Czechoslovak Mathematical Journal

S. B. Norkin

О двусторонних решениях линейной системы с асимптотически постоянными коэффициентами и запаздыванием

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 33 (1983), No. 1, 58–69

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101855

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1983

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Czechoslovak Mathematical Journal, 33 (108) 1983, Praha

О ДВУСТОРОННИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С АСИМПТОТИЧЕСКИ ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С. Б. НОРКИН, Москва

(Поступило в редакцию 11/X 1980)

В работе изучаются условия существования двусторонних (определенных на всей числовой оси $(-\infty, \infty)$) решений линейной системы

$$Y'(t) = A(t)\, Y(t - \tau(t))\,, \quad -\infty < t < \infty\,,$$

где $n \times n$ матрица $A(t)$ с действительно значными элементами и действительно значная функция $\tau(t) \geqq 0$ таковы, что

$$\lim_{t \to -\infty} A(t) = A\,, \quad \lim_{t \to -\infty} \tau(t) = \tau\,.$$

Здесь A – постоянная $n \times n$ матрица (случай, когда A нулевая матрица не исключается), $\tau > 0$.

1. СИСТЕМА С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В этом параграфе будем рассматривать линейную систему с постоянным запаздыванием

$$Y'(t) = A(t)\, Y(t - \tau)\,, \quad -\infty < t < \infty\,, \tag{1}$$

где $n \times n$ матрица $A(t)$ представима в виде

$$A(t) = A + \alpha(t)\,. \tag{2}$$

Здесь A – постоянная матрица, а элементы $\alpha_{jk}(t)$ матрицы $\alpha(t)$ непрерывны на $(-\infty, \infty)$ и существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\|\alpha(t)\| = O(e^{\varepsilon t}) \quad \text{при} \quad t \to -\infty\,. \tag{3}$$

Предполагая, что в (2) A ненулевая матрица, положим $Y(t) = Z(t) + W(t)$, где $Z(t)$ – решение укороченной системы

$$Z'(t) = AZ(t - \tau)\,. \tag{4}$$

Тогда $W(t)$ – решение неоднородной системы

$$W'(t) = A(t)\, W(t-\tau) + \alpha(t)\, Z(t-\tau)\,. \tag{5}$$

Укороченная система (4) имеет, как известно, бесконечную последовательность двусторонних решений. Пусть λ_j собственное значение матрицы A кратности l_j, которому соответствует k элементарных делителей кратности m_i ($i = 1, \ldots, k$; $m_1 + \ldots + m_k = l_j$). С собственным значением λ_j свяжем характеристическое уравнение

$$\omega - \lambda_j e^{-\omega\tau} = 0\,, \tag{6}$$

имеющее при $\lambda_j \neq 0$ счетное множество корней ω_r, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (если $\lambda_j = 0$, то уравнение (6) имеет единственный корень $\omega_0 = 0$). Тогда для каждого корня ω_r уравнения (6) i-му элементарному делителю матрицы A кратности m_i, связанному с собственным значением λ_j, соответствует m_i, вообще говоря, комплексно значных решений системы (4) вида

$$Z^{(i)}_{jrs}(t) = e^{\omega_z t}\, P^{(i)}_{jrs}(t)\,, \quad s = 0, 1, \ldots, m_i - 1\,, \tag{7}$$

где $P^{(i)}_{jrs}(t)$ – вектор функция с полиномиальными компонентами степени не выше s.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (5) *матрицы* $A(t)$ *и* $\alpha(t)$ *удовлетворяют* (2) *и* (3), *а функция* $Z(t)$ *имеет вид*

$$Z(t) = e^{\omega_* t}\, P_s(t)\,, \tag{8}$$

где $P_s(t)$ – *вектор функция с полиномиальными компонентами степени не выше* s. *Тогда для того чтобы уравнение* (5) *имело решение вида*

$$W(t) = e^{\omega t}\left(V + \int_{-\infty}^{t} u(\xi)\,d\xi\right), \tag{9}$$

где V – *ненулевой постоянный вектор,* $u(t)$ – *вектор функция с компонентами из* $L(-\infty, d]$ *и*

$$\operatorname{Re}\omega \leqq \operatorname{Re}\omega_*\,, \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы ω *было корнем характеристического уравнения* (6).

Действительно, подставляя (9) в (5), сокращая на $e^{\omega t}$ и перехода к пределу при $t \to -\infty$, в силу (10) получим

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = (\omega E - e^{-\omega\tau} A)\, V\,. \tag{11}$$

Но для вектор функции с компонентами из $L(-\infty, d)$ легко показать, что если предел при $t \to -\infty$ существует, то это нуль-вектор. Таким образом, из (11) следует

$$(\omega E - e^{-\omega\tau} A)\, V = 0\,.$$

Но $V \neq 0$. Следовательно, $\omega = \omega_r$ – корень уравнения (6).

Для доказательства достаточности условия можно сделать замену переменной $t = \ln x$ и сослаться на теорему 2.1 из [1].

Полагая теперь в (8) $Z(t) = Z_{jrs}^{(i)}(t)$, а в (9) $\omega = \omega_r$, получим представление для решений системы (1)

$$Y_{jrs}^{(i)}(t) = e^{\omega_r t}\left(\tilde{P}_{jrs}^{(i)}(t) + \int_{-\infty}^{t} u_{jrs}^{(i)}(\xi)\,d\xi\right), \tag{12}$$

$j = 1, \ldots, p\,(l_1 + \ldots + l_p = n)$; $i = 1, \ldots, k\,(m_1 + \ldots + m_k = l_j)$; $s = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m_i - 1$; $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (если $\lambda_j = 0$, то $r = 0$). Здесь $\tilde{P}_{jrs}^{(i)}(t)$ – вектор функция с полиномиальными компонентами степени не выше s, $u_{jrs}^{(i)}(t)$ – вектор функция с компонентами из $L(-\infty, d]$.

Таким образом, между двусторонними решениями полной системы (1) и укороченной системы (4) установлено взаимно однозначное соответствие и, следовательно, имеет место

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (1) *марица* $A(t)$ *удовлетворяет* (2) *и* (3), *где* A *– ненулевая матрица. Тогда для того чтобы система* (1) *имела бесконечную последовательность линейно независимых двусторонних решений вида* (12), *необходимо и достаточно, чтобы матрица* A *имела по крайней мере одно отличное от нуля собственное значение. В противном случае система* (1) *имеет* n, *и только* n, *линейно независимых решений вида* (12), *где* $r = 0$.

Замечание. Так как элементы матрицы $A(t)$ действительно значные функции, то все комплексно значные решения (12) системы (1) входят сопряженными парами. В силу линейности и однородности системы (1) каждой такой паре соответствует пара действительно значных решений (1).

Пусть теперь в (2) A – нулевая матрица.

Будем говорить, что функция $\varphi(t)$ принадлежит некоторому пространству L с весом $\psi(t)$, если $\psi(t)\,\varphi(t) \in L$.

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (1) *матрица* $A(t) = \alpha(t)$ *удовлетворяет условию* (3). *Тогда система* (1) *имеет точно* n *линейно независимых двусторонних решений в классе вектор функций с компонентами, принадлежащими* $L_2(-\infty, d]$ *с весом* $e^{t/2}$. *Эти решения представимы в виде*

$$Y_k(t) = V_k + \int_{-\infty}^{t} u_k(\xi)\,d\xi\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{13}$$

где постоянный вектор $V_k \neq 0$, *а* $u_k(t)$ *– вектор функция с компонентами из* $L(-\infty, d]$.

Утверждение теоремы следует из теоремы 1 и теоремы 4.1 из [1] (после замены переменной $t = \ln x$).

Следующий пример показывает, что для теоремы 3 условие (3) является точным. Рассмотрим скалярное уравнение

$$(14) \qquad y'(t) = \alpha(t)\, y(t-\tau)\,, \quad \tau > 0\,,$$

где

$$\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t-\tau}\,, & -\infty < t \leqq 0\,, \\ \varphi(t)\,, & 0 < t < \infty\,. \end{cases}$$

Здесь $\varphi(t)$ непрерывна на $(0, \infty)$ и $\lim\limits_{t \to +0} \varphi(t) = -1/\tau$. В уравнении (14) в терминах (2) $A = 0$, а $\alpha(t)$ удовлетворяет условию вида (3) лишь при $\varepsilon = 0$. Уравнение (14) имеет решение $y_*(t)$ такое, что на полуоси $-\infty < t \leqq 0$ $y_*(t) = t$. Это решение не принадлежит классу (13), хотя $e^{t/2}\, y_*(t) \in L_2(-\infty, d]$.

В следующих параграфах указываются некоторые приложения и обобщения результатов этого параграфа.

2. СКАЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ n-ГО ПОРЯДКА

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с одним запаздыванием $\tau > 0$

$$(1) \qquad y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(b_k(t)\, y^{(k)}(t) + a_k(t)\, y^{(k)}(t-\tau)\right).$$

Стандартный переход от уравнения (1) приводит к системе вида

$$(2) \qquad Y'(t) = A(t)\, Y(t-\tau) + B(t)\, Y(t)\,.$$

Известны преобразования, приводящие систему вида (2) к двучленной системе вида (1.1) (при ссылках на формулы из другого параграфа будем пользоваться двойной нумерацией). Однако при такого рода преобразованиях существенно меняется структура матрицы и результаты, полученные в предыдущем параграфе, оказываются применимыми лишь при очень специальных предположениях для коэффициентов уравнения (1).

С другой стороны, лдя одного специального класса скалярных уравнений n-го порядка с кратными запаздываниями

$$(3) \qquad y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, y^{(k)}(t - (n-k)\,\tau)$$

эти результаты могут быть использованы и в предположениях, эквивалентных (1.2), (1.3) (при $a_k(t) \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, уравнение (3) принадлежит классу (1)).

Используя идею принадлежащего А. М. Зверкину метода „уравнивания запаздывания", положим

$$x_1(t) = y(t)\,, \qquad (4)$$
$$x_1'(t) = x_2(t - \tau) = y'(t)\,,$$
$$x_2'(t) = x_3(t - \tau) = y''(t + \tau)\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n-1}'(t) = x_n(t - \tau) = y^{(n-1)}(t + (n - 2)\,\tau)\,.$$

Тогда в силу (3)

$$x_n'(t) = y^{(n)}(t + (n - 1)\,\tau) = \qquad (5)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t + (n - 1)\,\tau)\, y^{(k)}(t + (k - 1)\,\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t + (n - 1)\,\tau)\, x_{k+1}(t - \tau)$$

и в силу (4), (5) уравнение (3) эквивалентно системе

$$X'(t) = A(t)\, X(t - \tau) \qquad (6)$$

вида (1.1) с матрицей $A(t)$, удовлетворяющей условиям (1.2), (1.3), если

$$a_k(t) = a_k + \alpha_k(t)\,, \quad a_k = \text{const}\,, \qquad (7)$$

$\alpha_k(t)$ непрерывны на $(-\infty, \infty)$ и существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\alpha_k(t) = O(\mathrm{e}^{\varepsilon t}) \quad \text{при} \quad t \to -\infty\,, \qquad (8)$$

$k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Если в (3) $a_k(t) \equiv 0$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$ — двучленное уравнение

$$y^{(n)}(t) = a_0(t)\, y(t - n\tau)\,, \qquad (9)$$

и

$$a_0(t) = a + \alpha_0(t)\,, \qquad (7')$$

где $a \neq 0$, $\alpha_0(t)$ удовлетворяет условию (8), то матрица $A(t)$ представима в виде

$$A(t) = A + \alpha(t)\,, \qquad (1.2')$$

где $\alpha(t)$ удовлетворяет условию (1.3), а собственные значения постоянной матрицы A имеют вид

$$s_j = \begin{cases} (\sqrt[n]{a})\left(\cos\dfrac{2j\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2j\pi}{n}\right), & \text{если} \quad a > 0\,, \\ (\sqrt[n]{|a|})\left(\cos\dfrac{(2j+1)\,\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{(2j+1)\,\pi}{n}\right), & \text{если} \quad a < 0\,, \end{cases} \qquad (10)$$
$$j = 0, 1, \dots, n - 1\,.$$

Из (10) следует, что все собственные значения матрицы A простые и соотвествующие им характеристические уравнения (1.6) имеют только простые корни. Поэтому решения (1.12) системы (6) имеют вид

$$X_{jr}(t) = e^{\omega_r t}\left(V_{jr} + \int_{-\infty}^{t} u_{jr}(\xi)\,d\xi\right), \tag{11}$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1; \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где постоянные векторы $V_{jr} \neq 0$, $u_{jr}(t)$ – вектор функции с компонентами из $L(-\infty, d]$. Соответственно для двусторонних решений скалярного уравнения (9) получим

$$y_{jr}(t) = e^{\omega_r t}\left(1 + \int_{-\infty}^{t} v_{jr}(\xi)\,d\xi\right), \quad v_{jr}(t) \in L(-\infty, d],$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1; \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Если в (7′) $a = 0$, то матрица A имеет n-кратное собственное значение $s = 0$. В соответствии с теоремой 2 система (6) имеет точно n линейно независимых решений вида (1.12)

$$X_j(t) = P_j(t) + \int_{-\infty}^{t} u_j(\xi)\,d\xi, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $P_j(t)$ — вектор функции с полиномиальными компонентами степени не выше j, $u_j(t)$ – вектор функции с компонентами из $L(-\infty, d]$, а скалярное уравнение (9) – n двусторонних решений

$$y_j(t) = t^j + \int_{-\infty}^{t} v_j(\xi)\,d\xi, \quad v_j(t) \in L(-\infty, d], \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

3. СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Как отмечено А. М. Зверкиным [2], с помощью замены переменных системы с переменным запаздыванием в ряде случаев могут быть приведены к системам с постоянным запаздыванием.

Заметим прежде всего, что условия, при которых изучалась система (1.1), имели асимптотический характер при $t \to -\infty$. Это естественно, так как решение, построенное на $(-\infty, d]$ для любого d, при естественных предположениях всегда продолжимо на $[d, \infty)$. Поэтому преобразование запаздывания будем рассматривать лишь на участке $(-\infty, -T)$, где $T > 0$ достаточно велико.

Рассмотрим систему

$$X'(x) = B(x)\,X(\varphi(x)), \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

где $n \times n$ матрица $B(x)$ представима в виде

$$B(x) = B + \beta(x). \tag{2}$$

Здесь B – постоянная матрица, а элементы $\beta_{ik}(x)$ матрицы $\beta(x)$ непрерывны на $(-\infty, \infty)$ и существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$(3) \qquad \|\beta(x)\| = O(e^{\varepsilon x}) \quad \text{при} \quad x \to -\infty .$$

Функция запаздывания $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $(-\infty, -T)$, монотонно возрастает, $\varphi(x) < x$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$. Как показано в [2], при этих условиях существует преобразование

$$(4) \qquad x = \theta(t) \quad (-\infty < t < d),$$

где $\theta(t)$ непрерывно дифференцируема на $(-\infty, d)$ и монотонно возрастает, приводящее систему (1) к виду

$$(5) \qquad Y'(t) = \theta'(t)\, A(t)\, Y(t - \tau), \quad -\infty < t < d,$$

где матрица $A(t)$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3). Функция $\theta(t)$ является решением функционального уравнения

$$(6) \qquad \varphi(\theta(t)) = \theta(t - \tau).$$

Для того чтобы и матрица $\theta'(t)\, A(t)$ удовлетворяла условиям (1.2), (1.3) необходимо и достаточно, чтобы при $t \to -\infty$

$$(7) \qquad \theta'(t) = a + O(e^{\gamma t}), \quad \gamma > 0.$$

Пусть в (1) функция запаздывания $\varphi(x) = x - \Delta(x)$ такова, что для нее преобразование (4) обладает свойством (7). Тогда $a > 0$ и

$$(8) \qquad x = \theta(t) = at + b + O(e^{\gamma t}) \quad \text{при} \quad t \to -\infty$$

и в силу (6) запаздывание $\Delta(x)$ в (1) представимо в виде

$$(9) \qquad \Delta(x) = a\tau + O(e^{\gamma t}) \quad \text{при} \quad t \to -\infty .$$

С другой стороны, в силу (8) при $t \to -\infty$

$$t = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} + O(e^{\gamma t})$$

и, следовательно,

$$(10) \qquad e^{\gamma t} = e^{(\gamma/a)x} \cdot e^{\gamma(-(b/a) + O(e^{\gamma t}))} .$$

В рассматриваемом случае в соответствии с (4) при $t \to -\infty$, $x \to -\infty$ и наоборот при $x \to -\infty$, $t \to -\infty$. Поэтому из (9) в силу (7) и (10) получим

$$(11) \qquad \Delta(x) = a\tau + O(e^{(\gamma/a)x}) \quad \text{при} \quad x \to -\infty .$$

Таким образом, для того чтобы результаты 1 обобщались на систему (1) с переменным запаздыванием по указанной выше схеме, необходимо, чтобы для запаздывания $\Delta(x)$ имело место представление (11).

Обратное утверждение удается доказать лишь при более тяжелых ограничениях.

Пусть в системе (1) функция запаздывания $\varphi(x)$ представима в виде

$$\varphi(x) = x - \Delta + \Psi(x)\,, \tag{12}$$

где $\Psi(x)$ непрерывно дифференцируема на $(-\infty, \tilde{T}]$ ($-\tilde{T} > 0$ достаточно велико) и при $x \to -\infty$

$$\Psi(x) \to 0\,, \quad \Psi'(x) = O(e^{2x})\,. \tag{13}$$

В силу (13) и

$$\Psi(x) = O(e^{2x}) \quad \text{при} \quad x \to -\infty\,. \tag{14}$$

Замена переменной $x = \ln t$ при обозначениях

$$X(x) = X(\ln t) = Y(t)\,,$$

$$\beta(x) = \beta(\ln t) = \beta_0(t)\,,$$

$$x - \Delta + \Psi(x) = \ln t + \ln \lambda + \ln(1 + t\,\delta(t)) \tag{15}$$

приведет систему (1) к виду

$$t\,Y'(t) = (B + \beta_0(t))\,Y(\lambda t + \lambda t^2\,\delta(t))\,, \quad 0 < t < d\,, \tag{16}$$

где B – постоянная $n \times n$ матрица, а

$$\|\beta_0(t)\| = O(t^\nu)\,, \quad \nu > 0\,, \quad t \to +0\,. \tag{17}$$

Требуется доказать существование преобразования $t = \theta(z)$, $\theta(z) \in C^1(0, \tilde{d})$, отображающего отрезок $[0, d]$ в $[0, \tilde{d}]$ и приводящего систему (16) к виду

$$z\,Z'(z) = (B_1 + \beta_1(z))\,Z(\lambda z)\,, \quad 0 < z < \tilde{d}\,, \tag{18}$$

где B_1 П постоянная $n \times n$ матрица, а

$$\|\beta_1(z)\| = O(z^\mu)\,, \quad \mu > 0\,, \quad z \to +0\,. \tag{17'}$$

Тогда теоремы 2 и 3 из 1 обобщаются на систему (1), где функция запаздывания $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (12), (13).

Рассмотрим функцию $\delta(t)$ в (15). При $t \to +0$ в силу (15) и (14)

$$t\,\delta(t) = e^{\Psi(\ln t)} - 1 = e^{O(e^{2\ln t})} - 1 = O(t^2)\,,$$

$$\delta'(t) = \frac{1}{t^2}\left[e^{\Psi(\ln t)}\Psi'(\ln t) - e^{\Psi(\ln t)} + 1\right] = O(1)\,.$$

Отсюда следует существование $K > 0$ такого, что

$$|\delta'(t)| \leqq K\,, \quad 0 \leqq t \leqq d\,, \tag{19}$$

и, следовательно, для любых $t_1, t_2 \in [0, d]$

$$|\delta(t_2) - \delta(t_1)| \leqq K|t_2 - t_1|\,. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь преобразование $t = \theta(z)$, приводящее функцию запаздывания в (16) к виду λz. Аналогично (6) в силу (16) получим

$$\lambda\,\theta(z) + \lambda\,\theta^2(z)\,\delta(\theta(z)) = \theta(\lambda z)\,. \tag{21}$$

Решение уравнения (21) будем искать в виде

$$\theta(z) = \lambda z + z^2\,\gamma(z)\,. \tag{22}$$

При этом система (18) будет иметь вид

$$z\,Z'(z) = (1 + z\,\Gamma(z))\,(B + \beta_0(\theta(z)))\,Z(\lambda z)\,,$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{\gamma(z) + z\,\gamma'(z)}{\lambda + z\,\gamma(z)}\,. \tag{23}$$

Таким образом в (18)

$$B_1 = B\,, \quad \beta_1(z) = (1 + z\,\Gamma(z))\,\beta_0(\theta(z)) + z\,\Gamma(z)\,B$$

и, следовательно, для выполнения (17') достаточно

$$z\,\Gamma(z) = O(z^\mu)\,, \quad \mu > 0\,, \quad z \to +0\,. \tag{24}$$

Существенно, что все последующие построения мы можем проводить для достаточно малого $\tilde{d} > 0$, так как решения систем вида (18), построенные на сколь угодно малой полуокресности нуля, могут быть продолжены вправо.

Из (21) и (22) для отыскания $\gamma(z)$ получим уравнение

$$\gamma(z) = \lambda\,\gamma(\lambda z) - (\lambda + z\,\gamma(z))^2\,\delta(\lambda z + z^2\,\gamma(z))\,. \tag{25}$$

Для доказательства существования решения уравнения (25) воспользуемся принципом Шаудера.

Пусть G множество всех функций, равномерно ограниченных на отрезке $[0, \tilde{d}]$ константой M и удовлетворяющих условию Липшица с константой $L = (1/\alpha)\,K$. Очевидно G является замкнутым выпуклым множеством.

Наложим первое условие на выбор $\tilde{d}$:

$$\tilde{d}M < \lambda\,. \tag{$\tilde{\mathrm{d}}_1$}$$

Оценка для $\alpha > 0$ будет получаена ниже.

Определим на G оператор

$$Ay = \lambda\,y(\lambda z) - (\lambda + z\,y(z))^2\,\delta(\lambda z + z^2\,y(z))\,.$$

В силу (19) и ($\tilde{\mathrm{d}}_1$)

$$|Ay| \leqq \lambda M + (\lambda + \tilde{d}M)^2\,K\tilde{d}(\lambda + \tilde{d}M) < \lambda M + 8\lambda^3 K\tilde{d} \leqq M\,,$$

если $\tilde{d}$ удовлетворяет условию

$$\tilde{d}M < \min\left\{\lambda, \frac{(1 - \lambda)\,M^2}{8\lambda^3 K}\right\}. \tag{$\tilde{\mathrm{d}}_2$}$$

С другой стороны, пусть $z_1, z_2 \in [0, \tilde{d}]$. Тогда для любой $y(z) \in G$ в силу (19) и $(\tilde{\mathrm{d}}_2)$

$$|A\, y(z_1) - A\, y(z_2)| \leqq |y(\lambda z_1) - y(\lambda z_2)| + |(\lambda + z_1\, y(z_1))^2\, (\delta(\lambda z_1 + z_1^2\, y(z_1)) -$$
$$- \delta(\lambda z_2 + z_2^2\, y(z_2)))| + |((\lambda + z_1\, y(z_1))^2 - (\lambda + z_2\, y(z_2))^2)\, \delta(\lambda z_2 + z_2^2\, y(z_2))| \leqq$$
$$\leqq \lambda^2\, L|z_1 - z_2| + (\lambda + \tilde{d}M)^2\, K|\lambda(z_1 - z_2) + (z_1^2\, y(z_1) - z_2^2\, y(z_2))| +$$
$$+ K\tilde{d}(\lambda + \tilde{d}M)\, |(2\lambda + z_1\, y(z_1) + z_2\, y(z_2))\,(z_1\, y(z_1) - z_2\, y(z_2)| \leqq$$
$$\leqq \lambda^2(1 + 12K\tilde{d}^2 + 16\alpha M\tilde{d} + 4\alpha\lambda)\, L|z_1 - z_2|\,.$$

Выберем α и $\tilde{d}$ так, чтобы имело место

$$1 + 4\alpha\lambda + 4\tilde{d}(3K\tilde{d} + 4M\alpha) \leqq 1/\lambda^2$$

или

$$\tilde{d}(3K\tilde{d} + 4M\alpha) \leqq \frac{1 - \lambda^2 - 4\alpha\lambda^3}{4\lambda^2}\,. \tag{26}$$

Правая часть неравенства (26) положительна, если

$$0 < \alpha < \frac{1 - \lambda^2}{4\lambda^3}\,. \tag{27}$$

Пусть α_0 и d_0 удовлетворяют соответственно условиям (27) и $(\tilde{\mathrm{d}}_2)$. Тогда из

$$\tilde{d}M < \min\left\{\lambda, \frac{(1-\lambda)\,M^2}{8\lambda^3 K}, \frac{(1 - \lambda^2 - 4\alpha_0\lambda^3)\,M}{4\lambda^2(3Kd_0 + 4\alpha_0 M)}\right\} \tag{$\tilde{\mathrm{d}}_3$}$$

последует

$$|A\, y(z_1) - A\, y(z_2)| \leqq L|z_1 - z_2|$$

и, следовательно, при выполнении (27) и $(\tilde{\mathrm{d}}_3)$ $Ay\,(z) \in G$.

Таким образом в полном линейном нормированном пространстве $C(0,\tilde{d})$ непрерывный оператор Ay переводит замкнутое выпуклое множество G в свою компактную часть. Следовательно, рассматриваемое отображение имеет по крайней мере одну неподвижную точку $y = \gamma_0(z)$.

Покажем теперь, что решение $\gamma_0(z)$ уравнения (25) имеет на $[0, \tilde{d}]$ непрерывную производную.

Подставляя $\gamma_0(z)$ в (25), получим тождество

$$\gamma_0(z) = \lambda\, \gamma_0(\lambda z) - (\lambda + z\, \gamma_0(z))^2\, \delta(\lambda z + z^2\, \gamma_0(z))\,,$$

формальное дифференцирование которого приводит к функциональному уравнению

$$T(z)\left[1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,(u^2(z)\,\delta(u(z)))\right] = \lambda^2\, T(\lambda z) - \frac{2}{z}\, u(z)\,\delta(u(z))\,\gamma_0(z) - \frac{u^2(z)}{z^2}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\delta(u(z))\,, \tag{28}$$

где положено $u(z) = \lambda z + z^2\, \gamma_0(z)$, а искомая функция $T(z) = \gamma_0'(z)$.

При очевидных обозначениях запишем уравнение (28) в виде

$$a(z)\,T(z) = \lambda^2\,T(\lambda z) + b(z)\,, \tag{28'}$$

где функции $a(z)$ и $b(z)$ непрерывны на $[0, \tilde{d}]$. В силу (19) и ($\tilde{\mathrm{d}}_3$)

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,(u^2(z)\,\delta(u(z)))\right| \leqq 3K|u(z)|^2 = 3Kz^2|\lambda + z\,\gamma_0(z)|^2 \leqq 12K\lambda^2\tilde{d}^2\,.$$

Таким образом, при выполнениии (27) и

$$\tilde{d}M < \min\left\{\lambda, \frac{(1-\lambda)\,M^2}{8\lambda^3K}, \frac{(1-\lambda^2-4\alpha_0\lambda^3)\,M}{4\lambda^2(3Kd_0+4\alpha_0M)}, \frac{M}{\lambda}\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{12K}}\right\}, \tag{$\tilde{\mathrm{d}}_4$}$$

$$m_0 = \max_{[0,\tilde{d}]}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,(u^2(z)\,\delta(u(z)))\right| < 1 - \lambda^2\,. \tag{29}$$

На множестве $C(0, \tilde{d})$ всех непрерывных на $[0, \tilde{d}]$ функций определим оператор

$$Wy = \frac{\lambda^2}{a(z)}\,y(\lambda z) + \frac{b(z)}{a(z)}\,.$$

В силу (29) из $y(z) \in C(0, \tilde{d})$ следует $W\,y(z) \in C(0, \tilde{d})$. Кроме того, для любых $y_1(z)$, $y_2(z) \in C(0, \tilde{d})$ получим

$$\varrho(W\,y_1(z), W\,y_2(z)) = \max_{[0,\tilde{d}]}|W\,y_1(z) - W\,y_2(z)| =$$

$$= \max_{[0,\tilde{d}]}\left|\frac{\lambda^2}{a(z)}\,(y_1(\lambda z) - y_2(\lambda z))\right| \leqq \frac{\lambda^2}{1-m_0}\max_{[0,\tilde{d}]}|y_1(z) - y_2(z)| =$$

$$= \frac{\lambda^2}{1-m_0}\,\varrho(y_1(z), y_2(z))\,.$$

Но в силу (29) $\lambda^2/1 - m_0 < 1$. Следовательно, уравнение (28) имеет, и притом единственное, решение. Это решение принадлежит $C(0, \tilde{d})$.

Таким образом, производная $\gamma_0'(z)$ существует и непрерывна на $[0, \tilde{d}]$ и, следовательно, $|\gamma_0'(z)| \leqq M_1$. Отсюда в (23) в силу ($\tilde{\mathrm{d}}_4$)

$$|\Gamma(z)| \leqq \frac{M + \tilde{d}M_1}{\lambda - \tilde{d}M} < \infty\,,$$

что обеспечивает (24).

Существование преобразования $t = \theta(z)$, приводящего систему (16) к виду (18), (17') доказано. Теперь остается сделать обратную замену переменной $t = \mathrm{e}^x$.

Литература

[1] *Норкин С. Б.:* Структура решений системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в окрестности особой точки. Práce a štúdie Vysokej školy dopravy a spojov v Žiline, ser. mat.—fyz., 1980 (1981), č. 3, 27—46.

[2] *Зверкин А. М.:* Преобразование запаздывания в дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Унив. дружбы народов им. П. Лумумбы, Москва, том 9, 1975.

Адрес автора: Московский автомобильно-дорожный институт, Москва, СССР.