождество 1) справедливо на (T'_β, P'_β) и, следовательно, на $U'_\beta = \mathrm{var}_l(T'_\beta, P'_\beta)$. Заметим, что тождество 1) не выполняется на (T_β, P_β) при $x = (\beta, 0)$, $y = (1, a)$, где $a > 0$. Действительно

$$|[x, y]| = |(\beta, 0)^{-1} (1, a)^{-1} (\beta, 0) (1, a)| = |(\beta^{-1}, 0) (1, -a) (\beta, 0) (1, a)| = \\ = |(1, -\beta a) (1, a)| = |(1, (1 - \beta) a)| = (1, (\beta - 1) a) \neq e .$$

Далее

$$(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) = (\beta, 0)^{-1} (1, (\beta - 1) a) (\beta, 0) = \\ = (1, \beta(\beta - 1) a) < (1, n(\beta - 1) a) = (1, (\beta - 1) a)^n = |[x, y]|^n .$$

Отсюда, ввиду выбора n, получаем

$$(|x| \vee |y|)^{-1} |[x, y]| (|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n = \\ = (1, \beta(\beta - 1) a) \wedge (1, n(\beta - 1) a) = \\ = (1, \beta(\beta - 1) a) \neq (1, n(\beta - 1) a) = |[x, y]|^n .$$

Пусть теперь $0 < \beta < 1$. Тогда существуют $k, n \in N$, такие, что $\beta^{-1} < n < \beta^k$. Полагаем $T'_\beta = \{(r, a) \mid r \in B'_\beta = (\beta^k), a \in A_\beta\} \subseteq T_\beta$ и $P'_\beta = T'_\beta \cap P_\beta$. В качестве U'_β можно взять $\mathrm{var}_l(T'_\beta, P'_\beta)$. Доказательство аналогично предыдущему, с той лишь разницей, что вместо тождества 1) надо рассмотреть тождество

2) $(|x| \vee |y|)\,|[x, y]|\,(|x| \vee |y|)^{-1} \wedge |[x, y]|^n = |[x, y]|^n$.

Следствие. $(T_\beta, P_\beta) \in U_\beta \setminus U'_\beta$.

Пусть V — l-многообразие, определяемое следующей бесконечной системой тождеств:

а) $$|(|[x, y]|^2 \vee y^{-1}|[x, y]|\,y)\,|[x, y]|^{-2}| \wedge |(|[x, y]|^2 \vee x^{-1}|[x, y]|\,x)\,|[x, y]|^{-2}| \wedge$$
$$\wedge\, |((|x| \vee |y|)^{-1}\,|[x, y]|\,(|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n)|\,[x, y]|^{-n}| \wedge$$
$$\wedge\, |((|x| \vee |y|)\,|[x, y]|\,(|x| \vee |y|)^{-1} \wedge |[x, y]|^m)\,|[x, y]|^{-m}| = e$$
$$(m, n \in N;\ m, n \geqq 2)$$

б) $$(u \wedge w^{-1}u^{-1}w) \vee e = e$$

Очевидно, что $V \in L_0$. Простая проверка показывает, что $V \supseteqq LW$ и, следовательно, $V \neq LA$.

Лемма 3. *Пусть β положительное действительное число, $\beta \neq 1$ тогда справедливы соотношения:* 1) $(T_\beta, P_\beta) \notin V$, 2) $V \nsubseteq U_\beta = \mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta)$.

Доказательство. Очевидно, что из 1) следует 2), поэтому доказываем 1). Пусть $\beta > 1$. Тогда существует $k \in N$, такое, что $\beta^k > 2$. Покажем, что тождества из а) при $m = 2$ и $\beta^k < n$ нарушаются на (T_β, P_β). Действительно, положим $x = (\beta^k, a)$, где $a > 0$, $y = (\beta^k, 0)$. Тогда

$$|[x, y]| = (1, (\beta^k - 1)\,a) \neq e$$

так как $\beta^k > 2$. Пусть $(\beta^k - 1)\,a = b$. Тогда

$$|[x, y]|^2 = (1, 2b)\,, \quad y^{-1}|[x, y]|\,y = (1, \beta^k b) = x^{-1}|[x, y]|\,x\,,$$

и ввиду выбора k

$$(1, 2b) < (1, \beta^k b)\,.$$

Отсюда

$$|(|[x, y]|^2 \vee x^{-1}|[x, y]|\,x)\,|[x, y]|^{-2}| = |(|[x, y]|^2 \vee y^{-1}|[x, y]|\,y)\,|[x, y]|^{-2}| =$$
$$= |((1, 2b) \vee (1, \beta^k b))\,.\,(1, 2b)^{-1}| = |(1, \beta^k b)\,(1, 2b)^{-1}| = |(1, (\beta^k - 2)\,b)| > e\,.$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$|((|x| \vee |y|)^{-1}\,|[x, y]|\,(|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n)\,.\,|[x, y]|^{-n}| =$$
$$= |((1, \beta^k b) \wedge (1, nb))\,(1, nb)^{-1}| = |(1, \beta^k b)\,.\,(1, nb)^{-1}| = |(1, (\beta^k - n)\,b)| > e$$

и

$$|((|x| \vee |y|)|\,[x, y]|(|x| \vee |y|)^{-1} \wedge |[x, y]|^2)\,|[x, y]|^{-2}| =$$

$$= |((1, \beta^{-k}b) \wedge (1, 2b))\,(1, 2b)^{-1}| = |(1, \beta^{-k}b)\,(1, 2b)^{-1}| = |(1, (\beta^{-k} - 2)\,b)| > e$$

Поскольку (T_β, P_β) — линейно упорядоченная группа, то

$$|(1, (\beta^k - 2)\,b)| \wedge |(1, (\beta^k - n)\,b)| \wedge |(1, (\beta^{-k} - 2)\,b)| =$$

$$= \min\{|(1, (\beta^k - 2)\,b)|,\ |(1, (\beta^k - n)\,b)|,\ |(1, (\beta^{-k} - 2)\,b)|\} > e$$

Значит $(T_\beta, P_\beta) \notin V$ и, следовательно, $U_\beta = \mathrm{var}_l\,(T_\beta, P_\beta) \nleqq V$.

Случай $\beta < 1$ разбирается аналогично, с той лишь разницей, что на (T_β, P_β) нарушаются тождества из а) при $n = 2$, $m > \beta^{-k}$, где $\beta^{-k} > 2$ и $x = (\beta^{-k}, a)$, $y = (\beta^{-k}, 0)$.

Следствие 1. *Пусть U'_β — l-многообразие, определённое в лемме 2. Тогда $U'_\beta \nleqq V$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Следствие 2. $V \neq \mathscr{L}R$.

Лемма 4. *Пусть V_1, V_2, V_3 — l-многообразия, $V_1 = V_2 \bigvee V_3$ и (G, P) — линейно упорядоченная группа. Если $(G, P) \in V_1$, то $(G, P) \in V_2$ или $(G, P) \in V_3$.*

Доказательство. Хорошо известно [1], что если l-группа $H \in V_1 = V_2 \bigvee V_3$, то существуют l-идеалы A_1, A_2, такие, что $H/A_1 \in V_2$ и $H/A_2 \in V_3$, причём $A_1 \cap A_2 = e$. Но (G, P) — линейно упорядоченная группа, поэтому либо $A_1 = e$, либо $A_2 = e$. В любом случае (G, P) принадлежит либо V_2, либо V_3.

§ 2. О НАКРЫТИЯХ В L_o

Теорема 1. *l-многообразие V не имеет накрытий в решётке L_o.*

Доказательство. Пусть, напротив, существует l-многообразие $\overline{V} \in L_o$, накрывающее V. Поскольку V — o-аппроксимируемое l-многообразие, то существует линейно упорядоченная группа $(G, P) \in \overline{V} \setminus V$, тождество б) выполнено на ней очевидным образом. Значит существуют $m, n \in N (m, n \geqq 2)$, $x, y \in G$, такие, что:

1) $|(|[x, y]|^2 \vee y^{-1}|[x, y]|\,y)\,|[x, y]|^{-2}| > e$,
$|(|[x, y]|^2 \vee x^{-1}|[x, y]|\,x)\,|[x, y]|^{-2}| > e$,

2) $|((|x| \vee |y|)^{-1}\,|[x, y]|\,(|x| \vee |y|) \wedge |[x, y]|^n)\,|[x, y]|^{-n}| > e$,

3) $|((|x| \vee |y|)\,|[x, y]|\,(|x| \vee |y|)^{-1} \wedge |[x, y]|^m)\,|[x, y]|^{-m}| > e$.

Из 1) следует

4) $y^{-1}|[x, y]|\, y > |[x, y]|^2,\ x^{-1}|[x, y]|\, x > |[x, y]|^2.$

Из 2) получаем

5) $(|x| \vee |y|)^{-1}\, |[x, y]|\, (|x| \vee |y|) < |[x, y]|^n.$

Из 3) вытекает

6) $(|x| \vee |y|)\, |[x, y]|\, (|x| \vee |y|)^{-1} < |[x, y]|^m.$

Пусть, для определённости, $|y| > |x|$. Тогда 5) и 6) переписываются следующим образом:

7) $|y|^{-1}\, |[x, y]\, |y| < |[x, y]|^n,$

8) $|y|\, |[x, y]|\, |y|^{-1} < |[x, y]|^m.$

Сопрягая 8) элементом $|y|$, получаем

9) $|[x, y]| < |y|^{-1}\, |[x, y]|^m\, |y| = (|y|^{-1}\, |[x, y]|\, |y|)^m.$

Из 7) и 9) следует

10) $|[x, y]| < (|y|^{-1}\, |[x, y]|\, |y|)^m < |[x, y]|^{mn}.$

Неравенство 10) означает, что элементы $|[x, y]|$ и $|y|^{-1}\, |[x, y]|\, |y|$ архимедово эквивалентны, следовательно скачок $\bar{V}_\alpha \supset V_\alpha$ выпуклых подгрупп в G, определяемый элементом $|[x, y]|$, инвариантен относительно сопряжения элементом y. Рассмотрим подгруппу K группы G, порождённую элементами y и $[x, y]$, линейно упорядоченную относительно индуцированного порядка $Q = K \cap P$. Пусть $V_\alpha \cap K = \bar{A}_\alpha$ и $V_\alpha \cap K = A_\alpha$. Тогда A_α инвариантна в K. Рассмотрим фактор-группу $\bar{K} = K/A_\alpha$, естественно линейно упорядоченную, $\bar{K} \supset \bar{A} = \bar{A}_\alpha/A_\alpha$ — выпуклая, архимедова, инвариантная подгруппа в $\bar{K}$. Пусть $\bar{Q}$ — линейный порядок $\bar{K}$. Поскольку фактор-группа $\bar{K}/\bar{A}$ — бесконечная циклическая группа и, как следует из неравенств 4), $\bar{K}$ — неабелева, то по лемме 1 $\bar{K}$ изоморфна некоторой линейно упорядоченной группе (T_β, P_β) из § 1. Значит l-многообразие V содержит l-многообразие $U_\beta = \mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta)$. По лемме 2 существует l-многообразие U'_β, такое, что $U_\beta \supset U'_\beta$. По лемме 3 и следствию из леммы 3 $U_\beta \nsubseteq V$, $U'_\beta \nsubseteq V$, а по лемме 3 и следствию 1 из леммы 2 $(T_\beta, P_\beta) \notin V, U'_\beta$. Тогда $\bar{V} \supseteq U_\beta \bigvee V \supset V$ и $\bar{V} \supseteq U'_\beta \bigvee V \supset V$. Поскольку $\bar{V}$ накрывает V, то $\bar{V} = U_\beta \bigvee V = U'_\beta \bigvee V$. Но $(T_\beta, P_\beta) \in \bar{V} = U'_\beta \bigvee V$, значит по лемме 4, либо $(T_\beta, P_\beta) \in U_\beta$, либо $(T_\beta, P_\beta) \in V$. Оба случая невозможны, противоречие.

Следствие 1. *Решётка L_o не обладает свойством накрытия.*

Следствие 2. *Все накрымия l-многообразия $\mathscr{L}A$ абелевых l-групп в решётке L_o содержатся в V.*

Доказательство. В работе [2] построены три накрытия l-многообразия $\mathscr{L}A$ абелевых l-групп в решётке $L_o : \mathrm{var}_l(N_0)$, $\mathrm{var}_l(W^-)$, $\mathrm{var}_l(W^+)$, причём доказано, что для каждого β выполняется $\mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta) \supseteq \mathrm{var}_l(W^-)$, если $\beta < 1$, или $\mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta) \supseteqq \mathrm{var}_l(W^+)$, если $\beta > 1$. Из определения линейно упорядоченной группы (T'_β, P'_β) и доказательства теоремы 1 работы [2] следует, что $\mathrm{var}_l(T'_\beta, P'_\beta) \supseteqq \mathrm{var}_l(W^-)$, если $\beta > 1$, и $\mathrm{var}_l(T'_\beta, P'_\beta) \supseteqq \mathrm{var}_l(W^+)$, если $\beta > 1$. Применяя лемму 2, получаем, что $\mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta) \supset \mathrm{var}_l(W^-)$, при $\beta > 1$, и $\mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta) \supset \mathrm{var}_l(W^+)$, при $\beta > 1$. Лёгкая проверка показывает, что $\mathrm{var}_l(W^-)$, $\mathrm{var}_l(W^+) \subseteqq V$. Пусть l-многообразие U является накрытием l-многообразия абелевых l-групп $\mathscr{L}A$ в решётке и $U \nsubseteqq V$. Тогда существует линейно упорядоченная группа $(G, P) \in U \setminus V$. По рассуждениям, аналогичным доказательству теоремы 1 следует, что $U \supseteqq \mathrm{var}_l(T_\beta, P_\beta)$ для некоторого $\beta \neq 1$. Следовательно $U \supset \mathrm{var}_l(W^-) \supset LA$, если $\beta < 1$, **или** $U \supset \mathrm{var}_l(W^+) \supset \mathscr{L}A$, если $\beta > 1$. Оба случая противоречат тому, что U накрывает $\mathscr{L}A$.

Следствие 3. *l-многообразие V не допускает конечной базы тождеств.*

Доказательство. Действительно, если V конечнобазируемо, то для произвольного l-многообразия W такого, что $W \supset V$, существует l-многообразие U, накрывающее V и $W \supseteqq U$. Полагая $W = \mathscr{L}R$, получаем противоречие с теоремой 1.

§ 3. НЕБРАУЭРОВОСТЬ L_o

Пусть $\beta_n = n/(n+1)\,(n \in N)$ и $A_{\beta_n} = R$, где R – аддитивная группа действительных чисел. Рассмотрим l-группу $G = \overline{\prod_{n\in N}}(T_{\beta_n}, P_{\beta_n})$, являющуюся декартовым l-произведением линейно упорядоченных групп $(T_{\beta_n}, P_{\beta_n})$. Очевидно, что $K = \overline{\prod_{n\in N}}(A'_{\beta_n}, P'_{\beta_n})$ (определения подгрупп A'_{β_n} см. в § 1) является l-идеалом l-группы G, где $P'_{\beta_n} = P_{\beta_n} \cap A'_{\beta_n}$. Каждый элемент K можно представить в виде бесконечной последовательности

$$k = ((1, a_1); \ldots; (1, a_n); \ldots) \quad \text{где} \quad a_n \in R = A_{\beta_n}, \quad n \in N\,.$$

Пусть G_0 – l-подгруппа G, порождённая элементом $g = ((\beta_1, 0); \ldots; (\beta_n, 0); \ldots)$ и l-идеалом K. Очевидно, что K – l-идеал в G_0. Рассмотрим множество

$$H = \{k = ((1, a_1); \ldots; (1, a_n); \ldots) \in K \mid \text{где } a_n \in R \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}\,.$$

Лемма 5. *H – l-идеал в l-группе G_0.*

Доказательство. Очевидно, что H – выпуклая l-подгруппа. Пусть $k = ((1, a_1); \ldots; (1, a_n); \ldots)$ – произвольный элемент из H. Тогда

$$g^{-1}kg = \left(\left(1, \frac{1}{2}a_1\right); \left(1, \frac{2}{3}a_2\right); \ldots; \left(1, \frac{n}{n+1}a_n\right); \ldots\right).$$

Но $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(n/(n+1)) = 1$, следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\,.\,a_n\right) = 1\,.\,0 = 0\,.$$

Значит $g^{-1}kg \in H$ для произвольного $k \in H$, что и доказывает инвариантность H в G_0.

Обозначим через N_0 свободную нильпотентную группу

$$N_0 = gp(a, b, c \mid [a, b] = c\,, \quad [a, c] = [b, c] = e)\,,$$

упорядоченную линейно следующим образом: $N_0 \ni a^m b^n c^k > e$, если $m > 0$, или $m = 0$ и $n > 0$, или $m = n = 0$ и $k > 0$. Пусть P_0 — этот линейный порядок группы N_0.

Лемма 6. *Фактор-группа l-группы G_0 по l-исеалу H содержит линейно упорядоченную подгруппу, изоморфную (N_0, P_0).*

Доказательство. Рассмотрим в l-группе G_0 элементы

$$g = ((\beta_1, 0); \ldots; (\beta_n, 0); \ldots)\,, \quad k_1 = ((1, 2); (1, 3); \ldots; (1, n + 1); \ldots)$$

Тогда

$$k_2 = [g, k_1] = g^{-1}k_1^{-1}gk_1 = ((1, -1); \ldots; \left(1, -\frac{n}{n+1}(n + 1); \ldots\right).$$

$$.((1, 1); \ldots; (1, n + 1); \ldots) = ((1, 1); \ldots; (1, 1); \ldots)\,.$$

Очевидно, что $k_2 \notin H$. Далее

$$[g, k_2] = g^{-1}k_2^{-1}gk_2 = \left((1, \tfrac{1}{2}); \ldots; \left(1, \frac{1}{n+1}\right); \ldots\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(1/(n + 1)) = 0$, то $[g, k_2] \in H$. Из коммутативности K следует, что $[k_1, k_2] = e$. Поэтому в фактор-группе G_0/H, естественно решёточно упорядоченной, справедливы соотношения:

$$[\bar{g}, \bar{k}_1] = \bar{k}_2\,, \quad [\bar{g}, \bar{k}_2] = [\bar{k}_1, \bar{k}_2] = e\,; \quad \bar{g} \gg \bar{k}_1 \gg \bar{k}_2\,,$$

где $\bar{g}, \bar{k}_1, \bar{k}_2$ — образы элементов g, k_1, k_2 при естественном l-гомоморфизме l-группы G_0 на l-группу G_0/H, что и доказывает линейную упорядоченность подгруппы $gp(\bar{g}, \bar{k}_1, \bar{k}_2)$, порождённой элементами $\bar{g}, \bar{k}_1, \bar{k}_2$ l-группы G_0/H, и её изоморфность линейно упорядоченной группе (N_0, P_0).

Теорема 2. *Решётка о-аппроксимируемых l-многообразий не является брауэровой.*

Доказательство. Заметим, что справедливо равенство:

1) $\mathrm{var}_l(T_{\beta_n}, P_{\beta_n}) \bigwedge \mathrm{var}_l(N_0, P_0) = \mathscr{L}A$ для каждого $n \in N$. Действительно, в l-многообразии $\mathrm{var}_l(T_{\beta_n}, P_{\beta_n})$ справедливо тождество

а) $(|x| \vee |y|)^k |[x, y]| (|x| \vee |y|)^{-k} \wedge |[x, y]|^3 = |[x, y]|^3$ при $\beta^{-k} = ((n + 1)/n)^k > 3$.

Так как $[x, y]$ — центральный элемент в группе N_0, то в $\mathrm{var}_l(N_0, P_0)$ справедливо тождество

б) $(|x| \vee |y|)^k |[x, y]| (|x| \vee |y|)^{-k} = |[x, y]|$.

Непосредственная проверка показывает, что если на l-группе выполнены тождества а) и б) одновременно, то она абелева, что и доказывает справедливость равенства 1).

Очевидно, что $G, G_0, G_0/H \in \bigvee\limits_{n\in N} \mathrm{var}_l(T_{\beta_n}, P_{\beta_n})$. По лемме 6 линейно упорядоченная группа $(N_0, P_0) \in \bigvee\limits_{n\in N} \mathrm{var}_l(T_{\beta_n}, P_{\beta_n})$, следовательно имеет место

2) $\mathrm{var}_l(N_0, P_0) \bigwedge (\bigvee\limits_{n\in N} \mathrm{var}_l(T_{\beta_n}, P_{\beta_n})) = \mathrm{var}_l(N_0, P_0)$.

Из 1), 2) и того, что $\mathscr{L}A \neq \mathrm{var}_l(N_0, P_0)$, следует небрауэровость решётки L_o.

§ 4. БАЗИСНЫЙ РАНГ

Напомним, что базисным рангом l-группы G называется наименьшья из мощностей множеств, порождающих G. Базисный ранг l-многообразия V равен наименьшему из базисных рангов l-групп $G \in V$, порождающих l-многообразие V ([8], стр. 345). Пусть A и B — l-группы, причём B — линейно упорядочена, тогда через $W = AWrB$ обозначим полное сплетение групп A и B, естественно решёточно упорядоченное (см. [9]). В [9] доказано, что любая счётная l-группа G изоморфно вложима в l-группу H с двумя порождающими, являющуюся l-подгруппой l-группы $(GWrB)\,WrC$, где B, C — линейно упорядоченные бесконечные цилические группы. Непосредственная проверка показывает, что если $G \in \mathscr{L}N$, то и $(GWrB)\,WrC \in \mathscr{L}N$, а значит, и $H \in \mathscr{L}N$.

Теорема 3. *Базисный ранг l-многообразий $\mathscr{L}R$ и $\mathscr{L}N$, определяемых тождествами $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$ и $|x|\,|y| \wedge |y|^2\,|x|^2 = |x|\,|y|$ соответственно, равен* 2.

Доказательство. 1) Случай $\mathscr{L}N$. Пусть $F_{\mathscr{L}N}(2)$ — свободная l-группа в l-многообразии $\mathscr{L}N$ с двумя свободными порождающими. Через V обозначим l-многообразие, порождённое l-группой $F_{\mathscr{L}N}(2)$. Очевидно, что $V \subseteq \mathscr{L}N$. По вышеотмеченному существует l-группа $H \in \mathscr{L}N$ с двумя порождающими, содержащая в качестве l-подгруппы свободную в l-многообразии $\mathscr{L}N$ l-группу $F_{\mathscr{L}N}(\aleph_0)$ со счётным числом свободных порождающих. Поскольку H порождается двумя элементами, то она является гомоморфным образом l-группы $F_{\mathscr{L}N}(2)$ и, значит, $H \in V$. Следовательно $F_{\mathscr{L}N}(\aleph_0) \in V$. Хорошо известно, что l-многообразие однозначно определяется своей свободной l-группой со счётным числом свободных порождающих, поэтому $V = \mathcal{L}N$. Значит $F_{\mathcal{L}N}(2)$ порождает $\mathcal{L}N$ и, следовательно, базисный ранг l-многообразия равен 2.

2) Случая $\mathcal{L}R$. По теореме Неймана ([4], стр. 62] любая счётная линейно упорядоченная группа (G, P) изоморфно вложима в линейно упорядоченную группу (H, Q) с двумя порождающими и содержащую (G, P) как l-подгруппу. Пусть $(F(\aleph_0), P_\alpha)$ – свободная группа со счётным числом свободных порождающих, линейно упорядоченная относительно произвольного линейного порядка P_α (такие существуют, [4], стр. 33). Через V обозначим l-многообразие, порождённое l-группой $F_{\mathcal{L}R}(2)$, где $F_{\mathcal{L}R}(2)$ – свободная l-группа в l-многообразии $\mathcal{L}R$ с двумя свободными порождающими. Тогда для каждого P_α существует линейно упорядоченная группа $(H_\alpha Q_\alpha)$ с двумя порождающими, содержащая линейно упорядоченную группу $(F(\aleph_0), P_\alpha)$ в качестве l-подгруппы. Поскольку $H_\alpha \in V$, то $(F(\aleph_0), P_\alpha) \in V$ для каждого P_α. Но как показано в [10], свободная l-группа l-многообразия $\mathcal{L}R$, со счётным числом свободных порождающих, является l-подгруппой декартова l-произведения $\overline{\prod_{\alpha \in I}} (F(\aleph_0), P_\alpha)$, где произведение берётся по всем линейным порядкам группы $F(\aleph_0)$. Значит свободная l-группа l-многообразия $\mathcal{L}R$ со счётным числом свободных порождающих содержится в V, поэтому $V = \mathcal{L}R$ и базисный ранг $\mathcal{L}R$ равен 2.

Замечание. В [10] доказано, что базисный ранг l-многообразия $\mathcal{L}$ всех l-групп равен 2. Автору остаётся неизвестным базисный ранг l-многообразия $\mathcal{L}W$ жёстко упорядоченных l-групп.

§ 5. l-МНОГООБРАЗИЕ БЕЗ НЕЗАВИСИМОГО БАЗИСА ТОЖДЕСТВ

В этом параграфе доказано существование многообразий решеточно упорядоченных групп, не имеющих независимого базиса тождеств.

Вопрос о существовании независимого базиса тождеств многообразий алгебраических систем неоднократно рассматривался ранее. Так, например, в [11] построен пример многообразия группоидов, не имеющего независимого базиса тождеств, аналогичное утверждение справедливо для подгрупп [12], для групп ответ на этот вопрос неизвестен [14] (проблема 4.64). В этой заметке доказано существование l-многообразий, не имеющих независимого базиса тождеств.

Хорошо известно, что класс $\mathcal{L}$ всех решеточно упорядоченных групп (l-групп) является многообразием в сигнатуре $\langle \cdot, ^{-1}, e, \vee, \wedge \rangle$ (l-многообразием). Пусть Σ – некоторое множество тождеств в этой сигнатуре. Через $V(\Sigma)$ обозначим l-многообразие определённое этой системой тождеств. Множество тождеств Σ называется независимым, если из $\Sigma_1 \subset \Sigma$ следует $V(\Sigma) \subset V(\Sigma_1)$ для любого собственного подмножества Σ_1 (см. [13]). Говорят, что l-многообразие $V(\Sigma^\wedge)$ обладает независимым базисом тождеств, если существует независимое множество тождеств Σ такое, что $V(\Sigma^\wedge) = V(\Sigma)$. Введём следующие обозначения: L — решетка всех l-многообразий; LR — l-многообразие o-аппроксимируемых l-групп, определяемое тождеством $(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e$. Пусть $\bar{V}$, $V \in L$, тогда $\bar{V}$ накрывает V, если $\bar{V} \supseteqq V$ и из $\bar{V} \supseteqq U \supseteqq V$ следует $\bar{V} = U$ или $V = U$, где $U \in L$. На связь между существованием независимого базиса тождеств l-многообразия V и накрытиями V в решетке l-многообразий L указывает следующее, хорошо известное (см. [15]).

Предложение. *Пусть $V \subset W \subseteq \mathscr{L}$ — l-многообразия и пусть W — конечнобазируемо. Если V имеет бесконечный базис тождеств, то существует бесконечное число l-многообразий U_i ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$), накрывающих V в решетке L, причём $U_i \subset W$.*

Пусть $V = V(\Sigma)$ — l-многообразие, определяемое системой тождеств а), б) в § 1 (обозначим её через Σ).

Теорема. *l-многообразие $V = V(\Sigma)$ не имеет независимого базиса тождеств.*

Доказателство. В п. 2 доказано, что V не допускает конечной базы тождеств. Пусть, напротив, l-многообразие обладает независимым базисом тождеств. По определению, l-многообразие LR конечнобазируемо и $V \subset LR \subset L$. Тогда по предложению должно существовать бесконечное число l-многообразий U_i, накрывающих V в решетке L и $U_i \subset LR$. Но как доказано в § 2, таких l-многообразий нет. Значит предположение неверно и V не допускает независимого базиса тождеств.

Замечание. Отметим, что l-многообразия V_1, V_2, W_1, W_2, определённые в [16] также не допускают независимого базиса тождеств. Доказательство этого факта, ввиду его громоздкости, мы не приводим.

Литература

[1] *J. Martinez:* Varieties of lattice ordered groups. Math. Z., *137* (1974), 265—284.
[2] *Н. Я. Медведев:* О решётках многообразий решёточно упорядоченных групп и алгебр Ли. Алгебра и Логика, *16*, 1 (1977), 40—45.
[3] *В. М. Копытов, Н. Я. Медведев:* О линейно упорядоченных группах, ситема выпуклих лодгрупп которых центральна. Мат. заметки, *19*, 1 (1976), 85—90.
[4] *А. И. Кокорин, В. М. Копытов:* Линейно упорядоченные группы. Москва, 1972.
[5] *Л. Фукс:* Частично упорядоченные алгебраические системы, Москва, 1965.
[6] *М. И. Капралов, Ю. И. Мерзляков:* Основы теории групп, Москва, 1972.
[7] *А. Г. Курош:* Теория групп. Москва, 1967.
[8] *А. И. Мальцев:* Алгебраические системы. Москва, 1970.
[9] *Н. Я. Медведев:* О решётке радикалов конечнопорождённых l-групп. Math. Slovaca *33*, 1983, 185—188.
[10] *P. Conrad:* Free lattice ordered groups. J. Algebra, *16* (1970), 191—203.
[11] *A. Tarski:* Equational logic and equational theories of algebras, Contributions to Math. Logic, North Holland, Amsterdam—London, 1968, 275—288.

[12] *А. Н. Трахтман:* Многообразия подгрупп без неприводимого базиса тождеств, Матем. заметки, *21*, 6 (1977), 865—871.

[13] *А. И. Мальцев:* Универсально аксиоматизируемые подклассы локально конечных классов моделей, Сиб. мат. журнал, *8*, 5 (1967), 1005—1014.

[14] Коуровская тетрадь нерешённые задачи теории групп, Новосибирск, 1968.

[15] *В. А. Горбунов:* Покрытия в решётках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость, Алгебра и Логика, *16*, 5 (1977), 507—548.

[16] *Н. Я. Медведев:* К теории многообразий решёточно упорядоченных групп. Czech. Math. J., *32* (*107*), 1982 364—372.

Адрес автора: 040 01 Košice, Švermova 9, ČSSR (Vysoká škola technická, Strojnícka fakulta, Katedra matematiky).

Постоянный адрес: СССР, 656 099, Барнаул-99 пр. Социалистический 68 (Алтайский Государственный университет, кафедра алгебры и математической логики).