Heinz Mitsch
Rechtsteilweise geordnete Gruppen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 30 (1980), No. 2, 250–258

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101675`

Czechoslovak Mathematical Journal, 30 (105) 1980, Praha

RECHTSTEILWEISE GEORDNETE GRUPPEN

H. MITSCH, Wien

(Eingegangen am 2. Juni 1978)

1. Einleitung. Eine Gruppe $(G, \cdot)$, die bezüglich einer binären Relation „$\leqq$" teilweise geordnet ist so, daß die Rechtsmonotonie der Multiplikation „$\cdot$" bezüglich „$\leqq$" gilt, d. h.

$$a \leqq b \Rightarrow ac \leqq bc \ \forall c \in G ,$$

heißt *rechtsteilweise geordnete Gruppe* (kurz: rtwg. Gruppe). Einleitende und speziell motivierte Untersuchungen von rtwg. Gruppen finden sich in MATSUSHITA [7], SMIRNOW [11] und ZAICEVA [12]; in BIGARD-KEIMEL-WOLFENSTEIN [1] ist ein kurzer Paragraph über rtwg. Gruppen aufgenommen. – Im Falle einer Totalordnung „$\leqq$", d. h. für sogenannte *rechtsangeordnete Gruppen* (kurz: rang. Gruppen), sind die Beiträge von COHN [3] und CONRAD [4] und jeweils ein Abschnitt in BOTTO MURA-RHEMTULLA [2] bzw. KOKORIN-KOPYTOV [6] als Übersicht zu nennen. – Für den Spezialfall, wo „$\leqq$" eine Verbandsordnung ist, wurde in [8] der Begriff *Rechtsverbandsgruppe* eingeführt; dies sind Gruppen, welche zugleich ein Verband sind und in denen bezüglich der beiden Verbandsoperationen „$\wedge$" und „$\vee$" die folgenden Rechtsdistributivgesetze der Multiplikation gelten:

$$(a \vee b) c = (ac) \vee (bc) , \quad (a \wedge b) c = (ac) \wedge (bc) \ \forall a, b, c \in G .$$

Hier soll eine erste Zusammenstellung der grundlegenden Eigenschaften von rtwg. Gruppen gegeben werden. Naturgemäß gleichen manche Ergebnisse und Beweise wörtlich jenen für teilweise geordnete Gruppen, welche noch die Linksmonotonie der Multiplikation erfüllen. Soferne es möglich war, die Argumentation allein auf die Rechtsmonotonie zu reduzieren, werden hier die Beweise nicht mehr ausgeführt. Es zeigt sich, daß sehr viele Eigenschaften von teilweise geordneten Gruppen bzw. Verbandsgruppen auch für das einseitige Analogon gelten; die so wichtige Rechenregel: $x \leqq y \Rightarrow y^{-1} \leqq x^{-1}$ in teilweise geordneten Gruppen ist jedoch bereits für die linksseitige Monotonie der Multiplikation charakteristisch (Satz 6, Korollar).

Als wichtigste Beispiele für rtwg. Gruppen sind anzuführen:

1. Ist $(M, \leqq)$ eine teilweise geordnete Menge und $T(M)$ die Gesamtheit aller bijektiven Transformationen von M, dann bildet $T(M)$ bezüglich der Operation: $(f \circ g)(x) = f[g(x)] \quad \forall x \in M$ und bezüglich der Relation: $f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq \leqq g(x) \; \forall x \in M$ eine rtwg. Gruppe.

2. Sei $(M, \leqq)$ eine totalgeordnete Menge und $A(M)$ die Gesamtheit aller ordnungstreuen bijektiven Abbildungen von M auf sich; dann kann nach Cohn [3], Theorem 4, die Gruppe $(A(M), \circ)$ rechtsangeordnet werden (d. h. es gibt eine Totalordnung auf $A(M)$, bezüglich der die Abbildungskomposition „$\circ$" rechtsmonoton ist).

3. Es sei $\mathbb{R}^n$ der n-dimensionale Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $GL_n(\mathbb{R})$ die Gruppe aller invertierbaren linearen Transformationen auf $\mathbb{R}^n$; ordnet man die Menge $\mathbb{R}^n$ durch: $x \leqq y \Leftrightarrow x_i \leqq y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, so ist auch $GL_n(\mathbb{R})$ durch: $S \leqq T \Leftrightarrow S(x) \leqq \leqq T(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^n$ teilweise geordnet, und die allgemeine lineare Gruppe wird zu einer rtwg. Gruppe.

4. Definiert man in $\mathbb{R}^n$: $x \leqq y \Leftrightarrow x_i < y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ oder $x_i = y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dann bildet $(GL_n(\mathbb{R}), \circ)$ mit der in Beispiel 3 angegebenen Ordnungsrelation „$\leqq$" eine gerichtete rtwg. Gruppe (d. h. zu $S, T \in GL_n(\mathbb{R})$ existieren $A, B \in \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $A \leqq S, T$ und $B \geqq S, T$).

5. Sind A und B zwei nicht-triviale, rechtsangeordnete Gruppen, so bildet das direkte Produkt $G = A \times B$ bezüglich der Ordnungsrelation: $(a_1, b_1) \leqq (a_2, b_2) \Leftrightarrow \Leftrightarrow a_1 \leqq a_2$ und $b_1 \leqq b_2$ eine Rechtsverbandsgruppe, welche nicht rechtsangeordnet ist.

An dieser Stelle sei dem Referenten für seine Hinweise, insbesonders betreffend das obige Beispiel 5, vielmals gedankt.

2. Der positive Kegel. Die Frage nach der Existenz von teilweisen Ordnungen auf Gruppen, bezüglich der die Gruppenoperation rechtsmonoton ist, wird durch folgendes Resultat beantwortet:

Lemma 1. *Eine Gruppe $(G, \cdot)$ kann genau dann rechtsteilweise geordnet werden, wenn es eine Teilhalbgruppe H von G mit $e \notin H$ gibt (e – Einselement von G).*

Beweis. Ist G rtwg., dann erfüllt $H = \{x \in G \mid x > e\}$ die Bedingung. Gibt es umgekehrt in G eine Teilhalbgruppe mit $e \notin H$, dann wird durch: $a \leqq b \Leftrightarrow a = b$ oder $ba^{-1} \in H$ eine rechtsteilweise Ordnung auf G definiert. Ist nämlich $a \leqq b$ und $b \leqq a$, aber $a \neq b$, so folgt $ba^{-1}, ab^{-1} \in H$, sodaß $e \in H$ gilt; ist $a \leqq b, a \neq b$ und $b \leqq c$, $b \neq c$, so $ba^{-1}, cb^{-1} \in H$ und $ca^{-1} \in H$, d. h. $a \leqq c$. –

Die Menge $P = \{x \in G \mid x \geqq e\}$ wird der (*links-*) *positive Kegel* von G genannt; ihre Elemente heißen *linkspositiv* (siehe [5]). Die Teilmenge P einer rtwg. Gruppe G bestimmt die teilweise Ordnung „$\leqq$" von G bereits vollständig; es gilt nämlich:

$$a \leqq b \Leftrightarrow ba^{-1} \in P \; (a, b \in G) .$$

Bezeichnet $P^{-1} = \{x \in G \mid x = a^{-1} \text{ mit } a \in P\} = \{x \in G \mid x \leqq e\}$, so gilt das bekannte Resultat (siehe [1], § 4.5):

Korollar. *Eine Teilmenge P einer beliebigen Gruppe $(G, \cdot)$ ist genau dann der positive Kegel einer rechtsteilweisen Ordnung auf G, wenn* 1) $P \cap P^{-1} = \{e\}$ *und* 2) $P \, . \, P \subseteqq P$.

Analog zu teilweise geordneten Gruppen gilt folgendes

Lemma 2. *Eine periodische Gruppe G kann nur auf triviale Weise rechtsteilweise geordnet werden (d. h. alle Elemente aus G sind unvergleichbar).*

Beweis. Nicht-triviale Ordnung „$\leqq$" ist äquivalent mit $P \neq \{e\}$; gibt es aber ein $a \in P$ mit $a > e$, dann folgt: $e < a < a^2 < \ldots$ und $a^n \neq e$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zur Voraussetzung. –

Korollar 1. *Genau die nicht-periodische Gruppen können nicht trivial rechtsteilweise geordnet werden.*

Beweis. Ist G nicht-periodisch, dann existiert ein Element unendlicher Ordnung $a \in G$; die Menge $H = \{a, a^2, \ldots\}$ bildet somit eine Teilhalbgruppe von G mit $e \notin H$; nach Lemma 1 kann daher G nichttrivial rechtsteilweise geordnet werden. Umgefahrt muß eine nichttrivial-rechtsteilweise geordnete Gruppe nach Lemma 2 nichtperiodisch sein. –

Korollar 2. *Eine rtwg. Gruppe $G \neq \{e\}$ ist unbeschränkt.*

Beweis. Gibt es etwa ein Element $a \in G$ mit $a \leqq x \; \forall x \in G$, so gilt $a \leqq e$, $a^2 \leqq a$ und daher $a^2 = a$. Da $e \in G$ das einzige Idempotente von G ist, muß $e = a$ sein; also: $e \leqq x \; \forall x \in G$. Daraus ergibt sich $x^{-1} \leqq e$, also $x^{-1} = e$ und damit $x = e$ $\forall x \in G$. Analog für: $x \leqq i \; \forall x \in G$. –

3. Gerichtete Ordnungen. Der erste Spezialfall für die Ordnungsrelation „$\leqq$" auf einer rtwg. Gruppe ist jener der *gerichteten* Ordnung: zu $a, b \in G$ existiert ein $c \in G$ mit $c \geqq a, c \geqq b$ (nach oben gerichtet) und ein $d \in G$ mit $d \leqq a$, $d \leqq b$ (nach unten gerichtet). Es zeigt sich, daß diese Eigenschaft in G erfüllt ist, falls sie bezüglich der Einheit $e \in G$ in folgendem Sinn zutrifft: G heißt *nach oben e-gerichtet*, wenn zu jedem $a \in G$ ein $c \in G$ mit $c \geqq a$, $c \geqq e$ existiert; auf duale Weise sei der Begriff *nach unten e-gerichtet* bzw. *e-gerichtet* (falls beides gilt) definiert.

Satz 3. *Es sei G eine rtwg. Gruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *G ist nach oben (bzw. unten) gerichtet.*
2) *G ist nach oben (bzw. unten) e-gerichtet.*
3) *Zu jedem $x \in G$ gibt es $a \leqq e$, $b \geqq e$ in G (bzw. $a \geqq e$, $b \leqq e$) mit $x = ab$.*
4) *Zu jedem $x \in G$ gibt es $y, z \in P^{-1}$ (bzw. P) mit $x = yz^{-1}$, d. h. $G = P^{-1} \, . \, P$ $(= P \, . \, P^{-1})$.*

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2): trivial. 2) $\Rightarrow$ 3): Jedes $x \in G$ läßt sich in der Form $x = (xy^{-1})\, y$ mit $y \geqq x$, $y \geqq e$ schreiben; damit ist $xy^{-1} \leqq e$, $y \geqq e$ und $x = ab$ mit $a \leqq e$ und $b \geqq e$. 3) $\Leftrightarrow$ 4): trivial. 3) $\Rightarrow$ 2): Für $x \in G$ gilt $x = ab$ mit $a \leqq e$ und $b \geqq e$; also ist $bx^{-1} = a^{-1} \geqq e$, sodaß $b \geqq x$ und $b \geqq e$ folgt. 2) $\Rightarrow$ 1): Sind $a, b \in G$

beliebig, dann gibt es ein $c \in G$ mit $c \geqq e$ und $c \geqq ba^{-1}$; es folgt $ca \geqq a$ und $ca \geqq b$, sodaß ca eine obere Schranke von a, b in G ist. –

Korollar. *Ist G eine nach oben (bzw. unten) gerichte rtwg. Gruppe, dann ist ihr positiver Kegel ein Erzeugendensystem von G.*

4. Verbandsordnungen. Der Spezialfall einer Verbandsordnung „$\leqq$" auf einer rtwg. Gruppe ist in dem soeben behandelten Fall enthalten. Die in [8] eingeführten Rechtsverbandshalbgruppen sind automatisch auch rtwg. Gruppen, die bezüglich der induzierten Ordnung einen Verband bilden: $a \leqq b \Rightarrow a \vee b = b \Rightarrow (a \vee b) c = = bc \Rightarrow (ac) \vee (bc) = bc \Rightarrow ac \leqq bc \quad \forall c \in G$. Daß auch die Umkehrung dieser Aussage gilt, ist Teil des folgenden

Satz 4. *Es sei G eine rtwg. Gruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *G ist Rechtsverbandsgruppe.*
2) *$(G, \leqq)$ ist ein Verband.*
3) *Es existieren* $\inf\{a, e\}$ *und* $\sup\{a, e\}$ *für alle $a \in G$.*
4) *$(G, \leqq)$ ist e-gerichtet, $(P, \leqq)$ ist ein $\wedge$-Halbverband und $(P^{-1}, \leqq)$ ist ein $\vee$-Halbverband.*

Beweis. 1) ⇒ 2): trivial. 2) ⇒ 1): Lemma 2 aus [8]. 2) ⇒ 3): trivial. 3) ⇒ 2): sind $a, b \in G$ beliebig, so ist leicht nachzuprüfen, daß $\sup\{a, b\} = (ab^{-1} \vee e) b$ und $\inf\{a, b\} = (ab^{-1} \wedge e) b$ in G gilt. 3) ⇒ 4): Da $a \wedge e$ und $a \vee e$ für alle $a \in G$ existieren, ist G e-gerichtet; weiters sind die im Schritt 3) ⇒ 2) angegebenen Formeln für $\sup\{a, b\}$ und $\inf\{a, b\}$ insbesonders für alle Elemente $a, b \in P$ bzw. P^{-1} anwendbar, sodaß $(P, \leqq)$ und $(P^{-1}, \leqq)$ sogar einen Verband bzgl. „$\leqq$" bilden. 4) ⇒ 2): Da $(G, \leqq)$ e-gerichtet ist, folgt nach Satz 3: $(G, \leqq)$ ist gerichtet; folglich gibt es zu beliebigen $a, b \in G$ stets $c, d \in G$ mit $c \leqq a, b$ und $d \geqq a, b$; da aber $ac^{-1} \geqq e$, $bc^{-1} \geqq e$, existiert $ac^{-1} \wedge bc^{-1} \in P$; damit zeigt man leicht, daß $\inf\{a, b\} = (ac^{-1} \wedge bc^{-1}) c \in G$ existiert; analog folgt: $\sup\{a, b\} = = (ad^{-1} \vee bd^{-1}) d$. –

Bezüglich der Existenz von Suprema und Infima in rtwg. Gruppen G läßt sich so wie in teilweise geordneten Gruppen zeigen ([1]):

1) Existiert $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ für zwei Elemente $a, b \in G$, dann existiert auch $\inf\{ac, bc\}$ in G und $(ac) \wedge (bc) = (a \wedge b) c$ für alle $c \in G$.
2) Existiert $\sup\{a, b\} = a \vee b$ in G für zwei Elemente $a, b \in G$, dann existiert auch $\sup\{ac, bc\}$ in G und $(ac) \vee (bc) = (a \vee b) c \; \forall c \in G$.

Daraus ergibt sich folgende Charakterisierung von Rechtsverbandsgruppen:

Korollar. *Eine rtwg. Gruppe G ist genau dann eine Rechtsverbandsgruppe, wenn jedes $x \in G$ in der Form: $x = ab^{-1} = cd^{-1}$ mit $a \wedge b = e$ und $c \vee d = e$ darstellbar ist.*

Beweis. Es sei zuerst G eine Rechtsverbandsgruppe; jedes $x \in G$ läßt sich in der

Form: $x = yz^{-1}$ mit $y, z \in G$ schreiben; für diese gibt es $a, b \in G$ mit $y = a(y \wedge z)$ und $z = b(y \wedge z)$, etwa: $a = y(y \wedge z)^{-1}$, $b = z(y \wedge z)^{-1}$. Damit folgt: $a \wedge b = (y \wedge z)(y \wedge z)^{-1} = e$, $ab^{-1} = y(y \wedge z)^{-1}(y \wedge z)z^{-1} = yz^{-1} = x$. Analog zeigt man die duale Aussage. Ist umgekehrt die Bedingung in einer rtwg. Gruppe G erfüllt, dann folgt aus $a \wedge b = e$ nach der obigen Bemerkung 1): $(ab^{-1}) \wedge (bb^{-1}) = eb^{-1}$, d. h. $x \wedge e = b^{-1}$ und $\inf\{x, e\}$ existiert in G für alle $x \in G$. Ebenso existiert $\sup\{x, e\}$ in G, sodaß mit Satz 4 die Behauptung folgt. –

Bemerkung. Für gerichtete rtwg. Gruppen und ihrem Spezialfall der Rechtsverbandsgruppen besteht nach Satz 3 und Satz 4 ein schöner Zusammenhang bezüglich der Darstellung beliebiger Elemente mittels des Erzeugendensystems P (des positiven Kegels) von G:

G ist genau dann gerichtet, wenn $x = ab^{-1} = cd^{-1}$ mit $a, b \leqq e, c, d \geqq e$.

G ist genau dann Rechtsverbandsgruppe, wenn $x = ab^{-1} = cd^{-1}$ mit $a \wedge b = e$, $c \vee d = e$.

5. Totalordnungen. Der letzte Spezialfall, der hier betrachtet werden soll, jener der „Totalordnung“, wurde eingehend von Conrad [4] untersucht. Wir geben nur noch eine Charakterisierung an:

Satz 5. *Sei G eine rtwg. Gruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *$(G, \leqq)$ ist rechtsangeordnet.*
2) *$(G, \leqq)$ ist nach oben (bzw. unten) e-gerichtet und $(P^{-1}, \leqq)$ (bzw. $(P, \leqq)$) ist totalgeordnet.*
3) *$G = P \cup P^{-1}$.*

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2): tirivial. 2) $\Rightarrow$ 3): Nach Satz 3 läßt sich jedes $x \in G$ in der Form: $x = ab$ mit $a \leqq e$, $b \geqq e$ darstellen; wegen $b^{-1} \leqq e$ müssen a und b^{-1} miteinander vergleichbar sein: ist $a \leqq b^{-1}$, dann gilt $x = ab \leqq e$, d. h. $x \in P^{-1}$, und ist $b^{-1} \leqq a$, dann gilt $x = ab \geqq e$, d. h. $x \in P$; also: $G = P \cup P^{-1}$. 3) $\Rightarrow$ 1): Für beliebige $a, b \in G$ ist $x = ab^{-1} \in P \cup P^{-1}$, d. h. $ab^{-1} \geqq e$ und $a \geqq b$, oder $ab^{-1} \leqq e$ und $a \leqq b$ (siehe [4], Lemma 1.1). –

Im Spezialfall einer Rechtsverbandsgruppe G genügt bereits die Kenntnis der Ordnung „$\leqq$“ auf ihrem positiven Kegel P (bzw. P^{-1}), um eine Anordnung auf G zu erkennen (siehe [8], § 4):

Korollar. *Sei G eine Rechtsverbandsgruppe. Dann sind äquivalent:*

1) *$(G, \leqq)$ ist bezüglich der induzierten Ordnung rechtsangeordnet.*
2) *$(P, \leqq)$ (bzw. $(P^{-1}, \leqq)$ ist totalgeordnet.*
3) *Aus $a \wedge b = e$ (bzw. $a \vee b = e$) folgt $a = e$ oder $b = e$ $(a, b \in G)$.*

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2): trivial. 2) $\Rightarrow$ 3): Sind $a, b \in G$ mit $a \wedge b = e$, so gilt $e \leqq a, b$,

d. h. $a, b \in P$; folglich gilt $a \leqq b$, d. h. $a \wedge b = a$ und $a = e$, oder $b \leqq a$, d. h. $a \wedge b = b$ und $b = e$. 3) $\Rightarrow$ 1): Da G Rechtsverbandsgruppe ist, läßt sich nach dem Korollar zu Satz 4 jedes $x \in G$ in der Form: $x = ab^{-1}$ mit $a \wedge b = e$ darstellen; ist $a = e$, dann gilt $x = b^{-1} \leqq e$ (wegen $e = a \wedge b \leqq b$) und $x \in P^{-1}$; ist aber $b = e$, dann gilt $x = a \geqq e$ (wegen $e = a \wedge b \leqq a$) und $x \in P$; also: $x \in P \cup P^{-1}$, woraus nach Satz 5 die Behauptung folgt. —

6. Linksmonotonie und Linksdistributivität. Eine rtwg. Gruppe G heißt *teilweise geordnete Gruppe*, wenn zusätzlich die Linksmonotonie der Gruppenoperation in G gilt, d. h.

$$a \leqq b \Rightarrow ca \leqq cb \quad \forall c \in G .$$

Eine Rechtsverbandsgruppe G wird *Verbandsgruppe* genannt, wenn in G noch die beiden Linksdistributivgesetze gelten, d. h.

$$a(b \vee c) = (ab) \vee (ac), \quad a(b \wedge c) = (ab) \wedge (ac) \quad \forall a, b, c \in G .$$

Für beide Begriffe gibt es eine umfangreiche Theorie (siehe etwa [5] und die Literaturhinweise dort). Es ergibt sich die Frage über den Zusammenhang, d. h. unter welchen Bedingungen eine rtwg. Gruppe bzw. Rechtsverbandsgruppe bereits eine twg. Gruppe bzw. eine Verbandsgruppe ist. Es gilt der nützliche, den totalgeordneten Fall (Conrad [4], Satz 2.1) verallgemeinernde

Satz 6. *Es sei G eine rtwg. Gruppe und P der positive Kegel von G. Dann sind folgende Eigenschaften von G äquivalent:*

1) *G ist eine teilweise geordnete Gruppe.*

2) $a \in P \Rightarrow xax^{-1} \in P \ \forall x \in G$.

3) $a \in P \Rightarrow xa \geqq x \ \forall x \in G$.

4) $a \leqq b \Leftrightarrow a^{-1}b \in P \ (a, b \in G)$.

5) $ab \geqq b \Rightarrow ba \geqq b \ (a, b \in G)$.

6) $a \leqq b \Leftrightarrow b = ad$ *mit* $d \in P$.

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2): trivial. 2) $\Rightarrow$ 3): trivial. 3) $\Rightarrow$ 4): $a \leqq b \Rightarrow e \leqq ba^{-1} \Rightarrow a^{-1} \leqq$ $\leqq a^{-1}ba^{-1} \Rightarrow e = a^{-1}a \leqq a^{-1}b$; ist umgekehrt $a^{-1}b \in P$ für $a, b \in G$, dann ist nach 3): $a(a^{-1}b) \geqq a$, d. h. $b \geqq a$. 4) $\Rightarrow$ 5): $ab \geqq b \Rightarrow a \geqq e \Rightarrow ab^{-1} \geqq b^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow (b^{-1})^{-1}(ab^{-1}) \geqq e \Rightarrow ba \geqq b$. 5) $\Rightarrow$ 6): $a \leqq b \Rightarrow e \leqq ba^{-1} = c \in P \Rightarrow b^{-1} \leqq$ $\leqq cb^{-1} \Rightarrow b^{-1}c = a^{-1} \geqq b^{-1} \Rightarrow e \leqq a^{-1}b \Rightarrow d = a^{-1}b \in P$ und $b = ad = ca$; ist umgekehrt $b = ad$ mit $d \geqq e$, dann ist $da \geqq a$ und nach 5): $b = ad \geqq a$. 6) $\Rightarrow$ 1): $a \leqq b \Rightarrow b = ad$ mit $d \in P \Rightarrow cb = (ca)\, d \ \forall c \in G \Rightarrow ca \leqq cb \ \forall c \in G$. —

Zwei wichtige Eigenschaften sollen gesondert angeführt werden, da sie bei der Behandlungen von teilweise geordneten Gruppen von wesentlicher Bedeutung sind, jedoch in rtwg. Gruppen nicht gelten, im Gegenteil für die Linksmonotie der Multiplikation charakteristisch sind:

Korollar. *Eine rtwg. Gruppe ist genau dann eine teilweise geordnete Gruppe, wenn*: $a \leqq b \Rightarrow b^{-1} \leqq a^{-1}(a, b \in G)$. *Eine Rechtsverbandsgruppe ist genau dann eine Verbandsgruppe, wenn*: $(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1}$ $($*bzw.* $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge \wedge b^{-1})$ $\forall a, b \in G$.

Beweis. Ist $a \leqq b, c \in G$ beliebig, so ist mit $b^{-1} \leqq a^{-1}$ auch $b^{-1}c^{-1} \leqq a^{-1}c^{-1}$ für alle $c \in G$ und daher $ca \leqq cb$ $\forall c \in G$; die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. — Ist G eine Rechtsverbandsgruppe und $(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1}$ für alle $a, b \in G$, so folgt aus $a \leqq b$ in G, daß $a \wedge b = a$, also $a^{-1} \vee b^{-1} = a^{-1}$, d. h. $b^{-1} \leqq a^{-1}$; folglich ist nach dem ersten Teil dieses Korollars $(G, \leqq)$ eine teilweise geordnete Gruppe, die zugleich ein Verband bezüglich „$\leqq$" ist, was nach [5] bedeutet, daß G eine Verbandsgruppe ist. Umgekehrt ist die angegebene Identität eine bekannte Rechenregel in Verbandsgruppen (siehe [5]). —

Nach Satz 6,6) ist jede teilweise geordnete Gruppe *natürlich geordnet* in folgendem Sinn: $a \leqq b \Leftrightarrow b = ad$ für ein $d \in P$ (siehe [5], [10]). Unter gewissen Voraussetzungen genügt es, die natürliche Ordnung des positiven Kegels einer rtwg. Gruppe nachzuprüfen, um die Linksmonotonie der Multiplikation auf ganz G zu erkennen:

Satz 7. *Es sei G eine nach unten e-gerichtete rtwg. Gruppe. G ist genau dann eine teilweise geordnete Gruppe, wenn ihr positiver Kegel natürlich geordnet ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit folgt sofort aus Satz 6. Sei umgekehrt $(P, \leqq)$ natürlich geordnet und $x \leqq y, z \in G$ beliebig. In jeder rtwg. Gruppe gilt: $x \leqq y \Leftrightarrow y = cx$ mit $c \in P$; denn $y = cx$ mit $c = yx^{-1} \in P$, und aus $y = cx$ mit $c \geqq e$ folgt $y = cx \geqq \geqq x$. Da nun G nach unten e-gerichtet ist, kann nach Satz 3 jedes $z \in G$ in der Form: $z = ab^{-1}$ mit $a, b \in P$ dargestellt werden. Damit ergibt sich: $zcz^{-1} = ab^{-1}cba^{-1}$. Wegen $b, c \in P$ folgt $cb \geqq b$ und $cb = br$ mit $r \in P$; also: $zcz^{-1} = ara^{-1}$. Wegen $a, r \in P$ und $ar = ar$ mit $r \in P$ ist $ar \geqq a$ (natürliche Ordnung von P), sodaß nach dem am Beginn Gezeigten: $ar = sa$ für ein $s \in P$ gilt; also: $zcz^{-1} = s$ und $zc = sz$ mit $s \in P$. Daher folgt aus $x \leqq y, z \in G$, daß $y = cx$ mit $c \in P$ und $zy = zcx$, also: $zy = s(zx)$ mit $s \in P$, d. h. $zx \leqq zy$ $\forall z \in G$. —

Insbesonders gilt dieses Resultat für rechtsangeordnete Gruppen und Rechtsverbandsgruppen; unter Anwendung des oben erwähnten Ergebnisses aus [5] ergibt sich somit

Korollar. *Eine rang. Gruppe (bzw. Rechtsverbandsgruppe) G ist genau dann eine angeordnete Gruppe (bzw. Verbandsgruppe), wenn der positive Kegel von G natürlich geordnet ist.*

7. Einbettungen in Gruppen. Wie leicht nachzuprüfen ist, hat der positive Kegel einer rtwg. Gruppe folgende Eigenschaften: 1) $(P, \leqq, \cdot)$ ist eine rtwg. Halbgruppe mit Einselement e; 2) P genügt den Kürzungsregeln; 3) $a \leqq b \Rightarrow b = ca$ mit $c \in P$. In [10] wurde umgekehrt die Frage untersucht, wann eine rtwg. Halbgruppe der positive Kegel einer rtwg. Gruppe ist. In Vervollständigung der Sätze 4.1 und 4.2 aus [10] sei folgendes Kriterium angeführt:

Satz 8. *Eine rtwg. Halbgruppe H ist genau dann der positive Kegel einer nach oben gerichteten rtwg. Gruppe, wenn*

1) *H ein Einselement besitzt.*

2) *H den Kürzungsregeln genügt.*

3) *$a \leqq b \Rightarrow b = ca$ für ein $c \in H$ $(a, b \in H)$.*

4) *Zu $a, b \in H$ gibt es $x, y \in H$ mit $xa = yb$.*

Beweis. Nach dem Beweis von Satz 4.1 aus [10] ist eine rtwg. Halbgruppe mit den Eigenschaften 1) bis 4) der positive Kegel ihrer Linksquotientengruppe $G = \{a^{-1}b \mid a, b \in H\}$, welche durch: $x \leqq y \Leftrightarrow y = cx$ für ein $c \in H$ rechtsteilweise geordnet ist (diese Ordnung stimmt mit der auf H gegebenen überein, wenn man sie auf H einschränkt). Wegen $x \in G$ mit $x = a^{-1}b$, $a, b \in H$, ist $a \geqq e$ und $a^{-1} \leqq e$, sodaß $x = cd$ mit $c \leqq e$ und $d \geqq e$ gilt. Nach Satz 3 ist somit $(G, \leqq)$ auch nach oben gerichtet. Ist umgekehrt G eine nach oben gerichtete rtwg. Gruppe, dann erfüllt ihr positiver Kegel $(P, \leqq)$ die Eigenschaften 1), 2) und 3); er ist auch nach oben gerichtet; denn gibt es zu $a, b \in P$ ein $g \in G$ mit $g \geqq a, b$, dann ist $g \geqq a \geqq e$ und damit auch $g \in P$. Auf Grund von Lemma 4.1 aus [10] ist aber die letzte Aussage über $(P, \leqq)$ äquivalent zur Eigenschaft 4), sodaß auch die Bedingung 4) notwendig ist. —

Bemerkung. Die beiden Eigenschaften 2) und 4) sind die aus der Halbgruppentheorie bekannten, im allgemeinen nur hinreichenden Bedingungen für die Einbettbarkeit einer Halbgruppe H in eine Gruppe G. Trägt H eine (rechts-) teilweise Ordnung (siehe [10]), so bewirkt dazu die Eigenschaft 3) eine Einbettung in eine speziellere (nach oben gerichtete) Gruppe G und darüber hinaus noch die Notwendigkeit der angegebenen Eigenschaften.

Literatur

[1] *Bigard-Keimel-Wolfenstein:* Groupes et anneaux réticulés. Lecture Notes in Mathematics 608; Springer: Berlin—Heidelberg—New York 1977.

[2] *Botto Mura-Rhemtulla:* Orderable groups. Lecture Notes in Pure and Applied Mathem. Vol. *27*. Marcel Dekker, Inc.; New York—Basel 1977.

[3] *Cohn, P. M.:* Groups of order-automorphisms of ordered sets. Mathematika *4* (1957), 41—50.

[4] *Conrad, P.:* Right-ordered groups. Michigan Math. J. *6* (1959), 267—275.

[5] *Fuchs, L.:* Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Van den Hoeck-Rupprecht, Göttingen 1965.

[6] *Kokorin-Kopytov:* Fully ordered groups. John Wiley; New York—Toronto 1974.
[7] *Matsushita, S.:* On the foundations of orders in groups. Osaka J. Math. *2* (1951), 19—22.
[8] *Mitsch, H.:* Rechtsverbandshalbgruppen. J. reine angew. Math. *264* (1973), 172—181.
[9] *Mitsch, H.:* Rechtsteilweise geordnete Halbgruppen. Beiträge zur Algebra u. Geom. *2* (1974), 23—35.
[10] *Mitsch, H.:* Rechtsteilweise geordnete Halbgruppen mit Teilbarkeitsordnung. Beiträge zur Algebra u. Geom. *3* (1974), 61—72.
[11] *Smirnow, D. M.:* Rechtsgeordnete Gruppen (Russisch). Algebra i Logika *5* (1966), 41—59.
[12] *Zaiceva, M.:* Right-ordered groups (Russisch). Uchen. Zap. Shuisk. Gos. Ped. Inst. *6* (1958), 205—226.

Anschrift des Verfassers: Mathematisches Institut der Universität-Wien, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien, Österreich.