Czechoslovak Mathematical Journal, 30 (105) 1980, Praha

ANGEORDNETE AFFINE LOKALE TERNÄRRINGE UND ANGEORDNETE AFFINE KLINGENBERGSCHE EBENEN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 24. April 1978)

Jeder affinen Klingenbergschen Ebene (kurz AK-Ebene) $\mathscr{A}$ läßt sich ein affiner lokaler Ternärring $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}$ zuordnen und zu jedem affinen lokalen Ternärring $\mathscr{T}$ läßt sich eine AK-Ebene $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$ konstruieren [5]. In der vorliegenden Arbeit sind geordnete affine lokale Ternärringe so definiert, daß der zu einer konvex geordneten AK-Ebene $\mathscr{A}$ [6] gehörige affine lokale Ternärring $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}$ geordnet ist und die durch einen geordneten affinen lokalen Ternärring $\mathscr{T}$ konstruierte AK-Ebene $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$ konvex geordnet ist. Jedem affinen lokalen Ternärring $\mathscr{T}$ läßt sich ein Restklassen-Ternärkörper T' kanonisch zuordnen [5]. Ist $\mathscr{T}$ geordnet, so ist auch T' im Sinne von [1] geordnet. Jeder lokaler Ring [2] ist nach [5] ein Spezialfall eines affinen lokalen Ternärringes. (Die über lokalen Ringen konstruierten AK-Ebenen heißen desarguessch.) Ist ein lokaler Ring konvex fastgeordnet (Definition 3), so ist er als ein affiner lokaler Ternärring geordnet. Ist $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärring und bildet $\mathscr{R} = (R, +, \cdot)$ einen assoziativen Ring, wo $+, \cdot$ in üblicher Weise durch t erklärt sind, dann ist $\mathscr{R}$ ein konvex fastgeordneter lokaler Ring.

Definition 1. Ein Ring $\mathscr{R} = (R, +, \cdot)$ heißt *geordnet*, wenn die Menge R geordnet ist ([6], Def. 1) und folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $v_1, v_2 \in R,\ v_1 \leqq v_2 \Rightarrow v_1 + a \leqq v_2 + a\ \forall a \in R$,

(2) $a, b \in R,\ 0 \leqq a,\ 0 \leqq b \Rightarrow 0 \leqq ab$.

Definition 2. Ein assoziativer (nicht notwendig kommutativer) Ring mit Einselement heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Rechtsideal enthält.

Bemerkung 1. Das maximale Rechtsideal R_0 eines lokalen Ringes $\mathscr{R} = (R, +, \cdot)$ ist ein zweiseitiges Ideal und R_0 stellt dabei die Menge aller nichtinvertierbaren Elemente von $\mathscr{R}$ dar. Der Restklassen-Ring $\mathscr{R}' = (R/R_0, +, \cdot)$ ist ein Körper ([2], § 3.7).

Definition 3. Ein lokaler Ring $\mathscr{R} = (R, +, \cdot)$ mit maximalem Ideal R_0 heißt *fastgeordnet*, wenn die Menge R geordnet ist und folgende Bedingungen erfüllt sind:

(R1) $v_1, v_2 \in R,\ v_1 \leqq v_2 \Rightarrow v_1 + a \leqq v_2 + a\ \forall a \in R$,

(R2) $a, b \in R,\ 0 \leqq a,\ 0 \leqq b,\ b \notin R_0 \Rightarrow 0 \leqq ab$.

Ein fastgeordneter lokaler Ring heißt *konvex*, wenn

(R3) $a \leqq 1\ \forall a \in R_0$

gilt.

Folgerungen.

(1) Ist $a \leqq 0$, dann gilt nach (R1) $a - a \leqq -a$, also $0 \leqq -a$. Speziell ergibt sich $a < 0 \Rightarrow 0 < -a$. Aus $0 \leqq a$, $0 < b$ folgt $0 \leqq a < a + b$, also $0 < a + b$.

(2) $a \leqq b,\ b - a \notin R_0,\ 0 \leqq c \Rightarrow ca \leqq cb$: Aus (R1) folgt $a \leqq b \Rightarrow 0 \leqq b - a$ und nach (R2) ist $0 \leqq c(b - a)$, also $0 \leqq cb - ca$. Gemäß (R1) erhält man daraus $ca \leqq cb$.

(3) $b - a \notin R_0,\ a \leqq b,\ 0 < c \Rightarrow ca < cb$: Gilt $ca = cb$, dann $c(b - a) = 0$. Wegen $b - a \notin R_0$ gibt es in R ein zu $b - a$ inverses Element und man erhält deswegen $c(b - a)(b - a)^{-1} = c = 0$, was zum Widerspruch führt. Nach (2) gilt also $ca < cb$.

(4) $b - a \notin R_0,\ a \leqq b,\ ca \leqq cb \Rightarrow 0 \leqq c$: Es sei $c < 0$. Nach (1) gilt dann $0 < -c$ und wegen $a \leqq b$, $b - a \notin R_0$ ergibt sich nach (3) $-ca < -cb$. Aus $ca \leqq cb$ bzw. $-ca < -cb$ folgt $0 \leqq c(b - a)$ bzw. $0 < c(a - b)$ und nach (1) ergibt sich $0 < c(b - a + a - b) = 0$, was ein Widerspruch ist.

Definition 4. Ein *Ternärring* T ist ein Paar (R, t), wo R eine Menge und t eine Ternäroperation über R sind, wobei folgende Bedingungen gelten:

(K1) Es gibt Elemente $0, 1 \in R$ mit $0 \neq 1$ und $t(0, a, b) = t(a, 0, b) = b$, $t(1, a, 0) = t(a, 1, 0) = a$ für alle $a, b \in R$.

(K2) Für belibige $a, b, c \in R$ gibt es genau ein Element $x \in R$ (kurz $\exists!\, x \in R$) mit $c = t(a, b, x)$.

Definition 5. Ein Ternärring $T = (R, t)$ ist ein *Ternärkörper*, falls für beliebige $a, b, c, d \in R$ mit $a \neq c$ gilt:

(K3) $\exists!\, x \in R,\ t(x, a, b) = t(x, c, d)$.

(K4) $\exists!\, (x, y) \in R \times R,\ b = t(a, x, y),\ d = t(c, x, y)$.

Definition 6. Es seien $T = (R, t)$ ein Ternärring und R_0 eine Teilmenge aus R mit $R_0 \neq R$. Wir setzen $a \oplus r = t(1, a, r)$ $\forall a \in R$ $\forall r \in R_0$. R_0 heißt ein *Ideal* des Ternärringes T, wenn folgendes gilt:

(i) $0 \in R_0$.

(ii) Gilt $b = a \oplus r$ für $a, b \in R$, $r \in R_0$, so existiert ein $r' \in R_0$ mit $a = b \oplus r'$.

(iii) Für alle $a, b, c \in R$ und $r_1, r_2, r_3 \in R_0$ existiert ein $r' \in R_0$ mit $t(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = t(a, b, c) \oplus r'$.

(iv) Gilt $t(a, b, x') = t(a, b, x) \oplus r$ für $a, b, x, x' \in R$, $r \in R_0$, so existiert ein $r' \in R_0$ mit $x' = x \oplus r'$.

Satz 1. *Es sei R_0 ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$. Setzen wir $\bar{a} = \{t(1, a, r) \mid r \in R_0\}$ und $R/R_0 = \{\bar{a} \mid a \in R\}$, so ist R/R_0 eine Zerlegung der Menge R. Setzen wir weiter $t'(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \overline{t(a, b, c)}$ für $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R/R_0$, so ist t' eine Ternäroperation über R/R_0 und $T' = (R/R_0, t')$ bildet einen Restklassen – Ternärring.*

Zum Beweis siehe Beweise von Sätzen 4 und 5 [4].

Definition 7. Es sei R_0 ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$ und $T' = (R/R_0, t')$ der durch R_0 bestimmte Restklassen-Ternärring. Das Ideal R_0 heißt *vollständig*, wenn für beliebige Elemente $a, b, c, d \in R$ mit $\bar{a} \neq \bar{c}$ gilt:

(K'3) (a) $\exists!\, x \in R,\ t(x, a, b) = t(x, c, d)$.

(b) $t'(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}) = t'(\bar{x}, \bar{c}, \bar{d}) \wedge t'(\bar{x}', \bar{a}, \bar{b}) = t'(\bar{x}', \bar{c}, \bar{d}) \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}'$.

(K'4) (a) $\exists!\, (x, y) \in R \times R,\ b = t(a, x, y),\ d = t(c, x, y)$.

(b) $\bar{b} = t'(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y}),\ \bar{d} = t'(\bar{c}, \bar{x}, \bar{y}) \wedge \bar{b} = t'(\bar{a}, \bar{x}', \bar{y}'),\ \bar{d} = t'(\bar{c}, \bar{x}', \bar{y}') \Rightarrow \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}', \bar{y}')$.

Definition 8. Ein Ternärring, der ein vollständiges Ideal enthält, heißt *lokal*.

Bemerkung 2. Ist R_0 ein vollständiges Ideal eines lokalen Ternärringes $T = (R, t)$, dann ist $T' = (R/R_0, t')$ ein Ternärkörper ([4], Satz 8).

Definition 9. Es sei $T = (R, t)$ ein lokaler Ternärring mit vollständigem Ideal R_0 und $T' = (R/R_0, t')$ der zugehörige Restklassen-Ternärkörper. Zwei Elemente $a, b \in R$ heißen *fern* bzw. *benachbart*, falls $\bar{a} \neq \bar{b}$ bzw. $\bar{a} = \bar{b}$ gilt.

Definition 10. Es sei $T = (R, t)$ ein lokaler Ternärring mit vollständigem Ideal R_0 und $T' = (R/R_0, t')$ der durch das Ideal R_0 bestimmte Resklassen-Ternärkörper. Unter einem *affinen lokalen Ternärring* versteht man das Tripel $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$, wo t_1 eine Abbildung der Menge $R \times R_0 \times R$ in R mit folgenden Eigenschaften ist:

(T1) $t_1(a, b, c) \in \bar{c}\ \forall a, c \in R\ \forall b \in R_0$.

(T2) $\forall a, d \in R\ \forall b \in R_0\ \exists!\ c \in R,\ d = t_1(a, b, c)$.

(T3) Für alle $a, b, c, d \in R$ mit $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} \neq \bar{d}$ gibt es genau ein Paar $(x, y) \in \in R_0 \times R$ mit $a = t_1(b, x, y)$, $c = t_1(d, x, y)$.

(T4) $\forall a, b, d \in R\ \forall c \in R_0\ \exists!\ (x, y) \in R \times R,\ y = t(x, a, b),\ x = t_1(y, c, d)$.

(T5) $t_1(0, a, b) = b\ \forall (a, b) \in R_0 \times R$.

Definition 11. Ein affiner lokaler Ternärring $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ heißt *geordnet*, falls die Menge R geordnet ist und folgende Forderungen gelten:

(A1) $v, v' \in R,\ v \leqq v' \Rightarrow t(a, u, v) \leqq t(a, u, v')\ \forall a, u \in R$.

(A2) $v, v' \in R,\ v \leqq v' \Rightarrow t_1(a, u, v) \leqq t_1(a, u, v')\ \forall u \in R_0\ \forall a \in R$.

(A3) Es sei $t(x_1, u, v_1) = t(x_1, u_0, v_0)$, $t(x_2, u, v_2) = t(x_2, u_0, v_0)$ und $\bar{u} \neq \bar{u}_0$. Aus $u \leqq u_0$ bzw. $u_0 \leqq u$ folgt $x_1 \leqq x_2 \Leftrightarrow v_1 \leqq v_2$ bzw. $x_1 \leqq x_2 \Leftrightarrow v_2 \leqq v_1$.

(A4) Gilt $y_1 = t(x_1, u_0, v_0)$, $y_2 = t(x_2, u_0, v_0)$ und $x_1 = t_1(y_1, u, v_1)$, $x_2 = = t_1(y_2, u, v_2)$, dann $x_1 \leqq x_2 \Leftrightarrow v_1 \leqq v_2$.

(A5) Gilt $x_1 = t_1(y_1, u_0, v_0)$, $x_2 = t_1(y_2, u_0, v_0)$ und $y_1 = t(x_1, u, v_1)$, $y_2 = = t(x_2, u, v_2)$, dann $y_1 \leqq y_2 \Leftrightarrow v_1 \leqq v_2$.

Folgerungen.

(1) Es seien $v, v' \in R$. Nach (K2) ist $v = v' \Leftrightarrow t(a, u, v) = t(a, u, v')$ für $a, u \in R$. Aus (A1) folgt daher $v < v' \Rightarrow t(a, u, v) < t(a, u, v')$. Es sei $t(a, u, v) \leqq t(a, u, v')$. Gilt dabei $v' < v$, dann ist $t(a, u, v') < t(a, u, v)$, im Widerspruch zu $t(a, u, v) \leqq \leqq t(a, u, v')$. So erhält man $t(a, u, v) \leqq t(a, u, v') \Rightarrow v \leqq v'$ und zugleich auch $t(a, u, v) < t(a, u, v') \Rightarrow v < v'$.

(2) Es seien $v, v' \in R$. Nach (T2) ist $v = v' \Leftrightarrow t_1(a, u, v) = t_1(a, u, v')$ für $u \in R_0$, $a \in R$. Somit ergibt sich $v < v' \Rightarrow t_1(a, u, v) < t_1(a, u, v')$. Analog zu (1) zeigt man auch $t_1(a, u, v) \leqq t_1(a, u, v') \Rightarrow v \leqq v'$ und $t_1(a, u, v) < t_1(a, u, v') \Rightarrow v < v'$.

(3) Es seien die Voraussetzungen von (A3) erfüllt.

a) Es sei $u \leqq u_0$. Aus $x_1 = x_2$ folgt $t(x_1, u, v_1) = t(x_1, u_0, v_0) = t(x_1, u, v_2)$, woraus sich wegen (K2) $v_1 = v_2$ ergibt. Ist umgekehrt $v_1 = v_2$, dann ist $t(x_1, u, v_1) = = t(x_1, u_0, v_0)$, $t(x_2, u, v_1) = t(x_2, u_0, v_0)$, woraus sich wegen $\bar{u} \neq \bar{u}_0$ nach (K'3) $x_1 = x_2$ ergibt. Es gilt also $x_1 < x_2 \Leftrightarrow v_1 < v_2$.

b) Ist $u_0 \leqq u$, so wird ganz analog zu a) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow v_2 < v_1$ bewiesen.

(4) Es seien die Voraussetzungen von (A4) erfüllt. Ist $x_1 = x_2$, dann $y_1 = y_2$, $t_1(y_1, u, v_1) = t_1(y_1, u, v_2)$, woraus sich nach (T2) $v_1 = v_2$ ergibt. Ist $v_1 = v_2$,

dann gilt $x_1 = t_1(y_1, u, v_1)$, $y_1 = t(x_1, u_0, v_0)$, $x_2 = t_1(y_2, u, v_1)$, $y_2 = t(x_2, u_0, v_0)$, woraus nach (T4) $x_1 = x_2$ folgt. So erhält man $x_1 < x_2 \Leftrightarrow v_1 < v_2$.

(5) Sind die Voraussetzungen von (A5) erfüllt, dann zeigen wir analog zu (4), daß $y_1 < y_2 \Leftrightarrow v_1 < v_2$ gilt.

Es sei $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ ein affiner lokaler Ternärring und sei R geordnet. Mit (A*3) bezeichnen wir die folgende Behauptung:

(A*3) Es sei $t(x_0, u_1, v_1) = t(x_0, u_2, v_2)$, $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$ und $u_1 \leqq u_2$. Aus $x_0 \leqq x$ bzw. $x \leqq x_0$ folgt $t(x, u_1, v_1) \leqq t(x, u_2, v_2)$ bzw. $t(x, u_2, v_2) \leqq t(x, u_1, v_1)$.

Satz 2. *Es sei $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ ein affiner lokaler Ternärring. Ist R geordnet und gilt* (A1), *dann ist* (A3) $\Leftrightarrow$ (A*3).

Beweis. (A3) $\Rightarrow$ (A*3). Wir nehmen an, daß (A3) gilt und die Voraussetzungen von (A*3) erfüllt sind. Setzen wir $y = t(x, u_2, v_2)$, dann gibt es nach (K2) genau ein Element $w \in R$ mit $y = t(x, u_1, w)$. Damit erhalten wir $t(x_0, u_1, v_1) = t(x_0, u_2, v_2)$, $t(x, u_1, w) = t(x, u_2, v_2)$. Wegen $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$, $u_1 \leqq u_2$, $x_0 \leqq x$ folgt aus (A3) $v_1 \leqq w$. Nach (A1) ergibt sich also $t(x, u_1, v_1) \leqq t(x, u_1, w)$ und aus $t(x, u_1, w) = t(x, u_2, v_2)$ folgt schließlich $t(x, u_1, v_1) \leqq t(x, u_2, v_2)$. Aus $x \leqq x_0$ erhält man ähnlicherweise $t(x, u_2, v_2) \leqq t(x, u_1, v_1)$.

(A*3) $\Rightarrow$ (A3). Wier nehmen an, daß (A*3) gilt und die Voraussetzungen von (A3) erfüllt sind.

1. Es sei $u \leqq u_0$.

a) Wir nehmen $x_1 \leqq x_2$ an. Wegen $t(x_1, u, v_1) = t(x_1, u_0, v_0)$, $\bar{u} \neq \bar{u}_0$, $u \leqq u_0$ und $x_1 \leqq x_2$ folgt aus (A*3) $t(x_2, u, v_1) \leqq t(x_2, u_0, v_0)$. Wegen $t(x_2, u, v_2) = t(x_2, u_0, v_0)$ ergibt sich also $t(x_2, u, v_1) \leqq t(x_2, u, v_2)$ und aus der Folgerung (1) folgt daraus $v_1 \leqq v_2$.

b) Es sei $v_1 \leqq v_2$. Nach (A1) gilt $t(x_1, u, v_1) \leqq t(x_1, u, v_2)$, also $t(x_1, u_0, v_0) \leqq t(x_1, u, v_2)$. Es sei $x_2 < x_1$. Wegen $t(x_2, u, v_2) = t(x_2, u_0, v_0)$, $\bar{u} \neq \bar{u}_0$, $u \leqq u_0$ erhalten wir dann nach (A*3) $t(x_1, u, v_2) \leqq t(x_1, u_0, v_0)$. Da zugleich $t(x_1, u_0, v_0) \leqq t(x_1, u, v_2)$ ist, folgt daraus $t(x_1, u_0, v_0) = t(x_1, u, v_2)$. Wegen $t(x_2, u, v_2) = t(x_2, u_0, v_0)$ und $t(x_1, u, v_2) = t(x_1, u_0, v_0)$ gilt nach (K'3) $x_1 = x_2$, was ein Widerspruch ist. Somit erhalten wir $x_1 \leqq x_2$.

2. Gilt $u_0 \leqq u$, so verfahren wir genauso wie im Teil 1.

Bemerkung 3. Unter Anwendung der Folgerung (3) läßt sich zeigen, daß in (A*3) $x_0 < x \Rightarrow t(x, u_1, v_1) < t(x, u_2, v_2)$ bzw. $x < x_0 \Rightarrow t(x, u_2, v_2) < t(x, u_1, v_1)$ gilt.

Satz 3. *Es sei $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärring und $T' = (R/R_0, t')$ der zugehörige Restklassen-Ternärkörper. Sind x_1, x_2, x drei Elemente von R mit $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ und $x_1 \leqq x \leqq x_2$, dann $\bar{x}_1 = \bar{x}$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$ und zugleich $\bar{x}_1 \neq \bar{x}$ gilt. Nach (K2) gibt es genau ein $v_0 \in R$ mit $0 = t(x, 1, v_0)$. Gilt $\bar{y}_1 = \bar{0}$ für $y_1 = t(x_1, 1, v_0)$, dann ergibt sich nach Satz 1 $\bar{0} = \overline{t(x_1, 1, v_0)} = t'(\bar{x}_1, \bar{1}, \bar{v}_0)$ und $0 = t(x, 1, v_0) \Rightarrow \bar{0} = t'(\bar{x}, \bar{1}, \bar{v}_0)$. Da $T' = (R/R_0, t')$ ein Ternärkörper ist, gilt nach (K1) zugleich auch $\bar{0} = t'(\bar{x}, \bar{0}, \bar{0}) = t'(\bar{x}_1, \bar{0}, \bar{0})$. Wegen $t'(\bar{x}_1, \bar{1}, \bar{v}_0) = t'(\bar{x}_1, \bar{0}, \bar{0})$ und $t'(\bar{x}, \bar{1}, \bar{v}_0) = t'(\bar{x}, \bar{0}, \bar{0})$ erhält man nach (K3) $\bar{x} = \bar{x}_1$, also einen Widerspruch. Mithin ist $\bar{y}_1 \neq \bar{0}$. Wegen $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ und $\bar{y}_1 \neq \bar{0}$ gibt es nach (T3) genau ein Paar $(u, v) \in R_0 \times R$ mit $x_1 = t_1(y_1, u, v)$ und $x_2 = t_1(0, u, v)$. Da aus $x_2 = t_1(0, u, v)$ nach (T5) $x_2 = v$ folgt, gilt $y_1 = t(x_1, 1, v_0)$, $0 = t(x, 1, v_0)$, $x_1 = t_1(y_1, u, x_2)$, $x = t_1(0, u, x)$. Unserer Voraussetzung $x_1 \leqq x$ nach folgt also gemäß (A4) $x_2 \leqq x$. Wegen $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ und $\bar{x}_1 \neq \bar{x}$ ist $\bar{x} \neq \bar{x}_2$ und $x_2 < x$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $x \leqq x_2$. Damit erhalten wir $\bar{x}_1 = \bar{x}$.

Definition 12. Ein Ternärkörper $T = (R, t)$ heißt *geordnet*, wenn die Menge R so geordnet ist, daß (A1) und die folgende Bedingungen gelten:

(A'3) Es sei $t(x_0, u_1, v_1) = t(x_0, u_2, v_2)$, $u_1 < u_2$. Gilt $x_0 < x$ bzw. $x_0 < x$, dann ist $t(x, u_1, v_1) < t(x, u_2, v_2)$ bzw. $t(x, u_2, v_2) < t(x, u_1, v_1)$. (Siehe [1]).

Satz 4. *Ist $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärring und $T = (R, t)$ der zugehörige lokale Ternärring mit vollständigem Ideal R_0, dann ist $T' = (R/R_0, t')$ ein geordneter Ternärkörper.*

Beweis. Auf der Menge $R' = R/R_0$ erklären wir eine binäre Relation $\leqq$ folgenderweise: Für $\bar{x}, \bar{y} \in R'$ setzen wir $\bar{x} \leqq \bar{y}$ genau dann, wenn es Elemente $a \in \bar{x}$, $b \in \bar{y}$ mit $a \leqq b$ gibt. Diese Definition ist von der Wahl der Elemente aus $\bar{x}$ und $\bar{y}$ unabhängig: Ist $\bar{x} = \bar{y}$, dann gilt $\bar{a} = \bar{b}$ für beliebige $a \in \bar{x}$, $b \in \bar{y}$. Es sei also $\bar{x} < \bar{y}$. Dann gibt es Elemente $a \in \bar{x}$, $b \in \bar{y}$ mit $a \leqq b$. Ist b_1 ein Element von $\bar{y}$ mit $b_1 \leqq a$, dann gilt $b_1 \leqq a \leqq b$, was wegen $\bar{b}_1 = \bar{b}$ und $\bar{a} \neq \bar{b}_1$ im Widerspruch zum Satz 3 steht. Mithin ist $a \leqq b_1$. Ähnlicherweise ergibt sich für ein beliebiges Element $a_1 \in \bar{x}$, daß $a_1 \leqq b$ gilt. Es ist leicht nachzuprüfen, daß die auf der Menge R' eingeführte Relation $\leqq$ eine Anordnung ist ([6], Def. 1). Wir zeigen, daß diese Anordnung den Forderungen (A1) und (A'3) genügt.

Ad (A1). Es seien $\bar{v}, \bar{v}' \in R'$ mit $\bar{v} \leqq \bar{v}'$. Dann gibt es Elemente $w, w' \in R$ mit $w \leqq w'$ und $\bar{w} = \bar{v}$, $\bar{w}' = \bar{v}'$. Wegen $w \leqq w'$ ergibt sich $t(a, u, w) \leqq t(a, u, w')$ für alle $a, u \in R$. Wegen $\overline{t(a, u, w)} = t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{w})$ und $\overline{t(a, u, w')} = t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{w}')$ gilt nach der Definition der Anordnung auf R': $t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{w}) \leqq t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{w}')$, also $t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{v}) \leqq t'(\bar{a}, \bar{u}, \bar{v}')$.

Ad (A'3). Es seien $t'(\bar{x}_0, \bar{u}_1, \bar{v}_1) = t'(\bar{x}_0, \bar{u}_2, \bar{v}_2)$, $\bar{u}_1 < \bar{u}_2$ und $\bar{x}_0 < \bar{x}$. Wir wählen Elemente $x_0' \in \bar{x}_0$, $u_1' \in \bar{u}_1$, $v_1' \in \bar{v}_1$, $u_2' \in \bar{u}_2$. Setzen wir $y = t(x_0', u_1', v_1')$, dann gibt es nach (K2) genau ein $w \in R$ mit $y = t(x_0', u_2', w)$. Wegen $\bar{y} = t'(\bar{x}_0, \bar{u}_1, \bar{v}_1) = t'(\bar{x}_0, \bar{u}_2, \bar{v}_2) = t'(\bar{x}_0, \bar{u}_2, \bar{w})$ erhalten wir nach (K2) $\bar{w} = \bar{v}_2$ und mithin $w \in \bar{v}_2$.

Ist $x' \in \bar{x}$, dann gilt $t(x'_0, u'_1, v'_1) = t(x'_0, u'_2, w)$, $u'_1 < u'_2$, $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$ und $x'_0 < x'$. Nach Satz 2 ergibt sich dann $t(x', u'_1, v'_1) \leqq t'(x', u'_2, w)$. Nach (K3) folgt aus $t'(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{v}_1) = t'(\bar{x}, \bar{u}_2, \bar{w}) = t'(\bar{x}, \bar{u}_2, \bar{v}_2)$ wegen $t'(\bar{x}_0, \bar{u}_1, \bar{v}_1) = t'(\bar{x}_0, \bar{u}_2, \bar{v}_2)$ die Gleichheit $\bar{x}_0 = \bar{x}$, was aber ein Widerspruch ist. Nach der Definition der Anordnung von R' gilt also $t'(\bar{x}, \bar{u}_1, \bar{v}_1) < t'(\bar{x}, \bar{u}_2, \bar{v}_2)$. Der Rest des Beweises wird analog geführt.

Satz 5. *Es sei $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärring. Sind u, u_0 zwei Elemente von R mit $\bar{u} \neq \bar{u}_0$ und $u \leqq u_0$, dann gilt $0 \leqq x \Rightarrow t(x, u, v) \leqq \leqq t(x, u_0, v)$ und $x \leqq 0 \Rightarrow t(x, u_0, v) \leqq t(x, u, v)$ für ein beliebiges $v \in R$.*

Beweis. a) Es seien $x, v \in R$ mit $0 \leqq x$. Setzen wir $y = t(x, u, v)$, dann gibt es genau ein $v_0 \in R$ mit $y = t(x, u_0, v_0)$. Da zugleich $t(0, u, v_0) = t(0, u_0, v_0)$ gilt, ergibt sich nach (A3) $0 \leqq x \Rightarrow v_0 \leqq v$. Nach (A1) ist dann $v_0 \leqq v \Rightarrow t(x, u_0, v_0) \leqq \leqq t(x, u_0, v)$, also $t(x, u, v) \leqq t(x, u_0, v)$.

b) Ganz ähnlich geht man im Falle $x \leqq 0$ vor.

Bemerkung 4. Nach Folgerungen (1) und (3) der Definition 11 gilt $0 < x \Rightarrow \Rightarrow t(x, u, v) < t(x, u_0, v)$ und $x < 0 \Rightarrow t(x, u_0, v) < t(x, u, v)$.

Satz 6. *Es sei $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärring. Sind u, x_1, x_2 Elemente von R mit $\bar{u} \neq \bar{0}$ und $x_1 \leqq x_2$, dann gilt $0 \leqq u \Rightarrow t(x_1, u, v) \leqq \leqq t(x_2, u, v)$ und $u \leqq 0 \Rightarrow t(x_2, u, v) \leqq t(x_1, u, v)$ für ein beliebiges $v \in R$.*

Beweis. a) Es seien $u, v \in R$ mit $0 \leqq u$, $\bar{u} \neq \bar{0}$. Setzen wir $v_1 = t(x_1, u, v)$, $v_2 = = t(x_2, u, v)$, dann gilt auch $v_1 = t(x_1, 0, v_1)$ und $v_2 = t(x_2, 0, v_2)$, woraus wir nach (A3) $x_1 \leqq x_2 \Rightarrow v_1 \leqq v_2 \Rightarrow t(x_1, u, v) \leqq t(x_2, u, v)$ erhalten.

b) Analog zu a) geht man im Falle $u \leqq 0$ vor.

Bemerkung 5. Für $\bar{u} \neq \bar{0}$ und $x_1 < x_2$ gilt $0 < u \Rightarrow t(x_1, u, v) < t(x_2, u, v)$ und $u < 0 \Rightarrow t(x_2, u, v) < t(x_1, u, v)$.

Satz 7. *Im geordneten affinen lokalen Ternärring $\mathcal{T} = (R, t, t_1)$ gilt $0 < 1$.*

Beweis. Es sei $1 \leqq 0$. Nach Satz 5 und Bemerkung 4 erhalten wir wegen $\bar{0} \neq \bar{1}$, daß $t(x, 1, v) < t(x, 0, v)$ für beliebige $v, x \in R$ mit $0 < x$ gilt. Für $v = 0$ ergibt sich speziell $x < 0$, im Widerspruch zu $0 < x$.

Bemerkung 6. In der im Beweis von Satz 4 eingeführten Anordnung von $T' = = (R', t')$ gilt nach Satz 7 $\bar{0} < \bar{1}$. Für die Elemente $a \in \bar{0}$, $b \in \bar{1}$ von R ergibt sich dann $a < b$.

Satz 8. *In jedem geordneten affinen lokalen Ternärring existieren unendlich viele voneinander ferne Elemente.*

Beweis. Es sei $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärring. Setzen wir im Satz 6 $x_1 = 0$, $x_2 = u = v = 1$, so nach Bemerkung 5 gilt wegen $0 < 1$ die Ungleichheit $t(0, 1, 1) = 1 < t(1, 1, 1) = v_1$. Sind die Elemente 1, v_1 benachbart, dann ist $t'(\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}) = \bar{1} = t'(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$. Da zugleich $\bar{1} = t'(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}) = t'(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1})$ gilt, erhalten wir nach (K3) $\bar{0} = \bar{1}$, denn $T' = (R/R_0, t')$ ist ein Ternärkörper. Die Elemente 1, v_1 sind also fern. Es seien 0, v_1 benachbart. Nach Satz 3 folgt dann aus $0 < 1 < v_1$ die Gleichheit $\bar{1} = \bar{0}$, was ein Widerspruch ist. Die Elemente $0, 1, v_1$ sind also voneinander fern. Wegen $1 < v_1$ gilt nach Satz 6 $v_1 = t(1, 1, 1) < < t(v_1, 1, 1) = v_2$ und das Element v_2 ist von den Elementen $0, 1, v_1$ fern. Wegen $v_1 < v_2$ gilt $v_2 = t(v_1, 1, 1) < t(v_2, 1, 1) = v_3$ mit $\bar{v}_2 \neq \bar{v}_3$ u.s.w.

Satz 9. *Es sei $\mathscr{R} = (R, +, \cdot)$ ein konvex fastgeordneter lokaler Ring mit maximalem Ideal R_0. Setzt man $t(a, b, c) = ab + c$ $\forall a, b, c \in R$ und $t_1(a, b, c) = = ab + c$ $\forall a, c \in R$ $\forall b \in R_0$, dann ist $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärring.*

Beweis. Nach [5], Beispiel 2 und Satz 4 erfüllt $\mathscr{T}$ die Forderungen (T1) bis (T4) der Definition 10. Es gilt dabei $t_1(0, a, b) = 0a + b = b$ und $\mathscr{T}$ ist ein affiner lokaler Ternärring. Wir zeigen, daß $\mathscr{T}$ geordnet ist (Elemente von R/R_0 bezeichnen wir mit $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$).

Ad (A1) Es seien $v, v' \in R$ mit $v \leqq v'$. Nach (R1) gilt dann $v + au \leqq v' + au$ und $au + v \leqq au + v'$ für alle $a, u \in R$, also ist $t(a, u, v) \leqq t(a, u, v')$.

Ad (A2) Wegen $t(a, u, v) = t_1(a, u, v)$ $\forall a, v \in R$ $\forall u \in R_0$ verfahren wir analog zu (A1).

Ad (A3) Es sei $t(x_1, u, v_1) = t(x_1, u_0, v_0)$, $t(x_2, u, v_2) = t(x_2, u_0, v_0)$, $\bar{u} \neq \bar{u}_0$, also $x_1 u + v_1 = x_1 u_0 + v_0$ und $x_2 u + v_2 = x_2 u_0 + v_0$. Die letzten Gleichheiten ergeben $(x_2 - x_1) u + v_2 - v_1 = (x_2 - x_1) u_0$, also $(x_2 - x_1)(u_0 - u) = v_2 - v_1$.

1. Es sei $u \leqq u_0$. Wegen $\bar{u} \neq \bar{u}_0$ gilt $u_0 - u \notin R_0$.

a) Aus $x_1 \leqq x_2$ ergibt sich nach (R1) $0 \leqq x_2 - x_1$ und aus Folgerung (2) der Definition 3 folgt $(x_2 - x_1) u \leqq (x_2 - x_1) u_0$, also $0 \leqq (x_2 - x_1)(u_0 - u)$ und $0 \leqq v_2 - v_1$. Somit ist $v_1 \leqq v_2$.

b) Es sei $v_1 \leqq v_2$. Wegen $0 \leqq v_2 - v_1$ erhält man $0 \leqq (x_2 - x_1)(u_0 - u)$ und $(x_2 - x_1) u \leqq (x_2 - x_1) u_0$. Wegen $u_0 - u \notin R_0$ und $u \leqq u_0$ gilt nach Folgerung (4) der Definition 3 $0 \leqq x_2 - x_1$, also $x_1 \leqq x_2$.

2. Im Falle $u_0 \leqq u$ geht man ganz analog zu 1 vor.

Ad (A4) Es sei $y_1 = t(x_1, u_0, v_0)$, $y_2 = t(x_2, u_0, v_0)$, $x_1 = t_1(y_1, u, v_1)$, $x_2 = = t_1(y_2, u, v_2)$ mit $u \in R_0$, also $y_1 = x_1 u_0 + v_0$, $y_2 = x_2 u_0 + v_0$, $x_1 = y_1 u + v_1$, $x_2 = y_2 u + v_2$. Die letzten Gleichheiten ergeben $y_1 - y_2 = (x_1 - x_2) u_0$, $v_2 - v_1 = = (x_2 - x_1) + (y_1 - y_2) u$, also $v_2 - v_1 = (x_2 - x_1) + (x_1 - x_2) u_0 u = (x_2 - - x_1)(1 - u_0 u)$. Wegen $u \in R_0$ gilt dabei $u_0 u \in R_0$, $1 - u_0 u \notin R_0$ und nach (R3) ist mithin $u_0 u \leqq 1$.

1. Es sei $x_1 \leqq x_2$, also $0 \leqq x_2 - x_1$. Wegen $u_0 u \leqq 1$ und $1 - u_0 u \notin R_0$ ergibt sich nach Folgerung (2) der Definition 3 $(x_2 - x_1) u_0 u \leqq x_2 - x_1$, also $0 \leqq \leqq (x_2 - x_1)(1 - u_0 u)$, was $0 \leqq v_2 - v_1$ und $v_1 \leqq v_2$ bedeutet.

2. Aus $v_1 \leqq v_2$ folgt $0 \leqq (x_2 - x_1)(1 - u_0 u)$ und $(x_2 - x_1) u_0 u \leqq x_2 - x_1$. Wegen $u_0 u \leqq 1$ und $1 - u_0 u \notin R_0$ gilt nach Folgerung (4) der Definition 3 $0 \leqq \leqq x_2 - x_1$, also $x_1 \leqq x_2$.

Ad (A5) Es sei $x_1 = t_1(y_1, u_0, v_0)$, $x_2 = t_1(y_2, u_0, v_0)$, $y_1 = t(x_1, u, v_1)$, $y_2 = = t(x_2, u, v_2)$ mit $u_0 \in R_0$, also $x_1 = y_1 u_0 + v_0$, $x_2 = y_2 u_0 + v_0$, $y_1 = x_1 u + v_1$, $y_2 = x_2 u + v_2$. Daraus folgt $x_1 - x_2 = (y_2 - y_1) u_0$, $v_2 - v_1 = (y_2 - y_1) + + (x_1 - x_2) u$ und $v_2 - v_1 = (y_2 - y_1)(1 - u_0 u)$. Ferner geht man analog zu Ad (A4) vor.

Satz 10. *Es sei $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärring und $T = (R, t)$ der zu $\mathscr{T}$ gehörige lokale Ternärring. Auf der Menge R definieren wir binäre Operationen $+, \cdot$ mit $t(1, a, b) = a + b$, $t(a, b, 0) = ab$ für alle $a, b \in R$ und nehmen wir dabei $t(a, b, c) = ab + c$ an. Ist $\mathscr{R} = (R, +, \cdot)$ ein assoziativer Ring, dann ist $\mathscr{R}$ ein konvex fastgeordneter lokaler Ring.*

Beweis. Es sei R_0 das vollständige Ideal von $T = (R, t)$. Dann ist $R_0 \neq R$. Zunächst beweisen wir, daß R_0 ein Rechtsideal von $\mathscr{R}$ ist, d.h. $xa \in R_0$, $x + y \in R_0$, $-x \in R_0$ für beliebige $a \in R$ und $x, y \in R_0$ gilt. Dazu verwenden wir die Definition 6 eines Ideals von T, wo, unserer Definition von $+$ wegen, $a \oplus r = a + r$ für $a \in R$, $r \in R_0$ gilt.

1. Es seien $a \in R$, $x \in R_0$. Setzen wir $xa = (0 + x)(a + 0) + (0 + 0)$, dann ist $xa = t(0 + x, a + 0, 0 + 0)$ und nach (iii), Definition 6 gibt es ein Element $r' \in R_0$ mit $xa = t(0, a, 0) + r' = r'$. Mithin ist $xa \in R_0$.

2. Es sei $x \in R_0$. Setzen wir $b = a + x$ für ein Element $a \in R$, dann gilt $a = b - x$. Nach (ii), Definition 6 gibt es ein $r' \in R_0$ mit $a = b + r'$. Daraus ergibt sich $b - x = = b + r'$ und $r' = -x \in R_0$.

3. Es seien $x, y \in R_0$. Setzen wir $x + y = (0 + x)(1 + 0) + (0 + y)$, dann ist $x + y = t(0 + x, 1 + 0, 0 + y)$ und nach (iii) gibt es ein $r' \in R_0$ mit $x + y = = t(0, 1, 0) + r' = r'$.

Ferner beweisen wir, daß R_0 der einzige maximale Rechtsideal von $\mathscr{R}$ ist. Es sei Q ein Ideal von $\mathscr{R}$, welches in R_0 nicht enthalten ist. Dann gibt es ein Element $m \in Q$ mit $m \notin R_0$, also $\bar{m} \neq \bar{0}$ in $T' = (R/R_0, t')$. Setzen wir $a = m$, $b = 1$, $c = d = 0$, so gibt es wegen $\bar{m} \neq \bar{0}$ nach (K'4) ein Paar $(x, y) \in R \times R$ mit $1 = t(m, x, y)$ und $0 = t(0, x, y)$, also mit $1 = mx + y$ und $0 = 0x + y$. Daraus ergibt sich $y = 0$ und $1 = mx \in Q$, weil $m \in Q$ und Q ein Rechtsideal von $\mathscr{R}$ ist. Aus $1 \in Q$ folgt dann $Q = R$. Alle von R verschiedene Rechtsideale von $\mathscr{R}$ sind in R_0 enthalten und daher ist R_0 der einzige maximale Rechtsideal von $\mathscr{R}$. Nach Definition 2 ist also $\mathscr{R}$ ein lokaler Ring.

Wir beweisen, daß $\mathscr{R}$ konvex fastgeordnet ist: Wegen $t(a, b, c) = ab + c$ gilt $t(1, a, b) = a + b = t(a, 1, b)$.

Ad (R1) Es seien $a, b, v \in R$ mit $a \leqq b$. Setzen wir im Satz 6 $u = 1$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, dann erhalten wir $0 \leqq 1 \Rightarrow t(a, 1, v) \leqq t(b, 1, v)$, also $a + v \leqq b + v$.

Ad (R2) Es seien $a, b \in R$ mit $0 \leqq a$, $0 \leqq b$ und $b \notin R_0$. Setzen wir im Satz 5 $u = 0$, $u_0 = b$, $x = a$, $v = 0$, dann erhalten wir wegen $\bar{b} \neq \bar{0}$ und $0 \leqq b$: $0 \leqq a \Rightarrow$ $\Rightarrow t(a, 0, 0) \leqq t(a, b, 0)$, also $0 \leqq ab$.

Ad (R3) Ist $a \in R_0$, dann ist $a \in \bar{0}$ und $1 \in \bar{1}$, wo $\bar{0}, \bar{1} \in T'$. Nach Bemerkung 6 gilt dann $a \leqq 1$.

Es sei $\mathscr{A} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ eine AK-Ebene ([6], Def. 3, [5], Def. 10). Durch ein Koordinatensystem (x, y, E) von $\mathscr{A}$ ist ein affiner lokaler Ternärring $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}$ zu erklären ([5] und [6], Behauptung (K)). Den Sätzen 13 bis 17 von [6] nach erhalten wir:

Satz 11. *Ist eine AK-Ebene $\mathscr{A}$ konvex geordnet* ([6], Definitionen 5 und 8), *dann ist der zu $\mathscr{A}$ gehörige affine lokale Ternärring $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}$ geordnet.*

Es seien $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ ein affiner lokaler Ternärring, $T = (R, t)$ der zu $\mathscr{T}$ gehörige lokale Ternärring mit maximalem Ideal R_0 und $T' = (R/R_0, t')$ der durch R_0 bestimmte Restklassen-Ternärkörper. Ferner seien $\mathscr{P}, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ Mengen mit $\mathscr{P} \cap \mathscr{L}_1 = \mathscr{P} \cap \mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset$ und $\xi : R \times R \leftrightarrow \mathscr{P}$, $\eta : R \times R \leftrightarrow \mathscr{L}_1$, $\zeta : R_0 \times R \leftrightarrow \mathscr{L}_2$ bijektive Abbildungen. Setzen wir $(x, y)^\xi = [x, y]$, $(m, k)^\eta = \langle m, k \rangle$, $(m, k)^\zeta = \langle\!\langle m, k \rangle\!\rangle$, $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$ und definieren wir eine Inzidenzrelation $I \subset \mathscr{P} \times \mathscr{L}$ durch $[x, y] \, \mathrm{I} \langle m, k \rangle \Leftrightarrow y = t(x, m, k)$, $[x, y] \, \mathrm{I} \langle\!\langle m, k \rangle\!\rangle \Leftrightarrow x = t_1(y, m, k)$, dann ist das Tripel $\mathscr{A}_{\mathscr{T}} = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \mathrm{I})$ eine AK-Ebene ([5], Satz 7). Die Elemente von $\mathscr{P}$ bzw. $\mathscr{L}$ heißen Punkte bzw. Geraden von $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$. Die Geraden $\langle m_1, k_1 \rangle$, $\langle m_2, k_2 \rangle$ bzw. $\langle\!\langle m_1, k_1 \rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle m_2, k_2 \rangle\!\rangle$ sind genau dann parallel, wenn $m_1 = m_2$ ist. Zum Ternärkörper T' läßt sich ähnlich wie oben eine affine Ebene $\mathscr{A}_{T'}$ erklären. Die Abbildung $\varkappa$ mit $[x, y] \to [\bar{x}, \bar{y}]$, $\langle m, k \rangle \to \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle$, $\langle\!\langle m, k \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \bar{m}, \bar{k} \rangle\!\rangle$ ist ein Epimorphismus der AK-Ebene $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$ auf die affine Ebene $\mathscr{A}_{T'}$. Ist A bzw. a ein Punkt bzw. eine Gerade von $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$, dann setzen wir $A\varkappa = \bar{A}$ bzw. $a\varkappa = \bar{a}$. Sind $A = [x_1, y_1]$, $B = [x_2, y_2]$ zwei Punkte von $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$, dann gilt $\bar{A} = \bar{B}$ genau dann, wenn $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \wedge \bar{y}_1 = \bar{y}_2$ ist. Sind $p = \langle m_1, k_1 \rangle$, $q = \langle m_2, k_2 \rangle$ zwei Geraden von $\mathscr{L}_1$, dann $\bar{p} = \bar{q} \Leftrightarrow \bar{m}_1 = \bar{m}_2 \wedge \bar{k}_1 = \bar{k}_2$. Für zwei Geraden $p = \langle\!\langle m_1, k_1 \rangle\!\rangle$, $q = \langle\!\langle m_2, k_2 \rangle\!\rangle$ gilt $\bar{p} = \bar{q}$ genau dann, wenn $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$. Zwei Punkte A, B mit $\bar{A} \neq \bar{B}$ heißen fern. Anderenfalls sind A, B benachbart.

Satz 12. *Ist $\mathscr{T} = (R, t, t_1)$ ein geordneter affiner lokaler Ternärring, dann ist die AK-Ebene $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$ konvex geordnet.*

Beweis. I. Auf der Punktmenge beliebiger Geraden $\langle u, v \rangle \in \mathscr{L}_1$ erklären wir eine binäre Relation $\leqq$ durch die Anordnung der Menge R wie folgt: Ist $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2] \, \mathrm{I} \, \langle u, v \rangle$, dann $[x_1, y_1] \leqq [x_2, y_2] \Leftrightarrow x_1 \leqq x_2$. Es ist leicht nachzuprüfen, daß diese binäre Relation eine Anordnung ist. (Die Anordnungen auf R und auf der

Punktmenge von $\langle u, v\rangle$ bezeichnen wir mit gleichem Symbol $\leqq$). Auf der Punktmenge einer beliebigen Geraden $\langle\!\langle u, v\rangle\!\rangle \in \mathscr{L}_2$ definieren wir eine Anordnung ähnlicherweise: Gilt $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \mathrm{I} \langle\!\langle u, v\rangle\!\rangle$, dann $[x_1, y_1] \leqq [x_2, y_2] \Leftrightarrow y_1 \leqq y_2$. Auf jeder Geraden $\langle u, v\rangle \in \mathscr{L}_1$ erklären wir durch die oben definierte Anordnung $\leqq$ eine Zwischenrelation (***) wie folgt: Ist $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3] \mathrm{I} \langle u, v\rangle$, dann gilt $([x_1, y_1]\,[x_2, y_2]\,[x_3, y_3]) \Leftrightarrow [x_1, y_1] \leqq [x_2, y_2] \leqq [x_3, y_3] \vee [x_3, y_3] \leqq$ $\leqq [x_2, y_2] \leqq [x_1, y_1] \Leftrightarrow x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \vee x_3 \leqq x_2 \leqq x_1$. Analog wird auch eine Zwischenrelation auf jeder Geraden von $\mathscr{L}_2$ definiert.

II Wir beweisen, daß auf jeder Geraden von $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$ mindestens drei voneinander ferne Punkte liegen. Es sei $\langle u, v\rangle$ eine Gerade von $\mathscr{L}_1$. Ein Punkt $[x, y]$ liegt genau dann auf $\langle u, v\rangle$, wenn $y = t(x, u, v)$ ist. Für ein beliebiges $x \in R$ gibt es also genau einen Punkt $[x, y]$, der auf $\langle u, v\rangle$ liegt. Sind die Elemente $x_1, x_2 \in R$ fern, dann gilt $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ und die zugehörigen Punkte $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$ von $\langle u, v\rangle$ sind auch fern. Nach Satz 8 enthält die Menge R unendlich viele voneinander ferne Elemente. Mithin gibt es auch auf der Geraden $\langle u, v\rangle$ unendlich viele voneinander ferne Punkte. Ähnliche Betrachtungen kann man auch für eine beliebige Gerade von $\mathscr{L}_2$ durchführen.

III. Wir beweisen, daß die auf der Geraden von $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$ definierten Zwischenrelationen durch die Parallelprojektionen ([6], Def. 4) reproduziert sind. Es sei also φ eine Parallelprojektion der Geraden g auf die Gerade g' mit der Richtung $\Pi(h)$. Dann gilt $\bar{h} \nparallel \bar{g}$, $\bar{h} \nparallel \bar{g}'$. Es seien ferner $A_i = [x_i, y_i]$, $A'_i = [x'_i, y'_i]$ die Punkte mit $A_i \mathrm{I}\, g$, $A'_i \mathrm{I}\, g'$, $A_i, A'_i \mathrm{I}\, h_i$, wo $h_i \in \Pi(h)$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Wir sollen $(A_1A_2A_3) \Rightarrow$ $\Rightarrow (A'_1A'_2A'_3)$ beweisen. Dazu werden wir einzelne Fälle untersuchen.

1. Es seien $g, g', h \in \mathscr{L}_1$. Dann läßt sich $g = \langle u_1, v_1\rangle$, $g' = \langle u_2, v_2\rangle$, $h =$ $= \langle u, v\rangle$ setzen. Wegen $\bar{h} \nparallel \bar{g}$, $\bar{h} \nparallel \bar{g}'$ gilt dabei $\bar{u} \neq \bar{u}_1$ und $\bar{u} \neq \bar{u}_2$. Ferner sei $h_i = \langle u, w_i\rangle$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$. Wegen $A_i \mathrm{I}\, g$ bzw. $A'_i \mathrm{I}\, g'$ gilt $y_i = t(x_i, u_1, v_1)$ bzw. $y'_i = t(x'_i, u_2, v_2)$ und wegen $A_i, A'_i \mathrm{I}\, h_i$ dann $y_i = t(x_i, u, w_i)$, $y'_i = t(x'_i, u, w_i)$. Daraus erhält man

$$(*)\quad t(x_i, u_1, v_1) = t(x_i, u, w_i),$$
$$(**)\quad t(x'_i, u_2, v_2) = t(x'_i, u, w_i).$$

Es sei $(A_1A_2A_3)$. Dann gilt entweder $A_1 \leqq A_2 \leqq A_3$ oder $A_3 \leqq A_2 \leqq A_1$. Wir nehmen an, daß $A_1 \leqq A_2 \leqq A_3$, also $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$ ist.

a) Es sei $u \leqq u_1$ und $u \leqq u_2$. Wegen $\bar{u} \neq \bar{u}_1$, $u \leqq u_1$ und $x_1 \leqq x_2$ ergibt sich nach (A3) und (*) für $i \in \{1, 2\}$ die Ungleichheit $w_1 \leqq w_2$. Dann wegen $\bar{u} \neq \bar{u}_2$, $u \leqq u_2$ und $w_1 \leqq w_2$ folgt aus (**) nach (A3) $x'_1 \leqq x'_2$. Ähnlich ergibt sich für $i \in \{2, 3\}$ $x_2 \leqq x_3 \Rightarrow w_2 \leqq w_3$ und $w_2 \leqq w_3 \Rightarrow x'_2 \leqq x'_3$. So gilt $x'_1 \leqq x'_2 \leqq x'_3$, also $(A'_1A'_2A'_3)$.

b) Ist $u \leqq u_1$ und $u_2 \leqq u$, dann erhalten wir nach (A3) unter Anwendung von (*) und (**) schrittweise $x_1 \leqq x_2 \Rightarrow w_1 \leqq w_2 \Rightarrow x'_2 \leqq x'_1$ und $x_2 \leqq x_3 \Rightarrow w_2 \leqq w_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x'_3 \leqq x'_2$. Daraus folgt $x'_3 \leqq x'_2 \leqq x'_1$, also $(A'_1A'_2A'_3)$.

Alle weitere Fälle $u_1 \leqq u$, $u \leqq u_2$ und $u_1 \leqq u$, $u_2 \leqq u$ prüfen wir analog nach.

2. Es seien $g, h \in \mathscr{L}_1$, $g' \in \mathscr{L}_2$. Dann läßt sich $g = \langle u_1, v_1 \rangle$, $h = \langle u, v \rangle$ und $g' = \langle\!\langle u_2, v_2 \rangle\!\rangle$ schreiben. Da stets $\bar{h} \nparallel \bar{g}'$ gilt, sollen wir nur $\bar{h} \nparallel \bar{g}$, also $\bar{u} \neq \bar{u}_1$ voraussetzen. Setzen wir $h_i = \langle u, w_i \rangle$, dann gilt $y_i = t(x_i, u_1, v_1)$, $x_i' = t_1(y_i', u_2, v_2)$, $y_i = t(x_i, u, w_i)$ und $y_i' = t(x_i', u, w_i)$. Daraus erhalten wir

$(*)$ $t(x_i, u_1, v_1) = t(x_i, u, w_i)$,

$(**)$ $x_i' = t_1(y_i', u_2, v_2)$, $y_i' = t(x_i', u, w_i)$.

Es sei wieder $(A_1 A_2 A_3)$ und $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$.

a) Es sei $u \leqq u_1$. Für $i \in \{1, 2\}$ erhalten wir nach $(*)$ und (A3) $x_1 \leqq x_2 \Rightarrow w_1 \leqq w_2$. Nach (A5) folgt dann aus $(**)$ $w_1 \leqq w_2 \Rightarrow y_1' \leqq y_2'$. Für $i \in \{2, 3\}$ gilt ähnlich $x_2 \leqq x_3 \Rightarrow w_2 \leqq w_3 \Rightarrow y_2' \leqq y_3'$. Daher erhalten wir $y_1' \leqq y_2' \leqq y_3'$, also $(A_1' A_2' A_3')$.

b) Gilt $u_1 \leqq u$, so erhalten wir analog zu a) $x_1 \leqq x_2 \Rightarrow w_2 \leqq w_1 \Rightarrow y_2' \leqq y_1'$ und $x_2 \leqq x_3 \Rightarrow w_3 \leqq w_2 \Rightarrow y_3' \leqq y_2'$, also $y_3' \leqq y_2' \leqq y_1'$ und $(A_1' A_2' A_3')$.

3. Es seien $g \in \mathscr{L}_2$, $g', h \in \mathscr{L}_1$. Dann läßt sich $g = \langle\!\langle u_1, v_1 \rangle\!\rangle$, $g' = \langle u_2, v_2 \rangle$, $h = \langle u, v \rangle$, $h_i = \langle u, w_i \rangle$ mit $\bar{u}_2 \neq \bar{u}$ schreiben. Anaiog zu 1 und 2 erhalten wir

$(*)$ $x_i = t_1(y_i, u_1, v_1)$, $y_i = t(x_i, u, w_i)$,

$(**)$ $t(x_i', u_2, v_2) = t(x_i', u, w_i)$.

Es sei $y_1 \leqq y_2 \leqq y_3$. Nach (A5) folgt aus $(*)$ $y_1 \leqq y_2 \Rightarrow w_1 \leqq w_2$ und $y_2 \leqq y_3 \Rightarrow w_2 \leqq w_3$. Gilt $u \leqq u_2$, dann folgt aus $(**)$ und (A3) $w_1 \leqq w_2 \Rightarrow x_1' \leqq x_2'$ und $w_2 \leqq w_3 \Rightarrow x_2' \leqq x_3'$, also $x_1' \leqq x_2' \leqq x_3'$. Gilt $u_2 \leqq u$, dann erhalten wir $w_1 \leqq w_2 \Rightarrow x_2' \leqq x_1'$ und $w_2 \leqq w_3 \Rightarrow x_3' \leqq x_2'$, also $x_3' \leqq x_2' \leqq x_1'$.

4. Es seien $g, g' \in \mathscr{L}_2$, $h \in \mathscr{L}_1$. Dann ist $g = \langle\!\langle u_1, v_1 \rangle\!\rangle$, $g' = \langle\!\langle u_2, v_2 \rangle\!\rangle$, $h = \langle u, v \rangle$ und $h_i = \langle u, w_i \rangle$. Daraus ergibt sich

$(*)$ $x_i = t_1(y_i, u_1, v_1)$, $y_i = t(x_i, u, w_i)$,

$(**)$ $x_i' = t_1(y_i, u_2, v_2)$, $y_i' = t(x_i', u, w_i)$.

Es sei $y_1 \leqq y_2 \leqq y_3$. Nach $(*)$ und (A5) erhalten wir $y_1 \leqq y_2 \Rightarrow w_1 \leqq w_2$, $y_2 \leqq y_3 \Rightarrow w_2 \leqq w_3$. Nach $(**)$ und (A5) erhalten wir weiter $w_1 \leqq w_2 \Rightarrow y_1' \leqq y_2'$, $w_2 \leqq w_3 \Rightarrow y_2' \leqq y_3'$, also $y_1' \leqq y_2' \leqq y_3'$.

5. Es seien $g, g' \in \mathscr{L}_1$, $h \in \mathscr{L}_2$, also $g = \langle u_1, v_1 \rangle$, $g' = \langle u_2, v_2 \rangle$, $h = \langle\!\langle u, v \rangle\!\rangle$ und $h_i = \langle\!\langle u, w_i \rangle\!\rangle$. Daraus ergibt sich

$(*)$ $y_i = t(x_i, u_1, v_1)$, $x_i = t_1(y_i, u, w_i)$,

$(**)$ $y_i' = t(x_i', u_2, v_2)$, $x_i' = t_1(y_i', u, w_i)$.

Es sei $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$. Aus $(*)$ und (A4) folgt $x_1 \leqq x_2 \Rightarrow w_1 \leqq w_2$, $x_2 \leqq x_3 \Rightarrow w_2 \leqq w_3$ und aus $(**)$, (A4) folgt $w_1 \leqq w_2 \Rightarrow x_1' \leqq x_2'$, $w_2 \leqq w_3 \Rightarrow x_2' \leqq x_3'$, also $x_1' \leqq x_2' \leqq x_3'$.

III. Wir beweisen, daß $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$ konvex geordnet ist. Es seien $A_i \approx [x_i, y_i]$ drei Punkte der Geraden $\langle u, v \rangle$ und seien A_1, A_3 benachbart, also $\bar{x}_1 \approx \bar{x}_3$, $\bar{y}_1 = \bar{y}_3$.

Nehmen wir dabei $A_1 \leqq A_2 \leqq A_3$, also $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$ an, dann gilt nach Satz 3 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Wegen $A_1, A_2 \, \mathrm{I} \, \langle u, v \rangle$ ergibt sich $y_1 = t(x_1, u, v)$, $y_2 = t(x_2, u, v)$ und folglich $\bar{y}_1 = t'(\bar{x}_1, \bar{u}, \bar{v}) = t'(\bar{x}_2, \bar{u}, \bar{v}) = \bar{y}_2$. Wegen $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ und $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ sind daher die Punkte A_1, A_2 benachbart. Sind die Punkte A_i in einer Geraden von $\mathscr{L}_2$ enthalten, dann gehen wir ganz analog vor.

Bemerkung 7. V. Kunze studiert in [3] geordnete über kommutativen lokalen Ringen konstruierte AK-Ebenen. Die Parallelprojektionen $\varphi(a, b, \Pi(h))$ werden dabei einigermaßen allgemeiner als in der Definition 4, [6] eingeführt. Es wird dort nämlich die Gültigkeit von $\bar{a} \not\parallel \bar{h}$ nicht gefordert. Die mit dieser Definition der Parallelprojektionen erklärten geordneten AK-Ebenen führen zu den üblichen geordneten Ringen (Definition 1). In den so definierten geordneten AK-Ebenen gilt z.B. der folgende Satz: Haben zwei Geraden zwei Punkte P, Q gemeinsam, dann haben auch alle Punkte zwischen P, Q gemeinsam ([3], S. 66). Daraus folgt: Haben zwei Geraden zwei verschiedene Punkte gemeinsam, dann haben sie unendlich viele Punkte gemeinsam. Damit ist die Inzidenz von Punkten und Geraden beeinflußt und die Klasse der untersuchten AK-Ebenen einigeschränkt.

Literatur

[1] *Crampe, S.:* Angeordnete projektive Ebenen. Math. Z. *69*, 1958, 435—462.

[2] *Lambek, J.:* Lectures on rings and modules. Toronto, London 1966.

[3] *Kunze, M.:* Angeordnete Hjelmslevsche Geometrie. Dissertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 1975.

[4] *Machala, F.:* Erweiterte lokale Ternärringe. Czech. Math. Journal *27* (*102*), 1977, 560—572.

[5] *Machala, F.:* Koordinatisation affiner Ebenen mit Homomorphismus. Math. Slovaca *27*, 1977, No. 2, 181—193.

[6] *Machala, F.:* Angeordnete affine Klingenbergsche Ebenen. (Im Druck).

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UP).