František Šik

Durch Relationen induzierte Topologien

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 32 (1982), No. 1, 90–98

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101786

Czechoslovak Mathematical Journal, 32 (107) 1982, Praha

DURCH RELATIONEN INDUZIERTE TOPOLOGIEN

FRANTIŠEK ŠIK, Brno

(Eingegangen am 15. Juni 1979)

Zu einer gegebenen Menge von Funktionen $R \subseteq G^M$, die die Punkte von M unterscheidet und die hier im Einvernehmen mit J. Zidani [8] eine Relation genannt wird (Bezeichnung $R \in \mathscr{E}(G^M)$), konstruieren wir eine binäre Relation $\varrho(R) \subseteq \subseteq 2^M \times 2^M$ nach der Vorschrift: $A\, \varrho(R)\, B \equiv (f|_A = g|_A \Rightarrow f|_B = g|_B)$ $(A,\ B \subseteq M$ $f, g \in R)$. Die Relation $\varrho(R)$ ist eine Quasiordnung auf 2^M und definiert also eine Zerlegung $\overline{\varrho(R)}$ auf 2^M. Jeder Block $\mathfrak{A}$ der Zerlegung $\overline{\varrho(R)}$ enthält ein grösstes Element (Bezeichnung $A^{\varrho(R)}$, wenn $A \in \mathfrak{A}$ ist). Die Zuordnung $u_{\varrho(R)}: A \to A^{\varrho(R)}$ definiert eine F-Topologie auf M (die sogenante induzierte Topologie). Es sind zwei Probleme gelöst: (a) Existiert zu jeder F-Topologie u auf M eine Menge G und eine Relation $R \in \mathscr{E}(G^M)$, so dass $u_{\varrho(R)} = u$ gilt? (b) Charakteristische Bedingungen für die binären Relationen $r \subseteq \subseteq 2^M \times 2^M$ bestimmen, so dass eine Menge G und eine Relation $R \in \mathscr{E}(G^M)$ mit $r = \varrho(R)$ existiert. Lösungen werden in 3.11 (Problem (a)) und 3.12 (Problem (b)) gegeben. Die Bedingungen lauten: card $G \geqq \chi_u^t(M) + 1$ für (a) und die Bedingungen 1. bis 4., 1.3, für (b). In 4.1.1 und 4.1.2 wird die Struktur der Menge $\mathfrak{R}(u)$ aller $R \in \in \mathscr{E}(G^M)$ untersucht, die dieselbe Topologie $u = u_{\varrho(R)}$ auf M induzieren. Zuletzt wird eine Bedingung auf R angegeben, die es versichert, dass $u_{\varrho(R)}$ eine FA-Topologie, also die Topologie im Sinne von Bourbaki ist (4.5). Diese Eigenschaft hat z. B. die durch eine repräsentierbare Verbandsgruppe R induzierte Topologie $u_{\varrho(R)}$ (4.6.). In der vorliegenden Arbeit werden Resultate von J. Zidani [8] vertieft, fortgesetzt und in den Bereich der topologischen Untersuchungen überführt.

1.1. Definition. G und M seien nichtleere Mengen. Teilmengen $R \subseteq G^M$ wollen wir Relationen nennen. Wir werden stets folgende Bedingung als erfüllt voraussetzen

$$(1,1) \qquad x \in M \Rightarrow \exists f,\quad g \in R\,,\quad f(x) \neq g(x) \quad (R \text{ unterscheidet Punkte in } M)$$

Die Menge aller der Bedingung (1,1) genügenden Relationen $R \subseteq G^M$ wird mit $\mathscr{E}(G^M)$ bezeichnet.

1.2. Definition. Eine Abbildung $\varrho : \mathscr{E}(G^M) \to 2^{2^M \times 2^M}$ sei wie folgt definiert

$(R \in \mathscr{E}(G^M),\ A, B \in 2^M)$

$$A\ \varrho(R)\ B \equiv \left(f, g \in R,\ f|_A = g|_A \Rightarrow f|_B = g|_B\right).$$

($f|_X$ bedeutet die Restriktion von $f \in G^M$ auf $X \subseteq M$.)
Anders gesagt: Funktionen $f \in R$ lassen sich eindeutig in R von A auf B fortsetzen.

1.3. Hilfssatz. *Für* $R \in \mathscr{E}(G^M)$, $r = \varrho(R)$ *gilt*
1. r *ist transitiv*
2. $M \supseteq A \supseteq B \Rightarrow A\ r\ B$
3. $A, B_\iota \subseteq M,\ A\ r\ B_\iota\ (\iota \in I) \Rightarrow A\ r \bigcup\{B_\iota : \iota \in I\}$
4. $A \subseteq M,\ \emptyset\ r\ A \Rightarrow A = \emptyset$.

Beweis ist trivial.

Es sei bemerkt, dass aus 2. die Reflexivität von r folgt. Die zu 3. symmetrische Aussage folgt unmittelbar aus 1. und 2. Es gilt sogar
3'. $A, B_\iota \subseteq M\ (\iota \in I)$, $B_{\iota_0}\ r\ A$ für ein Index $\iota_0 \in I \Rightarrow \bigcup\{B_\iota : \iota \in I\}\ r\ A$.
In der Tat, $\bigcup B_\iota \supseteq B_{\iota_0}$, so dass $\bigcup B_\iota\ r\ B_{\iota_0}$ nach 2. und $\bigcup B_\iota\ r\ A$ nach 1.

1.4. Definition. Die Menge aller binären Relationen r auf 2^M, die den Bedingungen 1. bis 4., 1.3, genügen, wird mit $\mathbf{A}(M)$ bezeichnet.

1.5. Hilfssatz. *Jedes* $r \in \mathbf{A}(M)$ *ist eine Quasiordnung in* 2^M. *Es sei mit* $\bar{r}$ *die zu* r *zugehörige Zerlegung (Äquivalenzrelation) auf* 2^M *bezeichnet. Jeder Block der Zerlegung* $\bar{r}$ *enthält ein grösstes Element (bzgl. der mengentheoretischen Inklusion).*
Beweis folgt unmittelbar aus 1.3.

1.6. Definition. A^r sei die Bezeichnung für das grösste Element des Blocks in $\bar{r}$, der die Menge $A \subseteq M$ als Element enthält.

1.7. Hilfssatz. *Für* $r \in \mathbf{A}(M)$, $A \subseteq M$ *gilt* $A^{rr} = A^r$.

1.8. Hilfssatz. *Es sei* $r \in \mathbf{A}(M)$, $A, B \subseteq M$. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent*
1. $A\ r\ B$, 2. $A^r \supseteq B$, 3. $A^r \supseteq B^r$, 4. $A^r\ r\ B^r$, 5. $A\ r\ (A \cup B)$, 6. $A\ r\ (A \cup B)\ r\ A$, 7. $A^r\ r\ B$.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: Aus $A\ r\ B$ folgt $A\ r\ (A \cup B)\ r\ A$ (1.3) und aus 1.6 $A\ r\ A^r\ r\ A$, so dass $A^r\ r\ (A \cup B)\ r\ A^r$ (1.3). Daher $A^{rr} = (A \cup B)^r \supseteq A \cup B \supseteq B$. Nun nach 1.7 $A^r = A^{rr}$, also $A^r \supseteq B$.

$2 \Rightarrow 3$: $A^r \supseteq B \Rightarrow A^r\ r\ B$ (1.3) und die schon bewiesene Implikation $1 \Rightarrow 2$ ergibt $A^{rr} \supseteq B^r$, also nach 1.7 $A^r \supseteq B^r$.

$3 \Rightarrow 4$: folgt aus 1.3.

$4 \Rightarrow 5$: $A\ r\ A^r$, $A^r\ r\ B^r$ und $B^r\ r\ B$ ergibt $A\ r\ B$ und daher $A\ r\ (A \cup B)$ (1.3).

$5 \Rightarrow 6$: Aus 3' (1.3).

$6 \Rightarrow 7$: $A\ r\ (A \cup B)\ r\ A \Rightarrow A^r \supseteq A \cup B \supseteq B \Rightarrow A^r\ r\ B$ (1.3).

$7 \Rightarrow 1$: $A\ r\ A^r$, $A^r\ r\ B \Rightarrow A\ r\ B$ (1.3).

Daher bekommen wir Folgerungen.

1.9. Folgerung 1. $A^r = \bigcup\{B \subseteq M: A\ r\ B\} = \bigcup\{B \subseteq M: A\ r\ B\ r\ A\}$.

Beweis. Nach 1.8 enthält A^r beide gegebenen Vereinigungen und da $A\ r\ A^r\ r\ A$ gilt, so ist einer der Summanden B gleich A^r.

1.10. Folgerung 2. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent*
1. $A^r = A$, 2. $A\ r\ B \Rightarrow A \supseteq B$, 3. $A\ r\ B\ r\ A \Rightarrow A \supseteq B$, 4. $x \in M$, $A\ r\ \{x\} \Rightarrow x \in A$.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: $A\ r\ B$, $A^r = A \Rightarrow A = A^r \supseteq B$.

$2 \Rightarrow 3$ und 4: 3 und 4 sind Spezialfälle von 2.

$3 \Rightarrow 1$: Es gilt $A\ r\ A^r\ r\ A$, also $A \supseteq A^r$. $A^r \supseteq A$ ist evident, daher $A^r = A$.

$4 \Rightarrow 1$: $x \in A^r \Rightarrow A^r\ r\ \{x\}$. Zusammen mit $A\ r\ A^r$ bekommen wir $A\ r\ \{x\}$ und nach 4. $x \in A$. Daher $A^r \supseteq A$, also $A^r = A$.

2. Beispiele. 2.1. Die Gleichung $f = a \,.\, m$, die die Beziehung zwischen der Kraft f, Beschleunigung a und Masse m ausdrückt, definiert eine dreigliedrige (3-are) Relation $R \in \mathscr{E}(G^M)$, wobei G die Menge aller reellen Zahlen und M die dreielementige Menge $\{f, a, m\}$ darstellt.

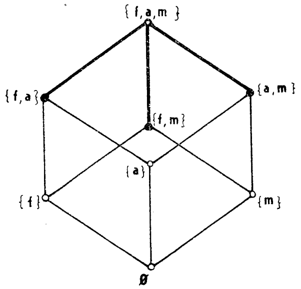

Fig. 1

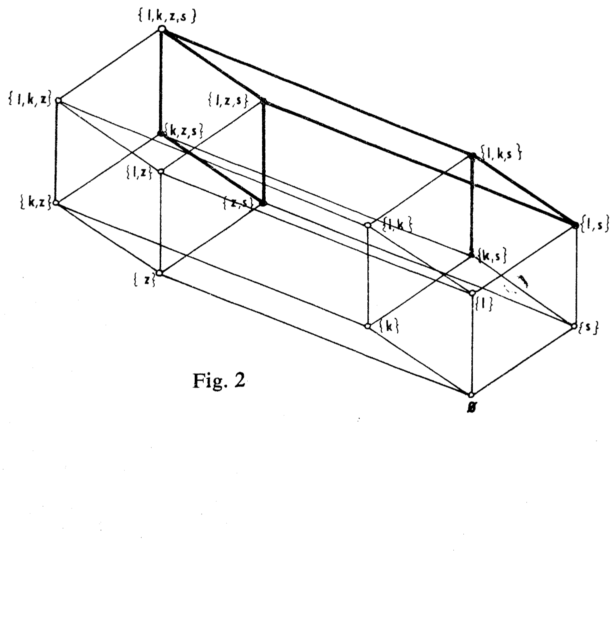

Fig. 2

Die Relation $r = \varrho(R)$ ist durch die Paare $(\{f, a\}, \{m\})$, $(\{f, m\}, \{a\})$, $(\{a, m\}, \{f\}) \in r$ erzeugt. Im Hasseschen Diagramm von 2^M werden die Mengen A^r durch Kreise bezeichnet und die Elemente von 2^M, die zu demselben Block von $\bar{r}$ gehören, durch dicke Linien verbunden (Fig. 1).

2.2. Ein Schulstundenplan stellt eine Beziehung zwischen Lehrern l, Klassen k, Lehrzimmern z und Lehrstunden s dar. Diese Beziehung bestimmt eine Teilmenge R in $G_l \times G_k \times G_z \times G_s$, wobei G_l, G_k, G_z, G_s der Reihe nach die Menge der Lehrer, Klassen, Lehrzimmer und Lehrstunden bedeutet. Es ist also $R \subseteq G^M$ mit $G = G_l \cup G_k \cup G_z \cup G_s$ und $M = \{l, k, z, s\}$. In meisten Fällen kann man $R \in \mathscr{E}(G^M)$ voraussetzen. Erzeugende Paare für $r = \varrho(R)$ sind $\{l, s\}\ r\ \{k, z\}$, $\{k, s\}\ r\ \{l, z\}$, $\{z, s\}\ r\ \{l, k\}$. Es gilt $\{l, s\}\ r\ (\{k, z\} \cup \{l, s\})$ und daher $\{l, s\}\ r\ \{l, k, z, s\}$. Analogisch $\{k, s\}\ r\ \{l, k, z, s\}$ und $\{z, s\}\ r\ \{l, k, z, s\}$. (Eine andere Familie von erzeugenden Paaren für $r = \varrho(R)$ ist z. B. $\{l, s\}\ r\ \{k\}$, $\{k, s\}\ r\ \{z\}$, $\{z, s\}\ r\ \{l\}$. Fig. 2).

Beispiele 2.1 und 2.2 stammen von J. Zidani [8] (siehe 3.6).

2.3. Sei R eine repräsentierbare Verbandsgruppe, die durch eine subdirekte Summe linear geordneter Gruppen G_x $(x \in M)$ repräsentiert ist. Ist $G_x \neq 0$ $(x \in M)$ und $G = \bigcup\{G_x : x \in M\}$, so gilt $R \in \mathscr{E}(G^M)$. Ist z. B. R die direkte Summe von $\{G_x : x \in M\}$, so ist $A = A^{\varrho(R)}$ für jedes $A \subseteq M$.

3. Definition. Eine Abbildung $u\colon 2^M \to 2^M$ heisst eine Topologie ohne Axiome auf der Menge M. Die Menge aller u sei mit $\mathscr{P}(M)$ bezeichnet ([1], [2], [7]). u hiesst eine Topologie, wenn gilt: $u\emptyset = \emptyset$; $A \subseteq M \Rightarrow A \subseteq uA$; $A \subseteq B \subseteq M \Rightarrow uA \subseteq uB$ ([1], [2], [4]). Die Menge aller solchen u auf M sei mit $\mathscr{C}(M)$ bezeichnet. Spezialfälle der Topologien:
eine F-Topologie: $A \subseteq M \Rightarrow uuA = uA$ (Eigenschaft F) ([1], [2] 6.1, [7]),
eine A-Topologie: $A, B \subseteq M \Rightarrow u(A \cup B) = uA \cup uB$ (Eigenschaft A) ([1], [2] 7.1),
eine B-Topologie: $x \in M \Rightarrow u\{x\} = \{x\}$ (Eigenschaft B) ([1], [2] 8.3).

Die Menge aller F-Topologien auf M (Topologien im Sinne von Sierpiński [7]) wird mit $\mathscr{S}(M)$ bezeichnet, aller FA-Topologien mit $\mathscr{B}(M)$ (Topologien im Sinne von Bourbaki) und aller FAB-Topologien mit $\mathscr{K}(M)$ (Topologien im Sinne von Kuratowski [5]).

3.1. In $\mathscr{P}(M)$ wird eine Anordnung wie üblich eingeführt $(u, v \in \mathscr{P}(M))$ $u \leqq v \equiv uA \subseteq vA$, $A \subseteq M$. Es gilt: $\mathscr{P}(M)$ ist eine vollständig distributive vollständige Boolesche Algebra ([6]), $\mathscr{C}(M)$ ist ein abgeschlossener Unterverband von $\mathscr{P}(M)$ ([4] 1.7), $\mathscr{S}(M)$ ein vollständiger Verband und ein abgeschlossener $\bigwedge$-Unterhalbverband von $\mathscr{C}(M)$ und $\mathscr{B}(M)$ ein vollständiger Verband und ein abgeschlossener $\bigvee$-Unterhalbverband von $\mathscr{S}(M)$.

3.2. Satz. *Für $r \in \mathbf{A}(M)$ ist die Abbildung $u_r\colon A \subseteq M \to A^r$ eine F-Topologie auf M (also $u_r \in \mathscr{S}(M)$).*

Beweis. $\emptyset^r = \emptyset$ nach 1.3 und 1.9, die Extensivität $A^r \supseteq A$ ist evident und die

Idempotenz $A^{rr} = A^r$ folgt aus 1.7. Die Monotonie folgt aus 1.8, da aus $A \subseteq B \subseteq M$ die Relationen $BrArA^r$ und daher BrA^r folgt. Dann ist $B^r \supseteq A^r$ (1.8).

3.3. Definition. Mit φ sei die Abbildung $r \to u_r$ $(= r\varphi)$ bezeichnet.

3.4. Satz. *φ ist ein Isomorphismus der Verbände $\mathbf{A}(M)$ und $\mathscr{S}(M)$.*

Beweis. Für $u \in \mathscr{S}(M)$ sei $r \subseteq 2^M \times 2^M$ wie folgt definiert $(A, B \subseteq M)$: $A\ r\ B \equiv \equiv uA \supseteq B$. Es ist klar, dass r die Bedingungen 1. bis 4., Hilfssatz 1.3, erfüllt. Weiterhin ist $uA = A^r$. In der Tat, aus $A\ r\ A^r$ folgt $uA \supseteq A^r$ und aus $uA \supseteq uA$ folgt $A\ r\ uA$ und daher nach 1.8 $A^r \supseteq uA$. Abschliessend $A^r = uA$. φ ist also eine Abbildung „auf". Eineindeutigkeit: Sei $r, s \in \mathbf{A}(M)$, $r\varphi = s\varphi$, $A, B \subseteq M$. Nach dem bewiesenen ist $A^r = (r\varphi)\,A = (s\varphi)\,A = A^s$ und nach 1.8 $A\ r\ B \equiv A^r \supseteq B$, $A\ s\ B \equiv A^s \supseteq B$. Daher $A\ r\ B \equiv A\ s\ B$, d. h. $r = s$. Isotonie: Ist $r, s \in \mathbf{A}(M)$, $r \supseteq s$, $A \subseteq M$, so ist nach 1.9 $u_rA = A^r \supseteq A^s = u_sA$. Ist nun $u, v \in \mathscr{S}(M)$, $u \geqq v$, $r = u\varphi^{-1}$, $s = v\varphi^{-1}$, $A, B \subseteq M$, dann ist nach der Definition φ^{-1}: $A\ s\ B \Rightarrow vA \supseteq B \Rightarrow uA \supseteq B \Rightarrow A\ r\ B$, also $r \supseteq s$.

3.5. Aus 1.8 ergibt sich, dass $A^r = B^r \equiv A\ r\ B\ r\ A$. Also ist $u_rA = u_rB$ genau dann, wenn A und B zu demselben Block der Zerlegung $\bar{r}$ gehören. Die Abschliessung u_rA ist dann das grösste Element des Blocks, A^r (siehe Beispiele 2.1 und 2.2).

3.6. Ähnliche Begriffe und Untersuchungen hat auch J. Zidani [8] gemacht. Zidani untersuchte n-are Relationen $R \subseteq \bigcup \{G_x: x \in M\}$ mit endlichem $M = = \{1, 2, \ldots, n\}$, definierte die binäre Relation $\varrho(R)$ und aus R resultierende Abbildung $u_{\varrho(R)}$: $2^M \to 2^M$. Da er Erfüllung der Bedingung (1, 1) für die Relation R nicht verlangte, bekam er als $u_{\varrho(R)}$ nur Hüllenoperatoren im Verband 2^M. Erst die Zufügung der Forderung (1, 1) wechselt die Hüllenoperatoren in Topologien um. So werden die Untersuchungen in den wohlbekannten topologischen Bereich überführt. Es ist evident, dass die Bedingung (1, 1) unwesentlich ist, wenn wir nur eine Relation untersuchen. In der Tat, im Fall $f(x) = g(x)$ für alle $f, g \in R$ und ein $x \in M$ kann der Punkt x von der Menge M entfernt werden. Wenn wir aber Beziehungen mehrerer Relationen studieren wollen, die Rolle von (1, 1) wird schon wesentlich.

3.7. Definition. Für $f, g \in G^M$ definieren wir $Z(f, g) = \{x \in M: f(x) = g(x)\}$.

3.8. Satz. *Es sei $R \in \mathscr{E}(G^M)$. Die Menge $\{Z(f, g): f, g \in R\}$ ist eine Basis der abgeschlossenen Mengen in der Topologie $u_{\varrho(R)}$.*

Beweis. Die Menge $\{Z(f, g): f, g \in R\}$ is eine Basis der abgeschlossenen Mengen in einer F-Topologie, wenn gilt: $x \in M \Rightarrow$ es existieren $f, g \in R$, so dass $x \bar{\in} Z(f, g)$. (Dies ist die duale Bedingung zu ($\mathrm{I^b}$) [2], S. 448). Die Bedingung ist aber evident erfüllt wegen (1, 1).

Weiterhin beweisen wir, dass die Familie aller abgeschlossenen Mengen in der durch die Basis $\{Z(f, g): f, g \in R\}$ eindeutig bestimmten F-Topologie gleich der

Menge $\{A^{\varrho(R)}: A \subseteq M\}$ ist. Sei $A = \bigcap\{Z(f, g): (f, g) \in I\}$, wobei I eine Menge der Paare $f, g \in R$ ist. Es sei $y \in M$, $A\, \varrho\, (R) \{y\}$ und $(f, g) \in I$. Da $Z(f, g) \supseteq A$, so ist $f|_A = g|_A$ und daher $f(y) = g(y)$. Daraus sich ergibt $y \in Z(f, g)$, d. h. $y \in A$. Nach 1.10 gilt also $A = A^{\varrho(R)}$.

Umgekehrt sei $A^{\varrho(R)} = A$ für ein $A \subseteq M$. Es sei mit I die Menge aller Paare von Elementen $f, g \in R$ bezeichnet, für die die Relation $f|_A = g|_A$ erfüllt ist. Dann gilt $B = \bigcap\{Z(f, g): (f, g) \in I\} \supseteq A$. Jetzt sei $y \,\bar{\in}\, A$. Also gilt die Beziehung $A\, \varrho(R) \{y\}$ nicht und daher gibt es $h, k \in R$, so dass $h|_A = k|_A$ und $h(y) \neq k(y)$. Daraus folgt $(h, k) \in I$, $y \,\bar{\in}\, Z(h, k)$ und so ist $y \,\bar{\in}\, B$.

3.9. Nun kommen zwei Probleme vor:

(a) Existiert zu jedem $u \in \mathscr{S}(M)$ eine Menge G und eine Relation $R \in \mathscr{E}(G^M)$, so dass $u_{\varrho(R)} = u$ gilt?

(b) Charakteristische Bedingungen für die binären Relationen $r \subseteq 2^M \times 2^M$ bestimmen, so dass eine Menge G und eine Relation $R \in \mathscr{E}(G^M)$ mit $r = \varrho(R)$ existiert.

3.10. Zu diesem Ziel definieren wir vorerst:

Definition. Es sei $u \in \mathscr{S}(M)$. Das Totale Charakter $\chi_u^t(M)$ der Topologie u auf M ist das Infimum von den Mächtigkeiten der Basen der abgeschlossenen Mengen bzgl. u [2] S. 449.

3.11. Lösung des Problems (a).

Satz. *Es sei $u \in \mathscr{S}(M)$. Ist G eine Menge mit* card $G \geqq \chi_u^t(M) + 1$, *so existiert eine Relation $R \in \mathscr{E}(G^M)$, so dass $u = u_{\varrho(R)}$,* card $R = \chi_u^t(M) + 1$.

B e w e i s. Nach [2] 6.4.4 existiert eine Basis der abgeschlossenen Mengen der Mächtigkeit $\chi_u^t(M)$. Zu dieser Basis wird M als Element zugefügt. Die so entstandene Menge sei mit $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{n}\}$ bezeichnet, wobei $\mathfrak{n}$ die Anfangszahl der Mächtigkeit $\chi_u^t(M) + 1$ bedeutet. Sei $A_0 = M$. G sei in eine transfinite Folge v_α, $\alpha < \mathfrak{m}$ geordnet. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$. Für $\alpha < \mathfrak{n}$ sei definiert: $f^\alpha(x) = v_\alpha$, wenn $x \in M \setminus A_\alpha$ und $f^\alpha(x) = v_0$, wenn $x \in A_\alpha$. Dann ist $Z(f^\alpha, f^0) = A_\alpha$ und ist $\beta \neq \alpha$, $\alpha, \beta < \mathfrak{n}$, so folgt $Z(f^\alpha, f^\beta) = A_\alpha \cap A_\beta$, so dass die Menge $\{Z(f^\alpha, f^\beta): \alpha, \beta < \mathfrak{n}\}$ eine Basis der abgeschlossenen Mengen in der Topologie u ist. Also ist $R = \{f^\alpha: \alpha < \mathfrak{n}\}$ eine Relation, für die $u_{\varrho(R)} = u$ und card $R = \chi_u^t(M) + 1$ gilt (3.8). Es ist klar, dass $R \in$ $\in \mathscr{E}(G^M)$ erfüllt ist, da nach [2] S. 448, zu jedem $x \in M$ Funktionen $f^\alpha, f^\beta \in R$ existieren, so dass $x \,\bar{\in}\, Z(f^\alpha, f^\beta)$ gilt.

3.12. Lösung des Problems (b).

Satz. *Es sei $r \subseteq 2^M \times 2^M$. Dann und nur dann existiert eine Menge G und eine Relation $R \in \mathscr{E}(G^M)$ mit $r = \varrho(R)$, wenn $r \in \mathbf{A}(M)$.*

Beweis. Ist $r = \varrho(R)$, $R \in \mathscr{E}(G^M)$, so ist $r \in \mathbf{A}(M)$ nach 1.3.

Umgekehrt sei $r \in \mathbf{A}(M)$. Nach 3.2 ist u_r eine F-Topologie auf M. Nach 3.11 existiert eine Menge G und eine Relation $R \in \mathscr{E}(G^M)$, so dass $u_r = u_{\varrho(R)}$. Daher $r\varphi = u_r = u_{\varrho(R)} = \varrho(R)\,\varphi$, also $r\varphi = \varrho(R)\,\varphi$. Da nun nach 3.4 die Abbildung schlicht ist, so gilt $r = \varrho(R)$.

4. Wasfüreine Struktur hat die Menge $\mathfrak{R}(u)$ aller $R \in \mathscr{E}(G^M)$, die dieselbe Topologie $u = u_{\varrho(R)}$ auf M induzieren? Darüber sprechen die folgenden Sätze 4.1.1 und 4.1.2.

Es sei $u \in \mathscr{S}(M)$ und G eine nichtleere Menge. Mit $\mathfrak{R}(u)$ sei das System aller $R \in \mathscr{E}(G^M)$ mit $u = u_{\varrho(R)}$ bezeichnet. Ferner sei $\mathfrak{M}(u)$ das System aller maximalen Elemente von $\mathfrak{R}(u)$ (bezüglich der mengentheoretischen Inklusion). Ist $\mathfrak{R}(u) \neq \emptyset$, bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}$ das Minimum der Mächtigkeiten der Elemente aus $\mathfrak{R}(u)$ und mit $\mathfrak{N}(u)$ die Menge $\{R \in \mathfrak{R}(u)\colon \operatorname{card} R = \mathfrak{m}\}$.

Aus Satz 3.10 folgt unmittelbar:

4.1.1. Satz. *Wenn* card $G \geqq \chi^t_u(M) + 1$ *ist, dann gilt* $\mathfrak{R}(u) \neq \emptyset$ *und* $\mathfrak{m} \leqq \chi^t_u(M) + 1$.

Die Struktur des Systems $\mathfrak{R}(u)$ ist durch den folgenden Satz beschrieben:

4.1.2. Satz. *Es sei* $\mathfrak{R}(u) \neq \emptyset$. *Dann gilt*:

1. $\mathfrak{M}(u) \neq \emptyset$. *Zu jedem* $R \in \mathfrak{R}(u)$ *gibt es* $S \in \mathfrak{M}(u)$ *mit* $S \supseteq R$.

2. a) *Wenn* $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$, *dann ist* $\mathfrak{m} = \chi^t_u(M)$ *und zu jedem* $R \in \mathfrak{R}(u)$ *gibt es* $T \in \mathfrak{N}(u)$ *mit* $T \subseteq R$.

b) *Wenn* $\mathfrak{m} < \aleph_0$, *dann gilt*

α) $\chi^t_u(M) < \aleph_0$,

β) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 + 8\,\chi^t_u(M))}) \leqq \mathfrak{m} \leqq 2\,\chi^t_u(M)$,

γ) $R \in \mathfrak{R}(u) \Rightarrow \exists T \in \mathfrak{N}(u),\ T \subseteq R,\ \mathfrak{m} \leqq \operatorname{card} T \leqq 2\,\chi^t_u(M)$.

Beweis. 1) $\mathfrak{F}$ sei das System aller abgeschlossenen Mengen in der Topologie u. Es sei G^M in eine transfinite Folge $\{f_\beta\colon \beta < \eta\}$ geordnet, eine Relation $R \in \mathfrak{R}(u)$ ausgewählt und $S_0 = R$ bezeichnet. Sei β eine Ordnungszahl, $0 < \beta < \eta$. Es sei vorausgesetzt, dass Mengen $S_\alpha \in \mathscr{E}(G^M)$ für $0 < \alpha < \beta$ konstruiert sind mit der folgenden Eigenschaft: $Z(f, g) \in \mathfrak{F}$ für alle $f, g \in S_\alpha$. Ist $Z(f_\beta, f) \in \mathfrak{F}$ für jedes $f \in \bigcup_{\alpha<\beta} S_\alpha$, definieren wir $S_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} S_\alpha \cup \{f_\beta\}$ und $S_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} S_\alpha$ im umgekehrten Fall. Also ist $S_\alpha \subseteq S_\beta$ für $\alpha \leqq \beta < \eta$ und $Z(f, g) \in \mathfrak{F}$ für $f, g \in S_\beta$, $0 \leqq \beta < \eta$. Es sei $S = \bigcup_{\alpha<\eta} S_\alpha$ bezeichnet. Evident ist $S \supseteq R$. Wir wollen $S \in \mathfrak{M}(u)$ beweisen. Es gilt $f, g \in S \Rightarrow Z(f, g) \in \mathfrak{F}$. In der Tat, α bzw. β sei eine Ordnungszahl mit $f \in S_\alpha$ bzw. $g \in S_\beta$ und es sei $\alpha \leqq \beta$. Dann ist $f, g \in S_\beta$ und daher $Z(f, g) \in \mathfrak{F}$. So ist $u_{\varrho(S)} \geqq u_{\varrho(R)} = u$ bewiesen. Andererseits gilt $R \subseteq S \Rightarrow u = u_{\varrho(R)} \geqq u_{\varrho(S)}$, also $S \in \mathfrak{R}(u)$. Darüber gilt $S \in \mathfrak{M}(u)$, da aus $g \in \mathscr{E}(G^M)$, $Z(f, g) \in \mathfrak{F}$ für jedes $f \in S$ die Beziehung $g = f_\beta$ für ein Index $\beta < \eta$ folgt und daher $g \in S_\beta \subseteq S$.

2. Es sei $R \in \mathfrak{R}(u)$. Nach [2] 6.4.4, zu der Basis $\mathfrak{B} = \{Z(f, g)\colon f, g \in R\}$ der ab-

geschlossenen Mengen in der Topologie $u_{\varrho(R)} = u$ existiert eine Basis $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ mit card $\mathfrak{C} = \chi^t_u(M)$. Zu jedem $A \in \mathfrak{C}$ sei genau ein Funktionenpaar $f, g \in R$ mit $Z(f, g) = A$ ausgewählt und die Menge aller ausgewählten Funktionen f, g mit T bezeichnet. Evident gilt $T \in \mathfrak{R}(u)$, $T \subseteq R$ und

$$\text{card } T \leqq 2\, \chi^t_u(M)\,. \tag{1}$$

b) Ist $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$, dann aus (1) (und aus card $T \geqq \chi^t_u(M)$) geht card $T = \chi^t_u(M)$ hervor. Daher $T \in \mathfrak{R}(u)$, $T \subseteq R$ und $\mathfrak{m} = \chi^t_u(M)$. So ist der Fall $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$ erledigt.

c) Es sei $\mathfrak{m} < \aleph_0$ und $X \in \mathfrak{R}(u)$. Dann ist

$$\aleph_0 > \binom{\mathfrak{m}}{2} \geqq \text{card } \{Z(f, g) : f, g \in X\} \geqq \chi^t_u(M),$$

also

$$\aleph_0 > \binom{\mathfrak{m}}{2} \geqq \chi^t_u(M)$$

und daher $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 + 8\, \chi^t_u(M))}) \leqq \mathfrak{m}$. Wenn wir die evidenten Relationen

$$\mathfrak{m} = \text{card } X \leqq \text{card } T \leqq 2\, \chi^t_u(M)$$

erwägen, bekommen wir

$$\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 + 8\, \chi^t_u(M))}) \leqq \mathfrak{m} \leqq \text{card } T \leqq 2\, \chi^t_u(M)\,.$$

4.2. Bemerkung. Die Fälle für $\mathfrak{m}$ unendlich oder endlich zu sein unterscheiden sich wesentlich. Im Fall $\mathfrak{m} < \aleph_0$ ist es möglich ein $R \in \mathfrak{R}(u)$ zu finden, so dass jedes $V \in \mathfrak{R}(u)$ mit $V \subseteq R$ die Beziehungen $\mathfrak{m} < \text{card } V = 2\, \chi^t_u(M)$ erfüllt. Beispiel:

Es sei $M \neq \emptyset$ eine endliche Menge, card $M = w > 1$, u die feinste Topologie auf M (d. h. jede Teilmenge in M ist abgeschlossen in u), G eine Menge mit card $G \geqq 2w$. Für $S = G^M$ gilt ersichtlich $S \in \mathfrak{R}(u)$. Die Topologie u hat für ihre (kleinste) Basis der abgeschlossenen Mengen die Menge aller dualen Atome in 2^M. Es seien die Elemente von G mit $0, 1, \ldots, n - 1$ $(n \geqq 2w)$ bezeichnet und $f_i \in G^M$ folgendermassen definiert:

$$f_0 = (0, \ldots, 0)\,, \quad f_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \quad \text{(die } i\text{-te Komponente ist gleich 1)}$$

für $i = 0, 1, \ldots, w$. Ersichtlich gilt $X = \{f_k : k = 0, 1, \ldots, w\} \in \mathfrak{R}(u)$, also $\mathfrak{m} \leqq w + 1$ und $\{Z(f_0, f_k) : k = 1, 2, \ldots, w\}$ ist die vorhergenannte kleinste Basis für u, also $\chi^t_u(M) = w$. Das Element $g_{ij} \in G^M$ für $i = 1, 2, \ldots, w$; $j = 0, 1$, besitzt alle Komponenten ausser der i-ten gleich $2(i - 1)$, die i-te gleich $2(i - 1) + j$. Dann ist $R = \{g_{ij} : i = 1, 2, \ldots, w;\ j = 0, 1\} \in \mathfrak{R}(u)$ und für jedes $V \in \mathfrak{R}(u)$ mit $V \subseteq R$ gilt $V = R$, also card $V = 2w = 2\, \chi^t_u(M)$. Abschliessend resultiert $\mathfrak{m} \leqq w + 1 < 2w = \text{card } V = 2\, \chi^t_u(M)$.

4.3. Definition. V sei eine topologische Eigenschaft und $u \in \mathscr{C}(M)$. Eine Topologie u_V auf M heisst die untere V-Modifikation von u, wenn sie die grösste aller Topologien auf M ist, die die Eigenschaft V besitzen und kleiner als u sind. (Dual wird die obere V-Modifikation definiert.)

4.4. Satz. *Die untere A-Modifikation u_A einer F-Topologie u ist eine FA-Topologie (also $u_A \in \mathscr{B}(M)$),* [3], S. 281.

4.5. Satz. *Für $r \in \mathbf{A}(M)$ gilt: $u_r \in \mathscr{B}(M) \Leftrightarrow$*

(4) $A\ r\ B \equiv B \subseteq \bigcap S_\alpha$, wobei S_α alle endliche Vereinigungen der Mengen $C^r (C \subseteq M)$ mit $S_\alpha \supseteq A$ durchläuft.

Beweis. Nach 4.4 ist $u_A \in \mathscr{B}(M)$ für jedes $u \in \mathscr{S}(M)$. Das System aller endlichen Vereinigungen der in der Topologie u abgeschlossenen Mengen ist eine Basis der abgeschlossenen Mengen in der Topologie u_A [3] S. 279.

Es sei $u \in \mathscr{B}(M)$ und $r = u\varphi^{-1}$ (φ siehe 3.3). Es gilt $u_A = u$, also $uA = \bigcap S_\alpha$, wobei S_α alle endliche Vereinigungen der in der Topologie u abgeschlossenen Mengen mit $S_\alpha \supseteq A$ durchläuft. Nach 1.8 gilt $A\ r\ B \equiv B \subseteq A^r = \bigcap S_\alpha$, wobei S_α alle endliche Vereinigungen der Mengen C^r $(C \subseteq M)$ mit $S_\alpha \supseteq A$ durchläuft.

Sei (4) für $r \in \mathbf{A}(M)$ erfüllt, $A \subseteq M$. Da $A\ r\ A^r$ gilt, bekommen wir nach (4) $A^r \subseteq \bigcap S_\alpha$ (mit S_α wie in der Bedingung (4)). Nach (4) ist auch $A\ r \bigcap S_\alpha$ (mit denselben S_α als oben), so dass nach 1.8 $\bigcap S_\alpha \subseteq A^r$ gilt. Daher $A^r = \bigcap S_\alpha$, wobei S_α alle endliche Vereinigungen der Mengen C^r $(C \subseteq M)$ mit $S_\alpha \supseteq A$ durchläuft. Es gilt $C^r = u_r C$. Wählen wir A als die Vereinigung einer Familie in der Topologie u_r abgeschlossener Mengen, ist $u_r A = A^r = A$, also ist die F-Topologie u_r eine A-Topologie ([2] 7.1.5) und daher ist u_r eine FA-Topologie, d. h. $u_r \in \mathscr{B}(M)$.

4.6. Satz. *Ist R eine repräsentierbare Verbandsgruppe, die durch eine subdirekte Summe von linear geordneten Gruppen G_x $(G_x \neq 0,\ x \in M)$ repräsentiert ist, so gilt $u_{\varrho(R)} \in \mathscr{B}(M)$.*

Beweis. Es ist $R \in \mathscr{E}(G^M)$, wobei $G = \bigcup\{G_x : x \in M\}$. Es genügt zu beweisen, dass die Basis der abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{F} = \{Z(f, g) : f, g \in R\}$ die Bedingung $Z(f_1, g_1) \cup Z(f_2, g_2) \in \mathfrak{F}$ erfüllt [2] 7.1.5. Es gilt $Z(f, g) = Z(|f - g|, 0)$ und daher $Z(f_1, h_1) \cup Z(f_2, g_2) = Z(|f_1 - g_1| \wedge |f_2 - g_2|, 0) \in \mathfrak{F}$.

Literaturverzeichnis

[1] *E. Čech:* Topologické prostory. Čas. pěst. mat. fys. *66* (1937), D 225—D 264.

[2] Topological papers od Eduard Čech. (28. Topological spaces) Academia Prague 1968.

[3] *K. Koutský, V. Polák* and *M. Sekanina:* On the commutativity of the modifications. Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No 454, ser. A *26* (1964), 275—292.

[4] *K. Koutský* and *M. Sekanina:* On the *R*-modification and several other modifications of a topology. Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No *410* (1960), 45—64.

[5] *C. Kuratowski:* Topologie I. Warszawa, 1948.

[6] *M. Sekanina:* Sistemy topologij na dannom množestve. Czechosl. Math. J. *15 (90)* 1965, 9—29.

[7] *W. Sierpiński:* Introduction to general topology. Toronto 1934.

[8] *J. Zidani:* Structuration de l'ensemble des sous-espaces d'un espace par une relation. Rev. Française Informat. Recherche Opérationelle *4* (1970), sér. R-3, 83—89.

Author's address: 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UJEP).