Walter Wunderlich

Regelflächen festen Dralls mit konstant gedralltem Striktionsband

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 31 (1981), No. 3, 457–468

Czechoslovak Mathematical Journal, 31 (106) 1981, Praha

REGELFLÄCHEN FESTEN DRALLS MIT KONSTANT GEDRALLTEM STRIKTIONSBAND

WALTER WUNDERLICH, Wien

(Eingegangen am 9. Juli 1979)

1. Einleitung. Ein zuerst von G. Sannia [12] entworfenes und später von E. Kruppa [6] in Vektorschreibweise entwickeltes Konzept für eine „natürliche Geometrie" der Regelflächen des dreidimensionalen euklidschen Raumes verwendet ein im Zentralpunkt Z jeder Flächenerzeugenden angebrachtes, orthonormiertes *begleitendes Dreibein*, bestehend aus dem Erzeugendenvektor $\boldsymbol{e}_1$, der Flächennormale $\boldsymbol{e}_2$ und der Zentraltangente $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$. Ist $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(s)$ die vektorielle, auf die Bogenlänge s bezogene Darstellung der von den Zentralpunkten Z erfüllten Striktionslinie oder Kehlkurve k, dann kann die Regelfläche Φ mittels der unabhängigen Parameter s und t beschrieben werden durch

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}(s) + t \, . \, \boldsymbol{e}_1(s) \, . \tag{1.1}$$

Für die Ableitungen der Dreibeinvektoren nach s gelten, entsprechende Differenzierbarkeit vorausgesetzt, die grundlegenden *Ableitungsgleichungen*

$$\boldsymbol{e}_1' = \varkappa \boldsymbol{e}_2 \, , \quad \boldsymbol{e}_2' = -\varkappa \boldsymbol{e}_1 + \tau \boldsymbol{e}_3 \, , \quad \boldsymbol{e}_3' = -\tau \boldsymbol{e}_2 \, . \tag{1.2}$$

Die dabei auftretenden Bewegungsinvarianten $\varkappa = |\boldsymbol{e}_1'|$ und $\tau = \boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3'\boldsymbol{e}_2$ heißen die natürliche *Krümmung* bzw. *Torsion* der Regelfläche Φ. Als dritte Invariante wird noch der *Striktionswinkel* $\sigma = \sphericalangle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{z}'$ herangezogen, den die Erzeugende mit der Striktionslinie k bildet; er ist definiert durch

$$\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{e}_1 \cos \sigma + \boldsymbol{e}_3 \sin \sigma \tag{1.3}$$

und wird für gewöhnlich auf das Intervall $-\pi/2 < \sigma \leqq \pi/2$ beschränkt.

Durch die „natürlichen Gleichungen" $\varkappa = \varkappa(s)$, $\tau = \tau(s)$ und $\sigma = \sigma(s)$ ist die Fläche Φ bis auf Bewegungen, also der Gestalt nach vollkommen bestimmt [6]. — Für die von den Tangenten einer Raumkurve k gebildete Torse Φ gilt $\sigma \equiv 0$, und die Ableitungsgleichungen (1.2) sind die wohlbekannten Formeln von F. Frenet, wobei $\varkappa$ die Krümmung und τ die Torsion von k bedeuten.

Die von den Zentraltangenten gebildete Regelfläche Ψ wird als das *Striktionsband* von Φ bezeichnet, falls nicht alle Zentraltangenten zusammenfallen, wie das für die aufrechten Konoide eintritt. Unter Ausschluß dieser Flächen sowie der durch $\tau \equiv 0$

gekennzeichneten konoidalen Flächen überhaupt (deren Erzeugenden zu einer festen Richtebene parallel sind, sodaß ihre Zentraltangenten einen Zylinder erfüllen), haben Φ und das durch

$$y = z(s) + t \, . \, e_3(s) \tag{1.4}$$

dargestellte Striktionsband Ψ die Kehlkurve k gemeinsam und stehen in austauschbarer Beziehung, d. h. Φ ist das Striktionsband von Ψ [2, 6, 7]. Ist überdies $\sigma \not\equiv 0$ (also Φ nicht abwickelbar) und $\sigma \not\equiv \pi/2$ (Ψ nicht abwickelbar), so berühren einander die beiden Flächen längs ihrer gemeinsamen Striktionslinie k. Die bisher nicht beachtete Möglichkeit einer *Oskulation* längs k wurde in [14] untersucht; maßgebend für dieses Phänomen ist die Identität

$$\varkappa \cos \sigma + \tau \sin \sigma = 0 \, . \tag{1.5}$$

Eine weitere wichtige Regelflächeninvariante ist schließlich der sogenannte *Drall*, der ein Maß für die Verwindung des Flächenstreifens längs einer Erzeugenden darstellt und als Grenzwert des Quotienten aus Abstand und Winkel zweier zusammenrückenden Erzeugenden erklärt ist. Gemäß [2, 6] haben zusammengehörige Erzeugende der Flächen Φ (1.1) und Ψ (1.4) die Drallwerte

$$p = \frac{\sin \sigma}{\varkappa} \, , \quad q = \frac{\cos \sigma}{\tau} \, . \tag{1.6}$$

Bei oskulierenden Flächenpaaren gilt zufolge (1.5) die Beziehung $p + q = 0$. Wie in [14] gezeigt wurde, ist die bestehende Möglichkeit einer Hyperoskulation durch feste Drallwerte p und $q = -p$ charakterisiert. Diese Tatsache legt es nahe, allgemeiner nach Flächenpaaren Φ, Ψ mit voneinander unabhängigen *konstanten Drallwerten* p und q zu fragen. Dieses Problem ist Gegenstand der vorliegenden Untersuchung, die sich naturgemäß auf die Bedingungen (1.6) mit $p = \text{const}$ und $q = \text{const}$ stützt. Die Ergebnisse liefern einen vielleicht willkommenen Beitrag zum Fragenkreis der konstant gedrallten Regelflächen, die im Anschluß an J. Krames [5, 7] vielfach erörtert wurden, vor allem von H. Brauner und seienn Schülern [1].

2. Flächenpaare mit vorgeschriebenem Richtkegel der Zentraltorse. Von entscheidender Bedeutung für alle eine windschiefe Regelfläche Φ betreffenden metrischen Fragen ist die ihr (und dem Striktionsband Ψ) längs der Kehlkurve k berührend angeschriebene *Zentraltorse* Γ. Als Einhüllende der Zentralebenenschar ist sie bestimmt durch

$$(x - z(s)) \, . \, e_2(s) = 0 \, . \tag{2.1}$$

Wie die Ableitung nach dem Scharparameter s lehrt, hat ihre Erzeugende den Richtungsvektor

$$d = e_2 \times e_2' = \tau e_1 + \varkappa e_3 \, . \tag{2.2}$$

Dies ist der sogenannte Darbouxsche Drehvektor, mit dessen Hilfe sich die Ableitungsformeln (1.2) zusammenfassen lassen zu $e_i' = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Er hat den Betrag

$$(2.3) \qquad |\boldsymbol{d}| = |\boldsymbol{e}_2'| = \sqrt{(\varkappa^2 + \tau^2)} = \lambda\,,$$

der als *Lancretsche* oder „*ganze*" *Krümmung* bezeichnet wird [2]. Für die Bewegung des in den Ursprung O verlegten Dreibeins $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, die bei der Wanderung des Zentralpunkts Z entlang der Kehlkurve k erfolgt, spielt $\boldsymbol{d}$ die Rolle der Momentanachse.

Die genannte Bündelbewegung um O läßt sich nach den Elementen der sphärischen Kinematik auffassen als Rollung der von $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_3$ aufgespannten Ebene auf dem von den Momentanachsen $\boldsymbol{d}$ erfüllten *Richtkegel der Zentraltorse* Γ. Dessen Spurkurve g auf der Einheitskugel um O wird durch den auf Einheitsbetrag normierten Vektor $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{d}/\lambda$ beschrieben. Im Sinne der sphärischen Geometrie ist $\boldsymbol{g}$ „polar" zum sphärischen Normalenbild $c_2 : \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2(s)$, während das sphärische Erzeugendenbild $c_1 : \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1(s)$ sowie das sphärische Zentraltangentenbild $c_3 : \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3(s)$ von Φ als sphärische Evolventen von g erscheinen.

Gibt man also, wie sich dies in [14] bereits bewährt hat, das sphärische Zentraltorsenbild g, bezogen auf seine Bogenlänge u, durch

$$(2.4) \qquad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(u) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{g}^2 = \dot{\boldsymbol{g}}^2 = 1$$

vor, so gelten für die Dreibeinvektoren die Darstellungen

$$(2.5) \qquad \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{g}\cos u - \dot{\boldsymbol{g}}\sin u\,, \quad \boldsymbol{e}_2 = \dot{\boldsymbol{g}} \times \boldsymbol{g}\,, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{g}\sin u + \dot{\boldsymbol{g}}\cos u\,.$$

Für die Ableitungen nach u hat man:

$$(2.6) \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_1 = -(\boldsymbol{g} + \ddot{\boldsymbol{g}})\sin u\,, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_2 = \ddot{\boldsymbol{g}} \times \boldsymbol{g}\,, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_3 = (\boldsymbol{g} + \ddot{\boldsymbol{g}})\cos u\,.$$

Mit Hilfe der aus den Bedingungen (2.1) folgenden Relationen $\boldsymbol{g}\dot{\boldsymbol{g}} = 0$, $\dot{\boldsymbol{g}}\ddot{\boldsymbol{g}} = 0$ und $\boldsymbol{g}\ddot{\boldsymbol{g}} = -1$ überzeugt man sich leicht, daß, wie es sein muß, $\boldsymbol{g} + \ddot{\boldsymbol{g}}$ die Richtung von $\boldsymbol{e}_2$ hat. Setzt man dementsprechend

$$(2.7) \qquad \boldsymbol{g} + \ddot{\boldsymbol{g}} = -\mu \boldsymbol{e}_2\,,$$

so erkennt man aus

$$(2.8) \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_2 = -\mu \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{g} = \mu \boldsymbol{g} \times (\dot{\boldsymbol{g}} \times \boldsymbol{g}) = \mu \dot{\boldsymbol{g}}\,,$$

daß

$$(2.9) \qquad \mu = (\boldsymbol{g}, \dot{\boldsymbol{g}}, \ddot{\boldsymbol{g}})$$

die *konische Krümmung der Zentraltorse* Γ bedeutet. Ein Vergleich der Ableitungsformeln (1.2) mit (2.6) liefert dann unter Bedachtnahme auf $\dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{e}_i' \,.\, \dot{s}$ die Beziehungen

$$(2.10) \qquad \varkappa \dot{s} = \mu \sin u\,, \quad \tau \dot{s} = \mu \cos u\,, \quad \lambda \dot{s} = \mu\,.$$

Mit Benützung der vorgeschriebenen (konstanten) Drallwerte p und q (1.6) ergeben sich also für den *Striktionswinkel* σ die Relationen

$$(2.11) \qquad \sin\sigma = p\varkappa = p\lambda \sin u\,, \quad \cos\sigma = q\tau = q\lambda\cos u\,, \quad \operatorname{tg}\sigma = (p/q)\operatorname{tg} u\,.$$

Daraus folgen für *Krümmung* und *Torsion* die Ausdrücke

$$(2.12) \qquad \varkappa = \lambda \sin u\,, \quad \tau = \lambda \cos u \quad \text{mit} \quad \lambda = 1/\sqrt{(p^2 \sin^2 u + q^2 \cos^2 u)}\,.$$

Nachdem nunmehr die Grundinvarianten $\varkappa$, τ und σ als Funktionen von u bekannt sind und der Zusammenhang des Hilfsparameters u mit der Bogenlänge s der Kehlkurve durch $\dot{s} = \mu/\lambda$ mit μ aus (2.9) gegeben ist, ist die gesuchte Regelfläche Φ der Gestalt nach bestimmt. Auf Grund des vorgeschriebenen Richtkegels (2.4) der Zentraltorse ist sogar die Raumlage bis auf Translationen fixiert. Zur Ermittlung von Φ benötigt man vor allem den Tangentenvektor der Kehlkurve, der gemäß (1.3) und (2.5) dargestellt wird durch

$$(2.13) \qquad z' = g \cos(\sigma - u) + \dot{g} \sin(\sigma - u)\,.$$

Nach Elimination von σ mittels (2.11) ergibt sich

$$(2.14) \qquad \dot{z} = z'\dot{s} = [(p \sin^2 u + q \cos^2 u)\, g + (p - q) \sin u \cos u \,.\, \dot{g}]\, \lambda \dot{s}\,,$$

und schließlich durch Integration unter Beachtung von (2.10) die *Striktionslinie* k:

$$(2.15) \qquad z = \tfrac{1}{2} \int \{[(p + q) - (p - q) \cos 2u]\, g + (p - q) \sin 2u \,.\, \dot{g}\}\, \mu\, du\,;$$

hierbei ist μ aus (2.9) zu entnehmen. – Eine Parameterdarstellung der gesuchten *Regelfläche* Φ nach dem Muster (1.1) lautet dann:

$$(2.16) \qquad x = z(u) + t \,.\, e_1(u) \quad \text{mit} \quad e_1 = g \cos u - \dot{g} \sin u\,.$$

Für das *Striktionsband* Ψ ist lediglich e_1 durch $e_3 = g \sin u + \dot{g} \cos u$ zu ersetzen.

3. Sonderfälle. Nimmt der Drallquotient p/q einen der ausgezeichneten Werte 0, ∞, $+1$ oder -1 an, so stellen sich Verhältnisse besonderer Art ein.

a) $p = 0$, $q \neq 0$. Die Regelfläche Φ ist zufolge (2.11) eine *Torse* ($\sigma = 0$) mit einer *Gratlinie k konstanter Torsion* $\tau = 1/q$, das Striktionsband Ψ deren Binormalenfläche. Die Kurve k ist *geodätische Linie der Zentraltorse* Γ und wird gemäß (2.15) dargestellt durch

$$(3.1) \qquad z = q \int \mu (g \cos u - \dot{g} \sin u) \cos u \, du\,.$$

b) $q = 0$, $p \neq 0$. Hier ist umgekehrt Φ die *Binormalenfläche einer Kurve konstanter Torsion* $1/p$, Ψ deren Tangentenfläche.

c) $p = q > 0$. Φ und Ψ sind zufolge (2.12) *Regelflächen konstanter Lancretscher Krümmung* $\lambda = 1/p$ mit der Kehlkurve $k : z = p \int \mu g \, du$. Wegen (2.11) gilt für den Striktionswinkel $\sigma = u$, sodaß gemäß (2.13) $z' = g$. Dies bedeutet, daß die Erzeugende der Zentraltorse stets mit der Tangente der Striktionslinie k zusammenfällt, also die *Kehlkurve Schmieglinie* der Flächen Φ und Ψ ist, im Einklang mit dem von E. Kruppa [6] für eine asymptotische Striktionslinie angegebenen Kriterium $\varkappa \cos \sigma = \tau \sin \sigma$. – Werden bei der Verebnung der Zentraltorse Γ die Erzeugenden der Fläche Φ mitgenommen, so gehen sie nach einem bekannten Satz von G.

Darboux [2, 4, 6] in die Strahlen eines Parallelenbüschels über. Diese Eigenschaft, daß die Flächenerzeugenden längs der Striktionslinie geodätisch parallel sind, ist für die Striktionslinie kennzeichnend. Werden nun sämtliche Erzeugenden von Φ in der Zentralebene um ihren Zentralpunkt durch denselben Winkel α verdreht, so bleibt diese Eigenschaft erhalten und es entsteht eine neue Regelfläche Φ_α, die mit $\Phi = \Phi_0$ die Kehlkurve $\boldsymbol{k}$ und die Zentraltorse Γ gemeinsam hat. Da sich die Flächennormale $\boldsymbol{e}_2$ nicht geändert hat, bleibt auch die Lancretsche Krümmung λ (2.3) erhalten. Es ändert sich lediglich der Striktionswinkel σ zu $\bar{\sigma} = \sigma + \alpha$, und entsprechend der Verdrehung von $\boldsymbol{e}_1$ nach $\bar{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cos\alpha - \boldsymbol{e}_3 \sin\alpha$ die Krümmung $\varkappa$ zu $\bar{\varkappa} = = \varkappa \cos\alpha + \tau \sin\alpha$. Im vorliegenden Fall folgt daraus, in Übereinstimmung mit einer Bemerkung von J. Krames in [7, S. 147] und mit einer von H. Sachs [10] abgeleiteten Formel für den Drall von Φ_α, daß *sämtliche abgeleiteten Fläche* Φ_α *denselben konstanten Drall* p besitzen (unter ihnen eben auch das Striktionsband $\Psi = \Phi_{\pi/2}$).

d) $p = -q < 0$. Auch in diesem Fall haben die Regelflächen Φ und Ψ zufolge (2.12) *konstante Lancretsche Krümmung* $\lambda = 1/q$. Ferner gilt wegen (2.11) für den Striktionswinkel $\sigma = -u$, sodaß die *Oskulationsbedingung* (1.5) erfüllt ist. Wie in [14] bewiesen wurde, herrscht dann infolge des konstanten Dralls sogar *Hyperoskulation* zwischen den Flächen Φ und Ψ. – Die Kehlkurve k wird gemäß (2.15) dargestellt durch

$$z = q \int \mu(\boldsymbol{g} \cos 2u - \dot{\boldsymbol{g}} \sin 2u)\, \mathrm{d}u\,. \tag{3.2}$$

4. Flächenpaare mit einer Zentraltorse konstanter Böschung. Zur Illustration der Entwicklungen in Abschnitt 2 soll die Annahme einer *Böschungstorse* als Zentraltorse Γ weiter ausgeführt werden. Der Richtkegel ist dann ein Drehkegel mit einem bestimmten Öffnungswinkel 2ω, wobei $0 < \omega < \pi/2$ vorausgesetzt werden darf, um Zylinder und Ebenen Φ auszuschalten. Das sphärische Zentraltorsenbild g ist somit ein Kleinkreis der Einheitskugel, der durch

$$\boldsymbol{g} = \left(n \cos\frac{u}{n},\ n \sin\frac{u}{n},\ m\right) \quad \text{mit} \quad n = \sin\omega\,, \quad m = \cos\omega \tag{4.1}$$

angesetzt werden mag. Die konische Krümmung der Zentraltorse hat den Wert $\mu = m/n = \cot\omega$.

Für den Tangentenvektor $\dot{\boldsymbol{z}} = (\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3)$ der Striktionslinie findet man über (2.15) mit Benützung der Abkürzung

$$v = u/n \tag{4.2}$$

die Komponenten

$$\dot{z}_1 = \frac{m}{2}(p + q)\cos v + \tag{4.3}$$
$$+ \frac{m}{4n}(p - q)\left[(1 - n)\cos(v + 2u) - (1 + n)\cos(v - 2u)\right],$$

$$\dot{z}_2 = \frac{m}{2}(p + q)\sin v +$$

$$+ \frac{m}{4n}(p - q)\left[(1 - n)\sin(v + 2u) - (1 + n)\sin(v - 2u)\right],$$

$$\dot{z}_3 = \frac{m^2}{2n}(p + q) - \frac{m^2}{2n}(p - q)\cos 2u\,.$$

Deutet man den Parameter u als Zeit, so stellt (4.3) das *Geschwindigkeitsdiagramm* des die Kehlkurve k durchlaufenden Zentralpunktes Z dar. In der von den orthogonalen Vektoren $\boldsymbol{g}$ und $\dot{\boldsymbol{g}}$ aufgespannten Tangentialebene des Richtdrehkegels wandert der Endpunkt des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\boldsymbol{z}}$ gemäß (2.14) auf einem Kreis

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \frac{m}{2n}\left[(p + q) - (p - q)\cos 2u\right]\boldsymbol{g} + \frac{m}{2n}(p - q)\sin 2u\,.\,\dot{\boldsymbol{g}} \tag{4.4}$$

mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit 2, während diese Ebene zufolge (4.1) mit der Winkelgeschwindigkeit $1/n$ um die Kegelachse rotiert. Hieraus ist zu erkennen, daß die Diagrammkurve eine *sphärische Radlinie* ist. Dieselbe verläuft auf der Kugel

$$\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2 - \frac{p + q}{n}\dot{z}_3 + \frac{m^2}{n^2}pq = 0 \tag{4.5}$$

und entsteht beim Rollen eines Drehkegels mit dem Öffnungswinkel $\pi - 2\omega$ auf einem Drehkegel mit dem Öffnungswinkel 4ω.

Durch Integration von (4.3) mit Beachtung von (4.2) gelangt man zur *Kehlkurve* k:

$$z_1 = \frac{mn}{2}(p + q)\sin v + \tag{4.6}$$

$$+ \frac{m}{4}(p - q)\left[\frac{1 - n}{1 + 2n}\sin(v + 2u) - \frac{1 + n}{1 - 2n}\sin(v - 2u)\right],$$

$$z_2 = -\frac{mn}{2}(p + q)\cos v -$$

$$- \frac{m}{4}(p - q)\left[\frac{1 - n}{1 + 2n}\cos(v + 2u) - \frac{1 + n}{1 - 2n}\cos(v - 2u)\right],$$

$$z_3 = \frac{m^2}{2}(p + q)\,v - \frac{m^2}{4n}(p - q)\sin 2u\,, \quad \text{wobei} \quad u = nv\,.$$

Hierbei wurde allerdings $n \neq 1/2$ vorausgesetzt; die Annahme $n = 1/2$ verlangt eine eigene Behandlung und soll hier nicht weiter verfolgt werden. – Im Falle $n \neq 1/2$ ist aus der komplexen Zusammenfassung

$$(4.7)\quad z_1 + iz_2 = -\frac{im}{4} e^{iv}\left[2n(p+q) + (p-q)\left(\frac{1-n}{1+2n}e^{2iu} - \frac{1+n}{1-2n}e^{-2iu}\right)\right]$$

abzulesen, daß die Striktionslinie k im allgemeinen auf einer *Schraubfläche* verläuft, welche durch die Darstellung (4.6) mit unabhängigen Parametern u und v beschrieben wird. Dieselbe entsteht etwa durch Verschraubung der Profilkurve $v = 0$ um die x_3-Achse, also einer Ellipse, welche in der von p und q unabhängigen Ebene

$$(4.8)\qquad m(1-4n^2)\, z_1 + 2n(1+2n^2)\, z_3 = 0$$

verläuft. Der Schraubparameter hat den Wert $c = m^2(p+q)/2$. Bei gleichförmigem Ablauf der Schraubung wandert der die Kehlkurve beschreibende Zentralpunkt auf der Profilellipse mit konstanter Flächengeschwindigkeit weiter.

Mit Benützung des durch (2.5) festgelegten Normalenvektors $\boldsymbol{e}_2 = \dot{\boldsymbol{g}} \times \boldsymbol{g} = (m\cos v,\ m\sin v,\ -n)$, wobei wieder v für u/n steht, erhält man für die Zentralebene (2.1) die Gleichung

$$(4.9)\qquad x_1\cos v + x_2 \sin v - \frac{n}{m}x_3 = \frac{3m(p-q)}{4(1-4n^2)}\sin 2u - \frac{m}{2}(p+q)\,u\,.$$

Setzt man rechts wieder $u = nv$, so sieht man, daß (im allgemeinen und immer unter der Voraussetzung $n \neq 1/2$) die Schar (4.9) von einer Ebene durchlaufen wird, die einem „fortschreitenden harmonischen Umschwung“ unterworfen ist; das ist eine Bewegung, die sich aus einer gleichförmigen Schraubung um die x_3-Achse (mit dem vorhin erwähnten Schraubparameter c) und einer harmonischen Schwingung längs dieser Achse (mit der Frequenz $2n$) zusammensetzt [13]. Die von der Ebene dabei umhüllte *Zentraltorse* Γ ist daher nach der von O. Obůrka [8] eingeführten Namensgebung eine „*Vibratortorse*“.

Wie in [13] gezeigt wurde, erscheint die Gratlinie einer solchen Vibratortorse im Grundriß als Parallelkurve einer Epi- oder Hypozykloide und geht bei der Abwicklung der Torse ebenfalls in eine derartige Kurve über. Im vorliegenden Fall ergibt sich, wie jedoch aus Platzgründen nicht näher ausgeführt werden soll, unter der Voraussetzung $n \neq 1/2$ als Grundriß eine im Abstand $mn(p+q)/2$ verlaufende Parallelkurve einer Zykloide der Familie $(1-2n):(1+2n)$ mit dem Scheitelkreisradius $3mn(p-q)/2(1-4n^2)$, als Verebnung hingegen stets eine *Parastroide*, nämlich eine im Abstand $m(p+q)/2n$ verlaufende Parallelkurve einer Astroide (vierspitzigen Hypozykloide) mit dem Scheitelkreisradius $m(p-q)/2n$. Die Kehlkurve k (4.6) geht bei der Verebnung der Zentraltorse in eine *Ellipse* mit den Halbachsen mp/n und mq/n über, welche die Parastroide in den vier Scheitelpunkten berührt.

Die gesuchte Regelfläche Φ konstanten Dralls sowie ihr Striktionsband Ψ können schließlich auf Grund der Darstellung (2.16) unschwer hingeschrieben werden, worauf jedoch verzichtet wird. Nach Darboux (s. Abschnitt 3c) gehen die Erzeugenden der beiden Flächen bei der Verebnung der Zentraltorse in zueinander orthogonale Parallelenscharen über, deren Richtungen durch die Achsen der vorhin genannten Ellipse angezeigt werden.

Von Interesse sind noch die in Abschnitt 3 angeführten *Sonderfälle*:

a) $p = 0$, $q \neq 0$. Hier ist die Striktionslinie k (4.6) eine *Kurve konstanter Torsion mit fester Hauptnormalenneigung*, wie sie gelegentlich bei E. Salkowski [11] auftrat; sie ist geodätische Linie der Vibratortorse Γ (4.9). Die zugehörige Regelfläche Φ ist abwickelbar und besteht aus den Tangenten von k; das Striktionsband Ψ ist die Binormalenfläche von k.

b) $q = 0$, $p \neq 0$. Hier vertauschen die Flächen Φ und Ψ aus a) die Rollen.

c) $p = q \neq 0$. In diesem Fall tritt als Kehlkurve k (4.6) eine *Schraublinie*

$$z_1 = mnp \sin v\,, \quad z_2 = -mnp \cos v\,, \quad z_3 = m^2 pv \tag{4.10}$$

auf, die gleichzeitig Grat der Zentraltorse Γ (4.9) ist. Die Regelfläche Φ gehört mithin zu den von J. Krames [4] untersuchten Flächen, die eine Schraubtorse zur Zentraltorse haben und eine dieser angehörende Schraublinie zur Kehlkurve; es handelt sich um die allgemeinsten Regelflächen, die zu ihren sämtlichen durch gleiche Verdrehung der Erzeugenden abgeleiteten kongruent sind. Daß jene speziellen unter ihnen, deren Striktionslinie mit dem Schraubtorsengrat zusammenfällt, durch konstanten Drall ausgezeichnet sind, wurde in [4] vermerkt. Der Drallwert $p = c/m^2$ ist gleich dem Torsionsradius der Gratschraublinie, was mit allgemeineren Tatsachen übereinstimmt (vgl. [7, S. 147], [1], [10]).

d) $p = -q < 0$. In diesem Fall verschwindet der Schraubparameter c, sodaß (für $n \neq 1/2$) als *Zentraltorse* anstelle der Vibratortorse (4.9) eine der von W. Kautny [3] betrachteten *Umschwungtorsen* (mit der Frequenz $2n$) auftritt:

$$x_1 \cos v + x_2 \sin v - \frac{n}{m} x_3 = \frac{3mq}{2(1 - 4n^2)} \sin 2nv\,. \tag{4.11}$$

Die Gratlinie einer solchen Torse ist Böschungslinie auf einer Drehquadrik, erscheint im Grundriß als Epi- oder Hypozykloide und geht bei Verebnung der Torse in eine Astroide über. Auch die *Kehlkurve* k, beschrieben durch

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{mq}{2}\left[\frac{1-n}{1+2n}\sin(v+2u) - \frac{1+n}{1-2n}\sin(v-2u)\right], \\ z_2 &= \frac{mq}{2}\left[\frac{1-n}{1+2n}\cos(v+2u) - \frac{1+n}{1-2n}\cos(v-2u)\right], \\ z_3 &= \frac{m^2 q}{2n}\sin 2u \;\; (\text{mit } u = nv)\,, \end{aligned} \tag{4.12}$$

verläuft auf einer Drehquadrik und bildet sich im Grundriß auf eine Radlinie ab (jedoch ohne Spitzen). Für ihre geodätische Krümmung $\gamma = -\sigma'$ findet man wegen $\sigma = -u$ über (2.10) den konstanten Wert $\gamma = 1/\dot{s} = \lambda/\mu = n/mq$. Die Striktionslinie k geht daher bei der Verebnung der Zentraltorse in einen *Kreis* vom Radius mq/n

über, und zwar in den Scheitelkreis der erwähnten Astroide. – Die zugehörigen *Regelflächen* Φ und Ψ gehören zu den jüngst von G. Pillwein [9] studierten Regelflächen fester Lancretscher Krümmung mit konstant geböschter Zentraltorse und einer Kehlkurve konstanter geodätischer Krümmung. Die hier auftretenden sind durch *hyperoskulierendes Striktionsband* ausgezeichnet und deshalb bemerkenswert, weil unter ihnen algebraische Flächen vorkommen, nämlich für rationales $n \neq 1/2$. Die algebraischen Charaktere wurden in [14] vermerkt; das einfachste Beispiel stellt sich mit $n = 1/4$ als Fläche 7. Grades ein.

5. Flächenpaare mit konischer Zentraltorse. Wird die Spitze des jetzt angenommenen *Zentralkegels* Γ als Koordinatenursprung verwendet, dann kann die Kehlkurve k in Anlehnung an (2.4) durch

$$(5.1) \qquad z = r \, . \, \boldsymbol{g} \quad \text{mit} \quad r = r(u)\,, \quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(u)\,, \quad \boldsymbol{g}^2 = \dot{\boldsymbol{g}}^2 = 1$$

angesetzt werden. Der Vergleich des Tangentenvektors

$$(5.2) \qquad \dot{z} = \dot{r}\boldsymbol{g} + r\dot{\boldsymbol{g}}$$

mit der Zerlegung (2.13) führt auf

$$(5.3) \qquad \frac{\dot{r}}{r} = \cot(\sigma - u) = \frac{\cos\sigma\cos u + \sin\sigma\sin u}{\sin\sigma\cos u - \cos\sigma\sin u}\,.$$

Mit Rücksicht auf (2.11) gilt daher für $p \neq q$:

$$(5.4) \quad \frac{\dot{r}}{r} = \frac{q\cos^2 u + p\sin^2 u}{(p-q)\sin u\cos u} = m \operatorname{tg} u + n\cot u \quad \text{mit} \quad m = \frac{p}{p-q}\,, \quad n = \frac{q}{p-q}\,.$$

Integration liefert nun mit

$$(5.5) \qquad r = c \, . \sin^n u / \cos^m u \quad (\text{wobei } m - n = 1)$$

die Polargleichung der *verebneten Striktionslinie k*. Nach Übergang zu kartesischen Koordinaten $x = r\cos u$, $y = r\sin u$ ergibt sich die Darstellung

$$(5.6) \qquad x^m y^{1-m} = c \quad \text{oder} \quad y = c' \, . \, x^{p/q}\,.$$

Die bei der Verebnung des Zentralkegels mitgenommenen Erzeugenden des Flächenpaares Φ, Ψ erhalten zufolge (5.3) die Richtungen der x- bzw. y-Achse.

Für die *konische Krümmung* $\mu = \lambda\dot{s}$ des noch zu bestimmenden Zentralkegels Γ findet man über $\dot{s}^2 = \dot{z}^2 = r^2 + \dot{r}^2 = r^2/\sin^2(\sigma - u)$:

$$(5.7) \qquad \mu = \frac{\pm\lambda r}{\sin(\sigma - u)} = \frac{\pm r}{(p-q)\sin u\cos u} = \frac{\pm c}{p-q} \, . \, \frac{\sin^{m-2} u}{\cos^{m+1} u}\,.$$

Bedenkt man, daß u die Bogenlänge des sphärischen Zentralkegelbildes $g : \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(u)$ bedeutet und μ dessen geodätische Krümmung, so ist durch die mit (5.7) vorliegende *natürliche Gleichung* $\mu = \mu(u)$ diese Kurve g ihrer Gestalt nach bestimmt. Eine explizite koordinatenmäßige Darstellung ist allerdings nicht einmal in Sonderfällen angebbar. — Um eine gewisse Vorstellung vom Verlauf der sphärischen Kurve g zu gewinnen, mag man zunächst die durch ihre Krümmung μ in Abhängigkeit von der Bogenlänge u festgelegte *ebene Kurve* $\bar{g}$ ermitteln. Sie wäre in bekannter Weise in kartesischen Koordinaten durch

$$\bar{x} = \int \cos \varphi \, . \, du \, , \quad \bar{y} = \int \sin \varphi \, . \, du \quad \text{mit} \quad \varphi = \int \mu \, du \tag{5.8}$$

zu beschreiben, was jeweils mittels graphischer oder numerischer Integration erledigt werden könnte. Denkt man sich dann einen schmalen Papierstreifen mit der Mittellinie $\bar{g}$ auf die Einheitskugel „aufgebügelt", so nimmt dieser die Gestalt von g an, die recht verwickelt sein kann.

Die Bestimmung von konstant gedrallten Regelflächen mit Zentralkegel hat J. Krames [5] ausgehend von der Polargleichung $r = r(u)$ der verebneten Kehlkurve vorgenommen und mit zahlreichen Beispielen belegt. — Zu den in Abschnitt 3 erwähnten *Sonderfällen* wäre zu bemerken:

a) $p = 0$, $q \neq 0$ $(m = 0)$. Im Einklang mit der geradlinigen Verebnung (5.6) ihrer Kehlkurve k ist die Fläche Φ die *Tangentenfläche einer Kegelgeodätischen konstanter Torsion* $\tau = 1/q$ und als solche *einer Kugel umschrieben*; das Striktionsband Ψ ist die Binormalenfläche von k.

b) $q = 0$, $p \neq 0$. Hier vertauschen die Flächen Φ und Ψ aus a) ihre Rollen.

d) $p = -q$ $(m = 1/2)$. Das durch Hyperoskulation ausgezeichnete Flächenpaar Φ, Ψ wurde bereits in [14] erwähnt, wo auch in Übereinstimmung mit (5.6) die Verebnung der Striktionslinie als gleichseitige Hyperbel erkannt wurde.

6. Flächenpaare mit zylindrischer Zentraltorse. Unter der Annahme eines *Zentralzylinders* Γ schrumpft das Zentraltorsenbild g auf einen Punkt zusammen, und das sphärische Erzeugendenbild c_1 der Regelfläche Φ wird ein Kreis. Ihr begleitendes Dreibein kann mit nichtverschwindenden Konstanten a und b angesetzt werden durch

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (a \sin \varphi, \, -a \cos \varphi, \, b) \, , \quad \mathbf{e}_2 = (\cos \varphi, \, \sin \varphi, \, 0) \, , \\ \mathbf{e}_3 &= (-b \sin \varphi, \, b \cos \varphi, \, a) \, , \quad \text{wobei} \quad a^2 + b^2 = 1 \, . \end{aligned} \tag{6.1}$$

Der Vergleich der Ableitungen (1.2) nach der Bogenlänge s der Kehlkurve mit jenen nach φ, nämlich

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = a\mathbf{e}_2 \, , \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_3 \, , \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = -b\mathbf{e}_2 \, , \tag{6.2}$$

liefert die Relationen

$$\varkappa \dot{s} = a \, , \quad \tau \dot{s} = b \, . \tag{6.3}$$

Die Forderung konstanter Drallwerte für das Flächenpaar Φ, Ψ führt über die Bedingungen (1.6) auf

$$\text{tg}\,\sigma = p\varkappa/q\tau = ap/bq = \text{const}\,, \tag{6.4}$$

also auf *Konstanz des Striktionswinkels* σ. Dann ist aber, wieder mit Rücksicht auf (1.6), auch

$$\varkappa = \sin\sigma/p = \text{const}\,, \quad \tau = \cos\sigma/q = \text{const}. \tag{6.5}$$

Die Konstanz aller drei Grundinvarianten bedeutet aber, daß die Fläche Φ und damit auch ihr Striktionsband Ψ im allgemeinen *Regelschraubflächen* sind. Ihre *Kehlschraublinie* k wird, mit Benützung von (1.3) und Beachtung von $\dot{s}\sin\sigma = ap$ und $\dot{s}\cos\sigma = bq$, dargestellt durch

$$z_1 = ab(p-q)\cos\varphi\,, \quad z_2 = ab(p-q)\sin\varphi\,, \quad z_3 = (a^2p + b^2q)\,\varphi\,. \tag{6.6}$$

Zu den in Abschnitt 3 angeführten *Sonderfällen* wäre zu erwähnen:

a) $p = 0$, $q \neq 0$. Φ ist eine *Schraubtorse*, Ψ die Binormalenfläche der Gratschraublinie.

b) $q = 0$, $p \neq 0$. Hier tauschen Φ und Ψ die Rollen.

c) $p = q \neq 0$. Die Striktionslinie k (6.6) fällt mit der Schraubachse zusammen, Φ und Ψ sind mithin (schiefe) *geschlossene Regelschraubflächen*.

d) $p = -q \neq 0$. Hier liegt die in [14] erwähnte *Hyperoskulation* des Regelschraubflächenpaares Φ, Ψ vor.

Hervorzuheben wäre noch der *Ausnahmenfall* verschwindenden Schraubparameters $a^2p + b^2q = 0$, der aus (6.6) zu entnehmen ist. Hier wird die Kehlkurve k zu einem Kreis, und das Flächenpaar Φ, Ψ besteht aus zwei einschaligen *Drehhyperboloiden*, die im Sonderfall d) ($p = -q$, $a = b = 1/\sqrt{2}$, $\sigma = -\pi/4$) sogar miteinander verschmelzen.

Literatur

[1] *H. Brauner:* Über Strahlflächen von konstantem Drall. Monatsh. Math. *63* (1959), 101 bis 111. — Eine einheitliche Erzeugung konstant gedrallter Strahlflächen. Monatsh. Math. *65* (1961), 301—314. — Neuere Untersuchungen über windschiefe Flächen. Jber. Dtsch. Math. Ver. *70* (1967), 61—85.

[2] *J. Hoschek:* Liniengeometrie (Hochschulskr. Bd. 733), Mannheim, 1971.

[3] *W. Kautny:* Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. Monatsh. Math. *63* (1959), 169—188.

[4] *J. Krames:* Über Regelflächen, die mit gewissen aus ihnen abgeleiteten Flächen kongruent sind. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien *155* (1947), 149—165.

[5] *J. Krames:* Über windschiefe Flächen mit konischer Zentraltorse. Monatsh. Math. *65* (1961), 337—350.

[6] *E. Kruppa:* Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien *157* (1949), 125—158. — Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Wien, 1957.
[7] *E. Müller - J. Krames:* Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III). Leipzig/Wien, 1931.
[8] *O. Obůrka:* Křivky a plochy vibrátorové. Sborn. Vys. Uč. Techn. Brno *1965*, 97—131.
[9] *G. Pillwein:* Die Regelflächen konstanter Lancret-Krümmung mit einer Böschungstorse als Zentraltorse und einem geodätischen Kreis als Striktionslinie. Diss. TU Wien, 1979.
[10] *H. Sachs:* Über Transversalflächen von Regelflächen. Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. *186* (1978), 427—439.
[11] *E. Salkowski:* Beiträge zur Kenntnis der Bertrandschen Kurven. Math. Ann. *69* (1910), 560—579.
[12] *G. Sannia:* Una rappresentazione intrinseca delle rigate. Giorn. Mat. *1925*, 31—47.
[13] *W. Wunderlich:* Über die durch fortschreitenden harmonischen Umschwung erzeugbaren Hülltorsen. Čas. Pěst. Mat. *98* (1973), 130—144.
[14] *W. Wunderlich:* Raumkurven konstanter ganzer Krümmung und Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband. Demonstr. Math. 6 (1973), 407—417. Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband. Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. *188* (1979), 361—384.

Anschrift des Verfassers: Technische Universität, Gußhausstraße 27, A-1040 Wien, Österreich.