Dietmar W. Dorninger; Dietmar Schweigert
Zur Darstellung von Polynomen auf De Morgan Algebren

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 30 (1980), No. 1, 65–70

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101655

Czechoslovak Mathematical Journal, 30 (105) 1980, Praha

ZUR DARSTELLUNG VON POLYNOMEN AUF DE MORGAN ALGEBREN

DIETMAR DORNINGER, Wien, D. SCHWEIGERT, Kaiserslautern

(Eingegangen an 29. September 1976)

Sei M die Varietät der De Morgan Algebren, $\mathscr{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ die freie De Morgan Algebra mit freiem Erzeugendensystem $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $L \in M$. Unter der *Polynomalgebra* $L[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ über L in den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verstehen wir das Koprodukt (im Sinne der Kategorien) von L und $\mathscr{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ in M. – Die Elemente von $L[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ bezeichnen wir als (*De Morgan*) *Polynome* in den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$. (Zur Definition der Polynomalgebra siehe *Lausch-Nöbauer* [6]).

Für die Varietäten der Verbände (Siehe SCHUFF [7]), der distributiven Verbände (Siehe HULE [4] und MITSCH [5]) sowie der distributiven Verbände mit 0 und 1 und der Booleschen Algebren (Vgl. LAUSCH-NÖBAUER [6]) sind Normalformensysteme für die Polynome bekannt.

Im Folgenden geben wir für De Morgan Polynome in n Unbestimmten ein Normalformensystemen an.

Dieses Normalformensystem zeigt uns, daß für eine De Morgan Algebra L die Algebra $P_n(L)$ der durch die Polynome in n Unbestimmten vermittelten *Polynomfunktionen* (= algebraische Funktionen im Sinne von GRÄTZER [3]) im allgemeinen nicht isomorph zu $L[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ist. Gleichwohl erhalten wir durch das Normalformensystem für die Polynome ein „Darstellungssystem" für die n-stelligen Polynomfunktionen. Mit Hilfe dieses Darstellungssystems bestimmen wir im Falle von vollständigen, unendlich-distributiven De Morgan Algebren L ein Normalformensystem für $P_1(L)$.

Für die verbandstheoretischen Operationen in einer De Morgan Algebra M schreiben wir $\cup$ und $\cap$, mit $'$ bezeichnen wir den involutorischen Antiautomorphismus von M, und 0, 1 seien die nullären Operationen.

Nun definieren wir: Für ein Element y aus einer De Morgan Algebra M sei $y^0 = 1$ (Einselement von M) und $y^1 = y$. Damit zeigen wir

Satz 1. *Sei $L \in \boldsymbol{M}$ und W der zweielementige Boolesche Verband bestehend aus* 0 *und* 1. *Die Menge aller Worte*

$$\bigcup_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2n}) \in W^{2n}} \left(a_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}} \cap x_1^{i_1} \cap (x_1')^{i_2} \cap x_2^{i_3} \cap (x_2')^{i_4} \cap \ldots \cap x_n^{i_{2n-1}} \cap (x_n')^{i_{2n}}\right)$$

mit $a_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}} \in L$ *und* $a_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}} \geqq a_{j_1 j_2 \ldots j_{2n}}$, *falls in* W^{2n} *gilt* $(i_1, i_2, \ldots, i_{2n}) \geqq \geqq (j_1, j_2, \ldots, j_{2n})$ *bildet ein Normalformensystem für die Polynome von* $L[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. *Ferner gilt: Sind* $a_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}}$ *bzw.* $b_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}}$ *die Koeffizienten in den Normalformen zweier Polynome p und q, so ist* $p \geqq q$ *genau dann, falls* $a_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}} \geqq \geqq b_{i_1 i_2 \ldots i_{2n}}$ *ist für alle* $(i_1, i_2, \ldots, i_{2n}) \in W^{2n}$.

Den Beweis führen wir mittels dreier Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *$\mathscr{F}[x_1]$ ist genau dann einbettbar in $L[x_1]$, falls $|L| \neq 1$ ist.*

Beweis. Wir setzen $x_1 = x$.

Ist $|L| = 1$, so fallen in L das Eins- und Nullelement zusammen, und damit ist $\mathscr{F}[x]$ nicht in $L[x]$ einbettbar.

Sei $|L| \neq 1$. $L[x]$ ist das Koprodukt von (L, φ_L) und $\mathscr{F}[x], \varphi_{\mathscr{F}})$, wo φ_L die Einbettung von L in $L[x]$ und $\varphi_{\mathscr{F}}$ derjenige Homomorphismus ist, welcher die Einbettung von $\{x\}$ in $L[x]$ fortsetzt. (Siehe [6]). Da $|L| \neq 1$, ist in $L[x]$ $x \neq a$ für jedes $a \in L$. Ferner kann nicht gelten $x = x'$, $x \geqq x'$ oder $x \leqq x'$, denn alle drei Beziehungen würden die Identität $0 = 1$ nach sich ziehen. Also sind $x, x', x \cup x'$ und $x \cap x'$ paarweise verschieden. – Angenommen, $x \cup x'$ wäre gleich 1 (Gleichbedeutend damit ist $x \cap x' = 0$.) Die Abbildung $\psi_{\mathscr{F}}$ definiert durch $\psi_{\mathscr{F}}(x \cup x') = = \psi_{\mathscr{F}}(x) = \psi_{\mathscr{F}}(x') = \psi_{\mathscr{F}}(x \cap x') = \psi_{\mathscr{F}}(0) = 0$ und $\psi_{\mathscr{F}}(1) = 1$ ist ein Homomorphismus von $\mathscr{F}[x]$ in L; ist ψ_L die identische Abbildung von L, so muß es gemäß der Definition des Koproduktes einen eindeutig bestimmten Homomorphismus ϱ von $L[x]$ in L geben, sodaß gilt $\psi_{\mathscr{F}} = \varrho\varphi_{\mathscr{F}}$ und $\psi_L = \varrho\varphi_L$. Also müßte gelten $\varrho(\varphi_{\mathscr{F}}(x \cup x')) = \varrho(x \cup x') = \varrho(1) = 1$ und $\psi_{\mathscr{F}}(x \cup x') = 0$, was ein Widerspruch ist.

Damit erhalten wir, daß $x, x', x \cup x', x \cap x'$, 0 und 1 alle paarweise verschieden sind, w.z.z.w.

Im folgenden nehmen wir stets an, daß $|L| \neq 1$ ist, und betrachten $\mathscr{F}[x_1]$ und L als in $L[x_1]$ eingebettet. (Für $|L| = 1$ ist Satz 1 trivialerweise richtig.)

Hilfssatz 2. *Sei $L \in \boldsymbol{M}$; $a, b \in L$. In $L[x]$ gilt: Aus $x \cup x' \cup a \geqq x \cup x' \cup b$ folgt $a \geqq b$.*

Beweis. Seien $\varphi_L, \varphi_{\mathscr{F}}, \psi_L, \psi_{\mathscr{F}}$ und ϱ so gewählt wie oben, dann gilt: $x \cup x' \cup a \geqq \geqq x \cup x' \cup b \Rightarrow \varrho(x \cup x' \cup a) \geqq \varrho(x \cup x' \cup b) \Rightarrow \varrho(x \cup x') \cup \varrho(a) \geqq \varrho(x \cup x') \cup \cup \varrho(b) \Rightarrow \psi_{\mathscr{F}}(x \cup x') \cup \psi_L(a) \geqq \psi_{\mathscr{F}}(x \cup x') \cup \psi_L(b) \Rightarrow a \geqq b$.

Hilfssatz 3. *Sei $L \in M$. Die Menge* $\boldsymbol{n}$ *aller Polynome der Form* $(a_1 \cap x \cap x') \cup (a_2 \cap x) \cup (a_3 \cap x') \cup a_4$ *mit* $a_1 \geqq a_2 \cup a_3$ *und* $a_2 \cap a_3 \geqq a_4$ *bildet ein Normalformensystem für die Polynome von* $L[x]$. *Ferner gilt: Sind* $(a_1 \cap x \cap x') \cup (a_2 \cap x) \cup (a_3 \cap x') \cup a_4$ *und* $(b_1 \cap x \cap x') \cup (b_2 \cap x) \cup (b_3 \cap x') \cup b_4$ *die Normalformen zweier Polynome* p *und* q, *so ist* $p \geqq q$ *genau dann, falls* $a_i \geqq b_i$ *ist für* $i = 1, 2, 3$ *und* 4.

Beweis. Wegen

$$x = (1 \cap x \cap x') \cup (1 \cap x) \cup (0 \cap x') \cup 0$$

und

$$k = (k \cap x \cap x') \cup (k \cap x) \cup (k \cap x') \cup k$$

sind x und jedes konstante Polynom k aus $\boldsymbol{n}$.

Wie man leicht nachrechnet, gilt unter der Voraussetzung $a_1 \geqq a_2 \cup a_3$ und $a_2 \cap a_3 \geqq a_4$:

(*)
$$\begin{aligned}&(a_1 \cap x \cap x') \cup (a_2 \cap x) \cup (a_3 \cap x') \cup a_4 = \\ &= (a_4 \cup x \cup x') \cap (a_3 \cup x) \cap (a_2 \cup x') \cap a_1 .\end{aligned}$$

Aus (*) folgt sofort, daß mit p und q auch p' sowie $p \cup q$ und $p \cap q$ zu $\boldsymbol{n}$ gehören.

Durch vollständige Induktion nach der Wortlänge der Polynome erhält man dann, daß alle Polynome von $L[x]$ unter den Polynomen aus $\boldsymbol{n}$ vorkommen. (Zur Definition der Wortlänge vgl. [6].)

Angenommen für zwei Polynome $p = (a_1 \cap x \cap x') \cup (a_2 \cap x) \cup (a_3 \cap x') \cup a_4$ und $q = (b_1 \cap x \cap x') \cup (b_2 \cap x) \cup (b_3 \cap x') \cup b_4$ mit $a_1 \geqq a_2 \cup a_3$, $a_2 \cap a_3 \geqq a_4$ und $b_1 \geqq b_2 \cup b_3$, $b_2 \cap b_3 \geqq b_4$ gilt $p \geqq q$. Dann gilt insbesondere $p(x) \geqq q(x)$ für die durch p und q vermittelten Polynomfunktionen $p(x)$ und $q(x)$. $p(1) \geqq q(1)$ ergibt $a_2 \geqq b_2$ und $p(0) \geqq q(0)$ ergibt $a_3 \geqq b_3$. Aus $p \geqq q$ folgt $p \cup x \cup x' \geqq q \cup x \cup x'$, d. h., $x \cup x' \cup a_4 \geqq x \cup x' \cup b_4$. Wegen Hilfssatz 2 ist dies gleichbedeutend mit $a_4 \geqq b_4$. Weiter sieht man mit Hilfe von (*), daß $p \geqq q$, $a_1 \cap x \cap x' \geqq b_1 \cap x \cap x'$ nach sich zieht. Durch Anwendung der Operation $'$ und Hilfssatz 2 ergibt sich daraus $a_1 \geqq b_1$.

Da umgekehrt aus $a_i \geqq b_i$ für $i = 1, 2, 3$ und 4 folgt, daß $p \geqq q$ ist, gilt also $p \geqq q$ genau dann, falls $a_i \geqq b_i$ ist.

Dies beweist, daß $\boldsymbol{n}$ ein Normalformensystem ist.

Beweis von Satz 1 durch vollständige Induktion nach n:

Für $n = 1$ ist der Satz gemäß Hilfssatz 3 richtig.

Angenommen, der Satz ist richtig für alle $n \leqq N$, dann gilt:

Die Menge der Polynome

$$p = (p_1 \cap x_{N+1} \cap x'_{N+1}) \cup (p_2 \cap x_{N+1} \cap 1) \cup (p_3 \cap 1 \cap x'_{N+1}) \cup (p_4 \cap 1 \cap 1)$$

mit $p_1 \geqq p_2 \cup p_3$ und $p_2 \cap p_3 \geqq p_4$, wobei $p_k \in L[x_1, x_2, \ldots, x_N]$ ist für $k =$

$= 1, 2, 3, 4$, bildet ein Normalformensystem für $(L[x_1, x_2, \ldots, x_N])[x_{N+1}]$, und die Polynome

$$\bigcup_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2N}) \in W^{2N}} \left(a_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} \cap x_1^{i_1} \cap (x_1')^{i_2} \cap x_2^{i_3} \cap (x_2')^{i_4} \cap \ldots \cap x_N^{i_{2N-1}} \cap (x_N')^{i_{2N}}\right)$$

mit $a_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} \geqq a_{j_1 j_2 \ldots j_{2N}}$, falls $(i_1, i_2, \ldots, i_{2N}) \geqq (j_1, j_2, \ldots, j_{2N})$ ist, sind ein Normalformensystem für $L[x_1, x_2, \ldots, x_N]$. Sind $a^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}}$ für $k = 1, 2, 3$ und 4 die Koeffizienten von p_k in diesem Normalformensystem, so gilt nach Induktionsvoraussetzung, daß für alle $(i_1, i_2, \ldots, i_{2N}) \in W^{2N}$

$$a^{(1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} \geqq a^{(r)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} \quad \text{und} \quad a^{(r)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} \geqq a^{(4)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}}$$

ist für $r = 2$ und 3. Definieren wir nun

$$a^{(1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{2N} 11}, \quad a^{(2)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{2N} 10},$$

$$a^{(3)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{2N} 01}, \quad a^{(4)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{2N} 00},$$

so gilt also, daß $a_{i_1 i_2 \ldots i_{2N} i_{2N+1} i_{2N+2}} \geqq a_{j_1 j_2 \ldots j_{2N} j_{2N+1} j_{2N+2}}$ ist, falls in W^{2N+2} $(i_1, i_2, \ldots \ldots, i_{2N+2}) \geqq (j_1, j_2, \ldots, j_{2N+2})$. Setzen wir in

$$p = (p_1 \cap x_{N+1} \cap x'_{N+1}) \cup (p_2 \cap x_{N+1} \cap 1) \cup (p_3 \cap 1 \cap x'_{N+1}) \cup (p_4 \cap 1 \cap 1)$$

die Normalformen von p_1, p_2, p_3 und p_4 ein und formen nach dem Distributivgesetz um, so erhalten wir

$$p = \bigcup_{(i_1, i_2, \ldots, i_{2N+2}) \in W^{2N+2}} \left(a_{i_1 i_2 \ldots i_{2N+2}} \cap x_1^{i_1} \cap (x_1')^{i_2} \cap x_2^{i_3} \cap (x_2')^{i_4} \cap \ldots \cap x_{N-1}^{i_{2N+1}} \cap (x_N')^{i_{2N+2}}\right)$$

mit $a_{i_1 i_2 \ldots i_{2N+2}} \geqq a_{j_1 j_2 \ldots j_{2N+2}}$, falls $(i_1, i_2, \ldots, i_{2N+2}) \geqq (j_1, j_2, \ldots, j_{2N+2})$ ist in W^{2N+2}.

Ist q ein weiteres Polynom aus $(L[x_1, x_2, \ldots, x_N])[x_{N+1}]$ und ist $(q_1 \cap x_{N+1} \cap \cap x'_{N+1}) \cup (q_2 \cap x_{N+1} \cap 1) \cup (q_3 \cap 1 \cap x'_{N+1}) \cup (q_4 \cap 1 \cap 1)$ seine Normaldarstellung in $(L[x_1, x_2, \ldots, x_N])[x_{N+1}]$, so muß im Falle $p \geqq q$ gemäß Hilfssatz 3 (bzw. Induktionsvoraussetzung) gelten $p_k \geqq q_k$ für $k = 1, 2, 3$ und 4.

Sind $b_{i_1 i_2 \ldots i_{2N} 11}$, $b_{i_1 i_2 \ldots i_{2N} 10}$, $b_{i_1 i_2 \ldots i_{2N} 01}$, bzw. $b_{i_1 i_2 \ldots i_{2N} 00}$ die auf dieselbe Weise wie oben definierten Koeffizienten in den Normaldarstellungen der Polynome q_1, q_2, q_3 bzw. q_4, so muß damit und nach Induktionsvoraussetzung $a_{i_1 i_2 \ldots i_{2N} i_{2N+1} i_{2N+2}} \geqq b_{i_1 i_2 \ldots i_{2N} i_{2N+1} i_{2N+2}}$ sein für alle $(i_1, i_2, \ldots, i_{2N+2}) \in W^{2N+2}$.

Berücksichtigen wir, daß es einen $L \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ festhaltenden Isomorphismus von $(L[x_1, x_2, \ldots, x_N])[x_{N+1}]$ auf $L[x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}]$ gibt (Vgl. [6]), so ist damit die Behauptung von Satz 1 mit $n = N + 1$ gezeigt.

Bemerkung 1. Ist L die zweielementige De Morgan Algebra, so ist die Polynomalgebra $L[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ isomorph zur freien De Morgan Algebra $\mathscr{F}[x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n]$ und das gefundene Normalformensystem ein Normalformensystem für die Elemente der freien Algebra.

Bemerkung 2. Sei $L \in M$. Die Algebra $P_n(L)$ der n-stelligen Polynomfunktionen über L ist im allgemeinen nicht isomorph zur Polynomalgebra $L[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Dies zeigt uns etwa der

Satz 2. *Ist L eine vollständige unendlich-distributive De Morgan Algebra und $s = \bigcup_{x \in L} (x \cap x')$, so bildet die Menge* $\boldsymbol{n}$ *der Funktionen $p(x) = (a \cap x \cap x') \cup \cup (b \cap x) \cup (c \cap x') \cup d$ mit b, c beliebig aus L und $a \in \{\alpha \cap s \mid \alpha \in L,\ \alpha \geqq b \cup c\}$, $d \in \{\delta \cup (s' \cap b \cap c) \mid \delta \in L,\ b \cap c \geqq \delta\}$ ein Normalformensystem für die einstelligen Polynomfunktionen von L.*

Beweis. Jede Polynomfunktion ist aus $\boldsymbol{n}$, denn gemäß Hilfssatz 3 erhält man alle Funktionen aus $P_1(L)$, indem man alle Polynome $p(x) = (\alpha \cap x \cap x') \cup (b \cap x) \cup \cup (c \cap x') \cup \delta$ mit $\alpha \geqq b \cup c$, $b \cap c \geqq \delta$ bildet, und wegen $(*)$ gilt (mit $=$ im Sinne von Gleichheit von Funktionen in der Variablen x):

$$\begin{aligned}
&(\alpha \cap s \cap x \cap x') \cup (b \cap x) \cup (c \cap x') \cup \delta \cup (s' \cap b \cap c) = \\
&= ((\alpha \cap x \cap x') \cup (b \cap x) \cup (c \cap x') \cup \delta) \cup (s' \cap b \cap c) = \\
&= ((\delta \cup x \cup x') \cap (c \cup x) \cap (b \cup x') \cap \alpha) \cup (s' \cap b \cap c) = \\
&= ((\delta \cup x \cup x' \cup (s' \cap b \cap c)) \cap (c \cup (s' \cap b \cap c) \cup x) \cap \\
&\quad \cap (b \cup (s' \cap b \cap c) \cup x') \cap (\alpha \cup (s' \cap b \cap c)) = \\
&= (\delta \cup x \cup x') \cap (c \cup x) \cap (b \cup x') \cap \alpha = p(x)\,.
\end{aligned}$$

Angenommen für zwei Funktionen $p(x), q(x) \in P_1(L)$ gilt $p(x) = q(x)$, dann erhalten wir, wenn $(a \cap x \cap x') \cup (b \cap x) \cup (c \cap x') \cup d$ und $(a_1 \cap x \cap x') \cup (b_1 \cap x) \cup \cup (c_1 \cap x') \cup d_1$ die in Satz 2 angegebenen „Normaldarstellungen" von $p(x)$ bzw. $q(x)$ sind:

Aus $p(1) = q(1)$ und $p(0) = q(0)$ folgt $b = b_1$ und $c = c_1$; $p(x) \cup x \cup x' = = q(x) \cup x \cup x'$ ergibt $d \cup x \cup x' = d_1 \cup x \cup x' \Rightarrow \bigcap_{x \in L} (d \cup x \cup x') = \bigcap_{x \in L} (d_1 \cup x \cup \cup x') \Rightarrow d \cup s' = d_1 \cup s' \Rightarrow (d \cup s') \cap b \cap c = (d_1 \cup s') \cap b \cap c \Rightarrow d \cup (s' \cap b \cap \cap c) = d_1 \cup (s' \cap b \cap c) \Rightarrow d = d_1$, denn $d, d_1 \geqq (s' \cap b \cap c)$.

$p(x) \cap x \cap x' = q(x) \cap x \cap x'$ ergibt $(x \cap x') \cap (a \cup b \cup c) = (x \cap x') \cap (a_1 \cup \cup b \cup c) \Rightarrow (a \cup b \cup c) \cap s = (a_1 \cup b \cup c) \cap s \Rightarrow a \cup ((b \cup c) \cap s) = a_1 \cup ((b \cup \cup c) \cap s) \Rightarrow a = a_1$, da $a, a_1 \geqq (b \cup c) \cap s$ sind.

Damit ist gezeigt, daß $\boldsymbol{n}$ ein Normalformensystem ist.

Satz 2 gestattet, sukzessive die n-stelligen Polynomfunktionen einer unendlich-distributiven vollständigen De Morgan Algebra L zu bestimmen, denn $P_n(L)$ ist isomorph zu $P_1(P_{n-1}(L))$. (Vgl. [1].)

Literaturhinweise

[1] *Dorninger D.* u. *J. Wiesenbauer:* Anzahlsätze für Polynomfunktionen auf Verbänden. Rend. Inst. mat. Univ. Trieste, *8* (1976), 135—141.

[2] *Eigenthaler G.:* On Polynomial Algebras. Coll. Math. Soc. J. Bolayi, 17. Coutr. to Universal Algebra, Szeged (1975), 83—99.

[3] *Grätzer G.:* Universal Algebra. Van Nostrand, Toronto, London, Melbourne (1968).

[4] *Hule H.:* Polynomial Normal Forms and the Embedding of Polynomial Algebras. Coll. Math. Soc. J. Bolayi, 17. Coutr. to Universal Algebra, Szeged (1975), 179—187.

[5] *Mitsch H.:* Über Polynome und Polynomfunktionen auf Verbänden. Monatsh. Math. *74* (1970) 239—243.

[6] *Lausch H.* u. *W. Nöbauer:* Algebra of Polynomials. North Holland Pub. Comp, Amsterdam, London (1973).

[7] *Schuff H. K.:* Zur Darstellung von Polynomen auf Verbänden. Math. Nachr. 11 (1954) 1—4.

Anschrift der Verfasser: D. Dorninger, Technische Universität Wien, A-1040 Wien, Karlsplatz 13, Österreich; D. Schweigert, Universität Kaiserslautern, D-6750 Kaiserslautern, Pfaffenbergerstrasse 95, BRD.