Czechoslovak Mathematical Journal, 29 (104) 1979, Praha

RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION FORTE DE PROBLÈMES NON LINÉAIRES D'ÉVOLUTION

MARIA GIOVANNA GARRONI, MARIA AGOSTINA VIVALDI, Roma

(Reçu le 11. novembre 1977)

INTRODUCTION

Les inéquations d'évolution paraboliques ont été étudiées la première fois par J. L. LIONS et G. STAMPACCHIA [14], qui ont démontré d'existence de solutions faibles pour des inéquations associées à un opérateur linéaire et avec de contraintes indépendantes du temps.

Pour des autres résultats d'existence et de régularité des solutions faibles, voir H. BRÉZIS [4] et J. L. LIONS [11].

Lorsque le convexe, associé à l' I. V. dépend du temps de façon suffisamment régulière, un théorème d'existence de solutions faibles a été prouvé par M. BIROLI [3]. Finalement, pour des problèmes unilatéraux, avec opérateurs linéaires et obstacles qui dépendent du temps de manière non régulière, F. MIGNOT et J. P. PUEL [15] ont démontré l'existence d'une solution faible maximum.

Des résultats d'existence et de régularité de solutions fortes pour des problèmes unilatéraux, avec les contraintes dépendantes du temps de manière régulière, ont été prouvé par H. BRÉZIS [5], A. FRIEDMAN [9], M. BIROLI [2] et H. ATTOUCH, P. BÉNILAN, A. DAMLAMAN, C. PICARD [1].

P. CHARRIER et G. M. TROIANIELLO dans [6] et F. DONATI et M. MATZEU dans [7] prouvent dans le cas d'un opérateur respectivement linéaire et fortement non linéaire l'existence et l'unicité de la solution forte en utilisant une inégalité du type „Lewy-Stampacchia".

Dans ce travail on s'occupe de la régularité pour la solution forte d'une I. V. parabolique relative à les opérateurs du type:

$$Au = -\operatorname{div}\left(|\operatorname{grad} u|^{p-2} \operatorname{grad} u\right),$$

où $p \geqq 2$.

On considère d'abord le cas où le convexe dépend du temps et on donne trois théorèmes de régularité en supposant l'ouvert carré et les conditions au bord homogènes et en employant des résultats de régularité pour équations analogues à ceux qui sont donnés par A. EL KOLLI [8] (voir paragraphe 2).

Dans le paragraphe 3 on considère un ouvert Ω plus général (mais régulier) et on obtient encore deux théorèmes de régularité en utilisant un résultat pour équations elliptiques du à J. SIMON [19]. Si le convex ne dépend pas du temps, et les conditions au bord ne sont pas homogènes, on utilise la méthode de Rothe comme dans J. NEČAS [16].

Cet article généralise les résultats indiqués dans une note précedente [10].

Nous désirons remercier M. J. Nečas pour ses conseils et ses reinsegnements.

1. DEFINITIONS — NOTATIONS

On désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et par $\partial\Omega$ la frontière de Ω.

Soit Q le „cylindre" de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$:

$$Q = \Omega \times]0, T[, \; T \text{ fini},$$

et Σ la frontière latérale de Q:

$$\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[.$$

On désigne encore par Π^n le tore de période 2 par rapport à chaque variable X_i, $i = 1, \ldots, n$. On utilisera les espaces des classes de fonctions réelles sur Ω, $\partial\Omega$, Q, Σ, Π^n, $\Pi^n \times]0, T[$. Soit $W^s_p(\Omega)$ et $W^s_p(\Pi^n)$ l'espace usuel de Sobolev d'ordre s relatif à L_p sur Ω e Π^n respectivement, où $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < +\infty$.

Pour $\delta > 0$ soit

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \delta\} .$$

On introduit les espaces de Nikolski $H^k_p(\Omega)$ comme suit: $H^k_p(\Omega)$ est l'espace des fonctions $v \in W^{[k]}_p$ telles que

$$\left[\int_{\Omega_\delta} |D^{[k]}_i v(x + he_j) - D^{[k]}_i v(x)|^p \, \mathrm{d}x\right]^{1/p} \leqq M|h|^{k-[k]} \tag{1}$$

où $h, k \in \mathbb{R}$, $|h| \leqq \delta$,[1] e_j est le vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes, à exception de la j-ème, sont nulles,

$$D^{[k]}_i v = \frac{\partial^{[k]} v}{\partial_i x^{[k]}},$$

les precédantes inégalités étant verifiées pour tout $\Omega_\delta \neq \emptyset$. $H^k_p(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{H_p{}^k(\Omega)} = \{\|v\|^p_{W_p{}^k(\Omega)} + M^p(k, p, v, \Omega)\}^{1/p}$$

où M est la plus petite constante telle que (1) soit vérifiée (voir aussi [17]).

[1]) $[k]$ désigne ici la partie principale de k.

D'après les résultats de [17] on a les inclusions suivantes:

Proposition 1.

$$H_p^{k'} \subsetneq W_p^k \subsetneq H_p^k, \quad k' > k.$$

D'une manière tout à fait analogue on désigne par $H_p^k(\Pi^n)$ l'espace de Banach des fonctions u périodiques de période 2 par rapport à chaque variable appartenant à $W_p^k(\Pi^n)$ et telles que:

$$\int_P |D_i^{[k]} u(x + he_j) - D_i^{[k]} u(x)|^p \, dx \leqq M^p |h|^{p(k-[k])},$$

$$1 \leqq i, j \leqq n \quad \text{et où} \quad P =]a, a + 2[^n, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Si B est un espace de Banach et B' son dual, $L^p(0, T, B)$, $1 \leqq p < \infty$, désigne l'espace de Banach des fonctions v mesurables de $[0, T] \to B$ telles que:

$$\int_0^T \|v\|_B^p \, dt < +\infty.$$

On désigne par $(\cdot,\cdot)$ ou $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la dualité entre B et B' ou $L^p(0, T, B)$ et $L^{p'}(0, T, B')$ respectivement: $1/p + 1/p' = 1$.

$L_p^*(B)$ désigne l'espace des fonctions $h \to f(h)$ de $\mathbb{R}_+$ dans l'espace de Banach B, mesurables, telles que:

$$\int_0^{+\infty} \|f(h)\|_B^p \frac{dh}{h} < +\infty.$$

Posons $v_{ih} = v(x + he_i)$ on a (voir [17]):

$$W_p^{1+\sigma}(\Pi^n) = \{v : v(h) = h^{-\sigma}(v_{ih} - v) \in L_p^*(W_p^1(\Pi^n))\},$$

$$0 < \sigma < 1, \quad 1 \leqq i \leqq n$$

$$W_{p'}^{-\sigma}(\Pi^n) = \{v : v(h) = h^{-(1-\sigma)} . (v_{ih} - v) \in L_{p'}^* (W_{p'}^{-1}(\Pi^n))\}.$$

On considére la forme

$$a_\Omega(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega (|\text{grad}\, u|^{p-2} D_i u \, D_i v + c_0 |u|^{p-2} uv) \, dx,$$

$$c_0 \in \mathbb{R}^+, \quad p \geqq 2, \quad u, v \in W_p^1(\Omega).$$

L'identité:

$$(Au, v) = a_\Omega(u, v), \quad u \in W_p^1(\Omega), \quad v \in {}^\circ W_p^1(\Omega)$$

définit l'opérateur A de $W_p^1(\Omega)$ à $W_{p'}^{-1}(\Omega)$:

(2) $$Au = -\text{div}\,(|\text{grad}\, u|^{p-2} . \text{grad}\, u) + c_0 |u|^{p-2} u$$

qui résulte borné, hémicontinu sur $W_p^1(\Omega)$, strictement monotone, coercif sur $°W_p^1(\Omega)$.

Dans ce qui suit on considerera A aussi comme opérateur de $L^p(0, T, W_p^1(\Omega))$ à $L^{p'}(0, T, W_{p'}^{-1}(\Omega))$, qui résulte encore borné, hémicontinu etc... .

Remarque 1. On peut appliquer tout ce qui suit à un opérateur du type

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n} c_j(D_j u)^2\Big|^{(p-2)/2} D_i u\Big)_{x_i} + c_0|u|^{p-2} u$$

où $c_j \in \mathbb{R}^+$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{n} c_j > 0$.

Pour $c_j = \delta_{ji}$ on obtient l'opérateur

$$-\sum_{i=1}^{n}(|D_i u|^{p-2} D_i u)_{x_i} + c_0|u|^{p-2} u . \tag{2'}$$

2. RÉSULTATS DE RÉGULARITÉ DANS UN DOMAIN CARRÉ AVEC CONDITIONS AUX LIMITES HOMOGÈNES

On est interessé au problème

(I. V)
$$\langle u' + Au, v - u\rangle \geqq \langle f, v - u\rangle\,, \quad \forall v \in K$$
$$u(0) = u_0\,, \quad u \in K\,,$$

où on a choisi le convexe K comme suit:

$$K = \{v \in L^p(0, T, °W_p^1(\Omega)) \mid v \geqq \psi \text{ p. p. dans } Q\}$$

Dans ce paragraphe Ω désigne le pavé $]0, 1[^n$.

On donne ici trois résultats de régularité, dans les théorèmes 2 et 2' on employe la même technique de démonstration, dans le théorème 2' on fait des hypothèses plus faibles, dans le théorème 3 et le corollaire on fait des hypothèses supplementaires sur la régularité en t de f et de ψ et on démontre enfin que la solution u de (I. V.) est dans

$$L^\infty(0, T, H^{1+1/(p-1)}(\Omega)) \quad \text{avec} \quad u' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))\,.$$

On aura besoin, dans ce qui suit, des lemmes suivants:

Lemme 1. *Si $(\cdot,\cdot)$ dénote le produit scalaire dans R^n, et t_1, t_2 des vecteurs de R^n, il existe $c > 0$* [2]) *tel que*

$$((|t_2|_{R^n})^{p-2}\, t_2 - (|t_1|_{R^n})^{p-2}\, t_1, t_2 - t_1) \geqq c(|t_2 - t_1|_{R^n})^p\,, \tag{3}$$

$$|(|t_2|_{R^n})^{p-2}\, t_2 - (|t_1|_{R^n})^{p-2}\, t_1|_{R^n} \geqq c|t_2 - t_1|_{R^n}(|t_2|_{R^n} + |t_1|_{R^n})^{p-2}\,. \tag{4}$$

[2]) Dans ce qui suit c désigne une constante positive qui ne sera pas toujour la même.

Lemme 2. *Soit $g \in L^{p'}(\Pi^n)$, il existe une constante $c > 0$ telle que:*

$$\|g_{jh} - g\|_{(W_p{}^1(\Pi^n))'} \leqq c|h| \quad \textit{pour} \quad 1 \leqq j \leqq n \tag{5}$$

où $c = \operatorname*{Max}_j \|D_j g\|_{(W_p{}^1(\Pi^n))'}$.

Voir [8].

On va maintenant établir deux résultats de régularité pour le problème (6) suivant:

$$u' + Au = f, \quad u(0) = u_0, \quad u|_\Sigma = 0. \tag{6}$$

Théorème 1. *On donne f et u_0 avec les hypothèses*

$$f \in L^{p'}(Q), \quad u_0 \in {}^\circ H_2^{p'/2}(\Omega), {}^{3)} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Il existe alors une solution unique de (6) telle que:

$$u \in L^p(0, T, H_p^{1+1/(p-1)}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, H_2^{p'/2}(\Omega)),$$
$$u' \in L^{p'}(0, T, H_p^{-1+1/(p-1)}(\Omega)),$$

et en particulier:

$$\|u\|_{L^p(0,T,H_p{}^{1+1/(p-1)}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T,H_2{}^{p'/2}(\Omega))} \leqq c\{\|f\|_{L^{p'}(Q)} + \|u_0\|_{H_2{}^{p'/2}(\Omega)}\}. \tag{7}$$

Démonstration. Il est bien connu que (6) admet une solution unique u (voir [11]) telle que

$$u \in L^p(0, T, {}^\circ W_p^1(\Omega)), \quad u' \in L^{p'}(0, T, W_{p'}^{-1}(\Omega)).$$

Il reste alors à démontrer la régularité; dans ce but on va utiliser avec El Kolli [8] une convenable méthode de prolongement.

On prolonge, par rapport à chaque variable, à $]-1, 1[^n$, puis, par périodicité à $\mathbb{R}^n$. Plus précisement: soit $\Omega_{k_1,\ldots,k_s}$ l'ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par:

$$\Omega_{k_1\ldots k_s} = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 < x_{k_i} < 0, \quad i = 1, \ldots, s, \; s \leqq n, \; 0 < x_j < 1, \; j \neq k_i\}.$$

Si l'on dénote avec $x^{(s)}$ la s-ple $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_s})$ et avec $x^{(n-s)}$ la $(n - s)$-ple des variables x_j, $j \neq k_i$, $i = 1, \ldots, s$, on définit la fonction $\tilde{u}$ dans $\Omega_{k_1\ldots k_s}$ comme suit:

$$\tilde{u}(t, x^{(s)}, \; x^{(n-s)}) = (-1)^s u(t, -x^{(s)}, \; x^{(n-s)}). \tag{8}$$

Posons

$$V = W_p^1(\Pi^n), \quad V' = (W_p^1(\Pi^n))',$$
$$\mathcal{V} = L^p(0, T, V), \quad \mathcal{V}' = L^{p'}(0, T, V'),$$

[3]) ${}^\circ H_2^{p'/2}(\Omega)$ denote la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H_2^{p'/2}(\Omega)$.

on a: $\tilde{u} \in \mathscr{V}$ et si on prolonge f comme auparavant, on a aussi:

$$\tilde{f} \in L^{p'}(0, T, \Pi^n) .$$

On peut vérifier aisement que d'après (6) on a:

$$(\tilde{u}', \psi) + a_P(\tilde{u}, \psi) = (\tilde{f}, \psi) \quad \text{p. p. en } t , \quad \forall \psi \in \mathscr{V} , \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0 \tag{9}$$

où

$$a_p(\tilde{u}, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \int_P |\text{grad } \tilde{u}|^{p-2} D_i\tilde{u}\, D_i\psi + c_0|\tilde{u}|^{p-2}\, \tilde{u}\psi)\, \mathrm{d}x\ ^{4}) ,$$

$$P =]a, a + 2[^n , \quad a \in \mathbb{R} .$$

Si on appelle maintenant $\tilde{u} = v$ et $\tilde{f} = g$ on écrit la (9) dans la manière suivante:

$$v' + Av = g \tag{10}$$

et aussi

$$v'_{jh} + Av_{jh} = g_{jh} \tag{11}$$

et encore pour $t \leqq T$

$$\int_0^t [(v'_{jh} - v', v_{jh} - v) + a_p(v_{jh}, v_{jh} - v) - a_p(v, v_{jh} - v)]\, \mathrm{d}\tau =$$
$$= \int_0^t (g_{jh} - g, v_{jh} - v)\, \mathrm{d}\tau .$$

On déduit alors que (voir (3) du lemme (1)):

$$\tfrac{1}{2}\|v_{jh}(t) - v(t)\|^2_{L^2(\pi^n)} + c\int_0^t \|v_{jh} - v\|^p_V\, \mathrm{d}\tau \leqq \tag{12}$$
$$\leqq c\int_0^t \|g_{ih} - g\|^{p'}_{V'}\, \mathrm{d}\tau + \tfrac{1}{2}\|(\tilde{u}_0)_{ih} - \tilde{u}_0\|^2_{L^2(\pi^n)} ;$$

ce qui, compte tenu des hypothèses et du lemme 2, donne:

$$\|v_{ih}(t) - v(t)\|^2_{L^2(\Pi^n)} + c\int_0^t \|v_{ih} - v\|^p_V\, \mathrm{d}\tau \leqq c|h|^{p'} \left\{ \int_0^t \operatorname*{Max}_j \|D_j g\|^{p'}_{(W_{P^1}(\Pi^n))'}\, \mathrm{d}\tau + \right.$$
$$\left. + \|\tilde{u}_0\|^2_{H_{2^{p'/2}}(\Pi^n)} \right\}$$

et donc la thèse.

---

4) Dans ce qui suit on supposera, seulement pour brièveté, que $c_0 = 0$.

Remarque 2. On peut aisement déduire du théorème 1 un résultat de régularité elliptique: c'est à dire: le problème de Dirichlet suivant:

$$Au = f\,, \quad f \in L^{p'}(\Omega)\,, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

admet une solution unique u telle que: $u \in {}^{\circ}H_p^{1+1/(p-1)}(\Omega)$. (Voir aussi [8] pour un opérateur du type (2') et [19] pour un opérateur du type (2)).

Théorème 1'. *On se donne f et u_0 avec les hypothèses*

$$f \in L^{p'}(0, T, W_{p'}^{-\gamma}(\Omega))\,, \quad u_0 \in {}^{\circ}W_2^{(1-\gamma)p'/2}(\Omega)\,, \quad 0 < \gamma < 1\,,$$

il existe alors une solution unique de (6) *telle que*:

$$\begin{aligned} (13) \qquad & u \in L^p(0, T, {}^{\circ}W_p^{1+(1-\gamma)/(p-1)}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, W_2^{(1-\gamma)p'/2}(\Omega))\,, \\ & u' \in L^{p'}(0, T, W_{p'}^{-1+(1-\gamma)/p-1)}(\Omega))\,. \end{aligned}$$

Démonstration. On part comme dans la preuve du théorème 1, et on déduit, d'après (11), que:

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\|v_{jh}(t) - v(t)\|^2_{L^2(\Pi^n)}}{h^{((1-\gamma)/2)p'2}} \frac{dh}{h} + c\int_0^t dt \int_0^{+\infty} \frac{\|v_{jh}(t) - v(t)\|^p_V}{h^{(1-\gamma)p/(p-1)}} \frac{dh}{h} \leqq$$

$$\leqq c\int_0^t dt \int_0^{+\infty} \frac{\|g_{jh}(t) - g(t)\|^{p'}_{V'}}{h^{(1-\gamma)p'}} \frac{dh}{h} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\|(\tilde{u}_0)_{jh} - \tilde{u}_0\|^2_{L^2(\Pi^n)}}{h^{(1-\gamma)(p'/2)2}} \frac{dh}{h}$$

et donc la thèse.

Nous pouvons maintenant énoncer et prouver nos premiers résultats sur les inéquations variationnelles.

Théorème 2. *Si l'on suppose que*:

$(\mathrm{i})_f \quad f \in L^{p'}(Q)\,,$

$(\mathrm{i})_\psi \quad \psi \in L^p(0, T; W_p^1(\Omega))\,, \qquad (\mathrm{ii})_\psi \quad \dfrac{\partial\psi}{\partial t} \in L^{p'}(0, T, W_{p'}^{-1}(\Omega))\,,$

$(\mathrm{iii})_\psi \quad \dfrac{\partial\psi}{\partial t} + A\psi \in L^{p'}(Q)\,, \qquad (\mathrm{iv})_\psi \quad \psi|_\Sigma \leqq 0$ [5]),

$(\mathrm{i})_{u_0} \quad u_0 \in {}^{\circ}H_2^{p'/2}(\Omega)\,, \qquad (\mathrm{ii})_{u_0} \quad u_0 \geqq \psi(0)\,;$

alors le problème (I. V) *admet une solution unique u telle que*:

$$\begin{aligned} (14) \qquad & u \in L^p(0, T, {}^{\circ}H_p^{1+1/(p-1)}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, H_2^{p'/2}(\Omega))\,, \\ & u' \in L^{p'}(0, T, H_{p'}^{-1+1/(p-1)}(\Omega))\,. \end{aligned}$$

---

[5]) K est non vide de que $\psi \vee 0 \in K$; avec le symbole $\vee(\wedge)$ on désigne dans ce papier la borne supérieure (inferieure respectivement) dans $L^r(\Omega)$, $1 \leqq r \leqq +\infty$.

Démonstration. On ramène l'inéquation (I. V) au cas du problème (6) en utilisant une inégalité „a priori" du type Lewy-Stampacchia; c'est à dire, dans [7] il est démontré que le problème (I. V) admet une solution unique $u \in L^p(0, T, {}^\circ W_p^1(\Omega))$ telle que:

$$f \leqq u' + Au \leqq (\psi' + A\psi - f)^+ + f\,^{6}) . \tag{15}$$

On déduit de (15) que u est la solution d'une équation d'évolution avec deuxième membre dans $L^{p'}(Q)$ ed d'après le théorème 1 on achève la démonstration.

Théorème 2'. *Si l'on suppose que:*

(i)$_f$ $\quad f \in L^{p'}(0, T, W_{p'}^{-\gamma}(\Omega))\,, \quad 0 < \gamma < 1\,;$

(i)$_\psi$ $\quad \psi \in L^p(0, T, W_p^1(\Omega))\,;$ $\qquad$ (ii)$_\psi$ $\quad \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \in L^{p'}(0, T, W_{p'}^{-1}(\Omega))\,;$

(iii)$_\psi$ $\quad \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial t} + A\psi - f\right)^{\pm} \in L^{p'}(0, T, W_{p'}^{-\gamma}(\Omega))\,;$ $\qquad$ (iv)$_\psi$ $\quad \psi|_\Sigma \leqq 0\,;$

(i)$_{u_0}$ $\quad u_0 \in {}^\circ W_2^{(1-\gamma)p'/2}(\Omega)\,;$ $\qquad$ (ii)$_{u_0}$ $\quad u_0 \geqq \psi(0)\,;$

alors le problème (I. V) *admet une solution unique u telle que*:

$$\begin{aligned} &u \in L^p(0, T, {}^\circ W_p^{1+(1-\gamma)/(p-1)}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, W_2^{(1-\gamma)p'/2}(\Omega))\,, \\ &u' \in L^{p'}(0, T, W_{p'}^{-1+(1-\gamma)/(p-1)}(\Omega))\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Démonstration. On part comme dans la preuve du théorème 2; on déduit de (15) que $u' + Au \in L^{p'}(0, T, W_{p'}^{-\gamma}(\Omega))$ et on achève la démonstration en utilisant le théorème 1'.

On va maintenant donner des hypothèses plus fortes, pour obtenir une solution u plus régulière par rapport a t: c'est à dire:

Théorème 3. *Si l'on suppose que*:

(17) $\quad$ (i)$_f$ $\quad f \in L^{p'}(Q)\,,\qquad$ (ii)$_f$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T, L^2(\Omega))\,,\qquad$ (iii)$_f$ $\quad f(0) \in L^2(\Omega)\ ^{7})\,,$

(i)$_\psi$ $\quad \psi \in L^p(0, T, W_p^1(\Omega))\,,\qquad$ (ii)$_\psi$ $\quad \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \in L^\infty(0, T, {}^\circ W_p^1(\Omega))\,,$

(iii)$_\psi$ $\quad \dfrac{\partial \psi}{\partial t} + A\psi \in L^{p'}(Q)\,,\qquad$ (iv)$_\psi$ $\quad \psi|_\Sigma \leqq 0\,,\qquad$ $(v)_\psi$ $\quad \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \in L^p(Q)\ ^{8})\,,$

---

[6]) On dénote avec b^+ et b^- la partie positive et negative de b dans le sense des mesures.

[7]) $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T, L^2(\Omega))$ et $f \in L^{p'}(Q) \Rightarrow f \in L^\infty(0, T, L^{p'}(\Omega))$.

[8]) $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} + A\psi \in L^{p'}(Q)$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} \in L^\infty(0, T, {}^\circ W_p^1(\Omega)) \Rightarrow A\psi \in L^{p'}(Q)$.

$$(\mathrm{i})_{u_0} \quad u_0 \in {}^\circ H_2^{p'/2}(Q)\,, \qquad (\mathrm{ii})_{u_0} \quad u_0 \geqq \psi(0)\,, \qquad (\mathrm{iii})_{u_0} \quad Au_0 \in L^2(\Omega)\,;$$

alors le problème (I. V) *admet une solution unique u telle que*:

$$(18) \qquad 1) \quad u \in L^p(0, T, {}^\circ H_p^{1+1/(p-1)}(\Omega))\,, \quad u' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))\ ^{9)}\,,$$

$$2) \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(|D_i u|^{(p-2)/2} D_i u\right) \in L^2(Q)\,, \quad \forall i\,.$$

Démonstration. Le plan de la démonstration est le suivant:

α) on construit des solutions „approchées“ u_ε^m par la méthode de Faedo-Galerkin,
β) on établit sur les solutions „approchées“ u_ε^m des estimations à priori,
γ) on passe à la limite sur m et on trouve que u_ε est la solution „régulière“ d'un problème penalisé,
δ) on passe enfin à la limite sur ε, après avoir démontré des majorations uniformes par rapport à ε.

Etape (α). On introduit une suite $w_1, \ldots, w_m$ des fonctions ayant les proprietés suivantes:

$w_j(x) \in {}^\circ H_p^{1+1/(p-1)}(\Omega)\,, \quad \forall_j\,;\quad \forall m,\ w_1, \ldots, w_m$ sont linéairement indépendants, les combinaisons linéaires finies des w_j sont denses dans ${}^\circ H_p^{1+1/(p-1)}(\Omega)$.

On vois aisement que l'on peut approcher l'obstacle ψ de la manière suivante:

Lemme 3. *Il existe des fonctions* $\psi^m(t, x)$ *et* $v^m(x)$

$$\psi^m = \sum_{j=1}^m \beta_j(t)\, w_j(x) + \varphi^m(x)\,, \quad \varphi^m(x) \in W_p^1(\Omega)$$

telle que:

$$(19) \qquad \psi^m \to \psi \quad \text{en} \quad L^p(0, T, W_p^1(\Omega))\,, \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi^m \to \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{en} \quad L^\infty(0, T, {}^\circ W_p^1(\Omega))\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi^m \to \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{en} \quad L^p(Q)\,,$$

$$(20) \qquad v^m(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j\, w_j(x)\,, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}\,,$$

$$Av^m \to Au_0 \quad \text{en} \quad L^2(\Omega)\,, \quad v^m \geqq \psi^m(0)\,.$$

On cherche u_ε^m solution approchée du problème (I. V) sous la forme

$$u_\varepsilon^m(t, x) = \sum_{j=1}^m \gamma_j(t)\, w_j(x)$$

---

[9]) En particulier $u \in C^\circ(0, T, H_2^{p'/2}(\Omega))$ cfr. [12].

les γ_i étant a déterminer par les conditions:

$$(\mathrm{P})_\varepsilon^m \left(\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m, w_j\right) + (Au_\varepsilon^m, w_j) - \frac{1}{\varepsilon}((\psi^m - u_\varepsilon^m)^+, w_j) = (f, w_j), \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$u_\varepsilon^m(0) = v^m .$$

Le système $(\mathrm{P})_\varepsilon^m$ d'équations différentielles ordinaires non linéaires admet une solution dans un intervalle $[0, t_m]$; les estimations a priori qui suivent montreront que $t_m = T$.

Etape (β). On multiplie l'équation de $(\mathrm{P})_\varepsilon^m$ de indice j par $\gamma_i^m(t)$ et l'on somme en j. Il vient après integration de 0 a t $(t < t_m)$:

$$(21) \qquad \tfrac{1}{2}\|u_\varepsilon^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\int_0^t \|u_\varepsilon^m\|_{W_p^1(\Omega)}^p \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t ((\psi^m - u_\varepsilon^m)^+, \psi^m - u_\varepsilon^m)\, \mathrm{d}\sigma \leqq$$
$$\leqq \int_0^t (f, u_\varepsilon^m)\, \mathrm{d}\sigma + \tfrac{1}{2}\|u^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t ((\psi^m - u_\varepsilon^m)^+, \psi^m)\, \mathrm{d}\sigma .$$

On déduit donc, en particulier de (21) que (ε étant fixé)

$$\|u_\varepsilon^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqq c + \int_0^t \left\|\frac{1}{\varepsilon}(\psi^m - u_\varepsilon^m)^+(\sigma)\right\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \mathrm{d}\sigma$$

et aussi en particulier:

$$\|u_\varepsilon^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqq c_\varepsilon + c\,\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|u_\varepsilon^m(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2\, \mathrm{d}\sigma$$

d'où résulte que:

$$(22) \qquad \|u_\varepsilon^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqq c_\varepsilon \text{ (indépendant de } m)$$

et alors $t_m = T$.

Reprenant (21) on en déduit que:

$$(23) \qquad \|u_\varepsilon^m\|_{L^p(0,T,{}^\circ W^1_p(\Omega))}^p + \|u_\varepsilon^m\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leqq c\left\{\|f\|_{L^{p'}(Q)}^{p'} + \|v^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \right.$$
$$\left. + \left\|\frac{(\psi^m - u_\varepsilon^m)^+}{\varepsilon}\right\|_{L^{p'}(Q)}^{p'} + \|\psi^m\|_{L^p(Q)}^p\right\}.$$

On dérive en t (formellement) l'équation de $(\mathrm{P})_\varepsilon^m$, on multiplie par $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,\gamma_j(t)$ et on somme en j. Il vient, d'après integration de 0 a t:

$$(24) \qquad \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t\int_\Omega |\mathrm{grad}\, u_\varepsilon^m|^{p-2}\left[(p-2)\left(\frac{\partial}{\partial t}|\mathrm{grad}\, u_\varepsilon^m|\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left|\mathrm{grad}\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}\right|^2\right] \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}(\psi^m - u)^+, \frac{\partial}{\partial t}(\psi^m - u_\varepsilon^m)\right) \mathrm{d}\sigma = J_1 + J_2 + J_3$$

où:

$$J_1 = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$J_2 = \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m\right) d\sigma ,$$

$$J_3 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}(\psi^m - u_\varepsilon^m)^+, \frac{\partial}{\partial t}\psi^m\right) d\sigma \equiv -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left((\psi^m - u_\varepsilon^m)^+, \frac{\partial^2 \psi^m}{\partial t^2}\right) d\sigma +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m(t) + A\, u_\varepsilon^m(t) - f(t), \frac{\partial}{\partial t}\psi^m(t)\right).$$

On a:

(25) $$J_1 = \tfrac{1}{2}\|Av^m - f(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

(26) $$J_2 \leqq \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L^1(0,T,L^2(\Omega))} + \frac{1}{4}\left\|\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}.$$

Estimons maintenant J_3. Pour simplifier posons

$$u_\varepsilon^m = v , \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi^m = w .$$

En appliquant la inégalité de Joung résulte:

$$(Av, w)(t) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega (|\text{grad } v|^{p-2} v_{x_i} \cdot w_{x_i})(t)\, dx \leqq$$

$$\leqq \frac{\mu^{p'}}{p'}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \||\text{grad } v|^{p-2} v_{x_i}|^{p'}(t)\, dx + \frac{1}{p\mu^p}\sum_{i=1}^n \int_\Omega |w_{x_i}|^p (t)\, dx .$$

Mais on a:

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega ||\text{grad } v|^{p-2} v_{x_i}|^{p'}(t)\, dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \Big\{|\text{grad } v|^{(p-2)p'/2} |v_{x_i}^{p'/2}(0)| +$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} ||\text{grad } v|^{(p-2)p'/2} v_{x_i}|^{p'/2}\, d\sigma\Big\}^2 dx \leqq$$

$$\leqq 2\sum_{i=1}^n \left[\int_\Omega |\text{grad} v|^{(p-2)p'} |v_{x_i}|^{2p'/2}(0)\, dx + T\int_\Omega \int_0^t \left|\frac{\partial}{\partial t} |\text{grad} v|^{(p-2)p'/2} |v_{x_i}|^{p'/2}\right|^2 dx\, d\sigma\right] \leqq$$

$$\leqq c\left\{\int_\Omega |\text{grad} v|^p(0)\, dx + \int_\Omega \int_0^t |\text{grad}\, v|^{p-2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}|\text{grad}\, v|\right)^2 + \left|\text{grad}\, \frac{\partial v}{\partial t}\right|^2\right] dx\, d\sigma\right\}.$$

Il résulte alors:

$$\left(Au_\varepsilon^m, \frac{\partial\psi^m}{\partial t}\right)(t) \leqq 2\,\frac{\mu^{p'}}{p'}\left\{\|v^m\|^p_{W_p{}^1(\Omega)} + c\int_\Omega\int_0^t |\text{grad } u_\varepsilon^m|^{p-2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}|\text{grad } u_\varepsilon^m|\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left|\text{grad } \frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}\right|^2\right] \text{d}x\, \text{d}\sigma\right\} + c\,\frac{1}{p\mu^p}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\,\psi^m(t)\right\|^p_{W_p{}^1(\Omega)}.$$

Et donc on a:

$$|J_3| \leqq \left\|\frac{1}{\varepsilon}(\psi^m - u_\varepsilon^m)^+\right\|_{L^{p'}(Q)} \cdot \left\|\frac{\partial^2\psi^m}{\partial t^2}\right\|_{L^p(Q)} + \frac{1}{8}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\,u_\varepsilon^m(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \tag{27}$$

$$+ 2\left\|\frac{\partial\psi^m}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p'}\|f\|^{p'}_{L^\infty(0,T,L^{p'}(\Omega))} + \frac{1}{p}\left\|\frac{\partial\psi^m}{\partial t}\right\|^p_{L^\infty(0,T,L^p(\Omega))} +$$

$$+ 2\,\frac{\mu^{p'}}{p'}\|v^m\|^p_{W_p{}^1(\Omega)} + 2c\,\frac{\mu^{p'}}{p'}\int_\Omega\int_0^t |\text{grad } u_\varepsilon^m|^{p-2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}|\text{grad } u_\varepsilon^m|\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left|\text{grad } \frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}\right|^2\right\} \text{d}x\, \text{d}\sigma + \frac{c}{p\mu^p}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\,\psi^m(t)\right\|^p_{W_p{}^1(\Omega)}.$$

Donc de (24), (25), (26), (27) résulte, avec une choix convénable de μ, la majoration suivante:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\,u_\varepsilon^m\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \int_\Omega\int_0^t |\text{grad } u_\varepsilon^m|^{p-2}\left[(p-2)\left(\frac{\partial}{\partial t}|\text{grad } u_\varepsilon^m|\right)^2 + \right. \tag{28}$$

$$\left. + \left|\text{grad } \frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}\right|^2\right] \text{d}x\, \text{d}\sigma \leqq c\left[\|Av^m - f(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L^1(0,T,L^2(\Omega))} + \right.$$

$$+ \left\|\frac{1}{\varepsilon}(\psi^m - u_\varepsilon^m)^+\right\|^{p'}_{L^{p'}(Q)} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi^m\right\|^p_{L^p(Q)} +$$

$$\left. + \|f\|^{p'}_{L^\infty(0,T,L^{p'}(Q))} + \left\|\frac{\partial\psi^m}{\partial t}\right\|^p_{L^\infty(0,T,W_p{}^1(\Omega))} + \|v^m\|^p_{W_p{}^1(\Omega)}\right].$$

Etape (γ). D'après (22) et (28), compte tenu de

$$\left\|\frac{(\psi^m - u_\varepsilon^m)^+}{\varepsilon}\right\|^{p'}_{L^{p'}(Q)} \leqq c_1 + c\left\|\frac{1}{\varepsilon}\,u_\varepsilon^m\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$$

et de (21) on déduit que:

(29) (i) $\|u_\varepsilon^m\|^{p'}_{L^p(0,T,{}^\circ W_p{}^1(\Omega))} \leqq c_\varepsilon$ (indépendant de m),

(ii) $\quad \|u_\varepsilon^m\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leqq c_\varepsilon$ (indépendant de m),

(iii) $\quad \left\|\dfrac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leqq c_\varepsilon$ (indépendant de m),

(iv) $\quad \left\||\text{grad}\, u_\varepsilon^m|^{(p-2)/2} \cdot \left|\text{grad}\, \dfrac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}\right|\right\|_{L^2(Q)} \leqq c_\varepsilon$ (indépendant de m),

(v) $\quad \left\||\text{grad}\, u_\varepsilon^m|^{(p-2)/2} \dfrac{\partial}{\partial t}|\text{grad}\, u_\varepsilon^m|\right\|_{L^2(Q)} \leqq c_\varepsilon$ (indépendant de m),

Donc, (ε étant fixé), on peut extraire de u_ε^m une suite telle que:

(30) i) $\quad u_\varepsilon^\mu \to u_\varepsilon$ dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ faible étoile,

ii) $\quad u_\varepsilon^\mu \to u_\varepsilon$ dans $L^p(0, T, {}^\circ W_p^1(\Omega))$ faible,

iii) $\quad \dfrac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^\mu \to \dfrac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon$ dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ faible étoile.

On déduit maintenant de (30), ii) et iii) que $u_\varepsilon^\mu \to u_\varepsilon$ dans $L^p(0, T, W_p^{1-\delta}(\Omega))$ fort (cfr. [11]) et en particulier:

(31) $$(\psi^\mu - u_\varepsilon^\mu)^+ \to (\psi - u_\varepsilon)^+ \text{ dans } L^p(Q) \text{ fort}.$$

Par ailleurs, A étant borné, on peut déduire de (29) que:

(32) $$\|Au_\varepsilon^m\|_{L^{p'}(0,T,W^{-1}{}_{p'}(\Omega))} \leqq c_\varepsilon \text{ (indépendant de } m)$$

et en passant à la limite sur m dans $(\mathrm{P})_\varepsilon^m$ on obtient (d'après l'hémicontinuité et la monotonie de A, cfr. [11]):

$(\mathrm{P})_\varepsilon$ $$\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon + Au_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^+ = f,$$

$$u_\varepsilon(0) = u_0, \quad u_\varepsilon \in L^p(0, T, {}^\circ W_p^1(\Omega))$$

et aussi, après (23) et (28):

(33) $$\|u_\varepsilon\|^p_{L^p(0,T,{}^\circ W_p{}^1(\Omega))} \leqq c\left\{\|f\|^{p'}_{L^{p'}(Q)} + \left\|\frac{(\psi - u_\varepsilon)^+}{\varepsilon}\right\|^{p'}_{L^{p'}(Q)} + \|\psi\|^p_{L^p(Q)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}.$$

(34) $$\left\|\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \left\||\text{grad}\, u_\varepsilon|^{(p-2)/2}\left|\text{grad}\, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|\right\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \left\||\text{grad}\, u_\varepsilon|^{(p-2)/2} \frac{\partial}{\partial t}|\text{grad}\, u_\varepsilon|\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leqq$$

$$\leqq c\left\{\|f(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Au_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}f\right\|^2_{L^1(0,T,L^2(\Omega))} + \|f\|^{p'}_{L^\infty(0,T,L^{p'}(\Omega))} + \right.$$

$$\left. + \left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^p_{L^\infty(0,T,W_p{}^1(\Omega))} + \left\|\frac{(\psi - u_\varepsilon)^+}{\varepsilon}\right\|^{p'}_{L^{p'}(Q)} + \left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\|^p_{L^p(Q)}\right\}.$$

Si on remarque que le problème (P_ε) admet une solution unique (cfr. [11]), on a aussi (30) et (31) pour l'entière suite $\{u^m_\varepsilon\}_{m\in\mathcal{M}}$.

Etape (δ). La majoration uniforme par rapport à ε, dont nous avons besoin, pour achever le démonstration du théorème 3, est donné par le lemme suivant:

Lemme 4. *Dans les hypothèses du théorème 2 on a*

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^+\right\|_{L^{p'}(Q)} \leqq c \tag{35}$$

où c ne dépend pas de ε.

Démonstration. Multipliant l'équation de (P_ε) par $|(\psi - u_\varepsilon)^+|^{p'-2}(\psi - u_\varepsilon)^+$ on a:

$$\int_0^t (\psi' - u'_\varepsilon + A\psi - Au_\varepsilon, |(\psi - u_\varepsilon)^+|^{p'-2}(\psi - u_\varepsilon)^+)\, d\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|(\psi - u_\varepsilon)^+\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}\, d\sigma =$$

$$= \int_0^t (\psi' + A\psi - f, |(\psi - u_\varepsilon)^+|^{p'-2}(\psi - u_\varepsilon)^+)\, d\sigma\,.$$

En utilisant l'inégalité de Joung on en déduit que:

$$\frac{1}{p'}\|(\psi - u_\varepsilon)^+(t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|(\psi - u_\varepsilon)^+\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}\, d\sigma +$$

$$+ (p' - 1)\int_0^t \int_{\Omega\cap\{\psi > u_\varepsilon\}} \sum_{i=1}^n (|\text{grad}\,\psi|^{p-2}\psi_{x_i} -$$

$$- |\text{grad}\,u_\varepsilon|^{p-2}u_\varepsilon)_{x_i}(\psi - u_\varepsilon)_{x_i}|(\psi - u_\varepsilon)|^{p'-2}\, dx\, d\sigma \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{p}\mu^p\|(\psi - u_\varepsilon)^+\|^{p'}_{L^{p'}(Q)} + \frac{\mu^{-p'}}{p'}\|\psi' + A\psi - f\|^{p'}_{L^{p'}(Q)}\,.$$

En utilisant la (2) du lemme (1) on peut dire que

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{p}\mu^p\right)\|(\psi - u_\varepsilon)^+\|^{p'}_{L^{p'}(Q)} \leqq \frac{1}{p'}\mu^{-p'}\|\psi' + A\psi - f\|^{p'}_{L^{p'}(Q)}$$

et donc, en posant $\mu^p = 1/\varepsilon$, la (35).

Maintenant on peut majorer le deuxième membre de (33) et (34) par une constante qui ne dépend pas de ε.

La fonction u_ε est la solution d'une équation du type (6) avec deuxième membre F

$$F = f + \frac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^+ \in L^{p'}(Q), \quad \|F\|_{L^{p'}(Q)} \leqq c .$$

On déduit alors de (7) que:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(0,T,H_p{}^{1+1/(p-1)}(\Omega))\cap L^\infty(0,T,H_2{}^{p'/2}(\Omega))} \leqq \tag{36}$$

$$\leqq c\left\{\left\|\frac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^+\right\|_{L^{p'}(Q)} + \|f\|_{L^{p'}(Q)} + \|u_0\|_{H^{p'/2}(\Omega)}\right\}.$$

On doit seulement passer à la limite en ε et pour faire ça on revient au problème $(\mathrm{P})_\varepsilon$, en remarquant que pour tout v dans $\mathbb{K}$ on a:

$$(-(\psi - u_\varepsilon)^+, u_\varepsilon - v) \equiv ((\psi - v)^+ - (\psi - u_\varepsilon)^+, u_\varepsilon - v) \geqq 0 \quad \text{p. p. en } t . \tag{37}$$

En multipliant l'équation dans $(\mathrm{P})_\varepsilon$ par $u_\varepsilon - v$ ($v \in \mathbb{K}$) on peut écrire, d'après (37):

$$\langle u_\varepsilon', u_\varepsilon - v\rangle + \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon - v\rangle \leqq \langle f, u_\varepsilon - v\rangle . \tag{38}$$

De (33) et (34) on déduit en particulier (pour une sous-suite que l'on note encore avec u_ε) que (cfr. [11]):

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{dans} \quad L^p(0, T, W_p^1(\Omega))$$

et A étant borné, aussi:

$$(\psi - u_\varepsilon)^+ = \varepsilon(Au_\varepsilon + u_\varepsilon' - f) \to 0$$

ce qui entraîne $u \in \mathbb{K}$.

On passe maintenant à la limite dans (38) et l'on achève la démonstration.

Corollaire 1. *Si l'on ajoute aux hypothèses du théorème* 3 *que*:

$$A\psi \in L^\infty(0, T, L^{p'}(\Omega))$$

alors la solution de (I. V) *est dans* $L^\infty(0, T, H_p^{1+[1/(p-1)]}(\Omega))$.

Demonstration. On part de (15) (cfr. [7]) que l'on écrit dans la manière suivante:

$$-u' + (A\psi + \psi')\, Vf \geqq Au \geqq f - u' .$$

D'après le fait que $u' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ on déduit que:

$$Au \in L^\infty(0, T, L^{p'}(\Omega)) .$$

En utilisant un résultat elliptique (cfr. Remarque 2) il vient

$$\|u(t)\|_{H_p^{1+[1/(1-p)]}(\Omega)} \leqq c\|Au(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} \leqq c\|Au\|_{L^\infty(0,T,L^{p'}(\Omega))} .$$

3. RÉSULTATS DE RÉGULARITÉ DANS UN OUVERT RÉGULIER

Dans ce paragraphe on donne deux théorèmes du type du corollaire 1, en utilisant les résultats de régularité de J. Simon (voir Annexe 1).

On fait l'hypothèse que Ω soit un ouvert de classe C^3.

Théorème 4. *Si on fait les hypothèses suivantes:*

$(\mathrm{i})_f \quad f \in L^{p'}(Q)\,, \qquad (\mathrm{ii})_f \quad \dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T, L^2(\Omega))\,, \qquad (\mathrm{iii})_f \quad f(0) \in L^2(\Omega)\,,$

$(\mathrm{i})_\psi \quad \psi \in L^p(0, T, W_p^1(\Omega))\,, \qquad (\mathrm{ii})_\psi \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \in L^\infty(0, T, {}^\circ W_p^1(\Omega))\,,$

$(\mathrm{iii})_\psi \quad \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \in L^p(Q)\,, \qquad (\mathrm{iv})_\psi \quad A\psi \in L^\infty(0, T, L^{p'}(\Omega))\,,$

$(\mathrm{v})_\psi \quad \psi_\Sigma \leqq 0\,,$

$(\mathrm{i})_{u_0} \quad u_0 \in {}^\circ W_p^1(\Omega)\,, \qquad (\mathrm{ii})_{u_0} \quad Au_0 \in L^2(\Omega)\,, \qquad (\mathrm{iii})_{u_0} \quad u_0 \geqq \psi(0)$

alors la solution de (I. V) *vérifie les conditions suivantes:*

$$u \in L^\infty(0, T, {}^\circ H_p^{1+[1/(p-1)^2]}(\Omega))\,, \quad u' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))\,.$$

Demonstration. On procède comme dans le théorème 3. On déduit de (33) et (34), compte tenu de (35), les extimations suivantes:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(0,T,{}^\circ W_p^1(\Omega))} \leqq c\,, \tag{39}$$

$$\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leqq c\,, \tag{40}$$

où c ne dépend pas de ε.

D'après (39), (40) on obtient que

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{dans } L^p(0, T, {}^\circ W_p^1(\Omega)) \quad \text{faible}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon \to \frac{\partial}{\partial t} u \quad \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \quad \text{faible étoile}$$

et aussi que $u_\varepsilon \to u$ en $L^p(0, T, W_p^{1-\delta}(\Omega))$ fort.

On démontre alors que u est solution de (I. V) en passant à la limite dans (38); mais de (40) on a aussi

$$u' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))\,.$$

En partant de (15) on a alors

$$-u' + (A\psi + \psi') \wedge f \geqq Au \geqq f - u'$$

et donc

$$Au \in L^\infty(0, T, L^{p'}(\Omega)) .$$

En utilisant le résultat elliptique de J. Simon [19], on obtient

$$u \in L^\infty(0, T, H_p^{1+[1/(p-1)^2]}(\Omega)) .$$

Si l'obstacle est dépendant seulement des variables d'espace, on peut obtenir des résultats du type du théorème 4, aussi pour le problème non homogène, en utilisant la méthode de Rothe (voir Brezis [5], Nečas [16]). Cette méthode peut être employé (voir [16]) toutesles fois qu'on a des résultats de régularité elliptique pour opérateurs monotones [voir par example l'opérateur A_p de l'Annexe 1].

On fait les hypothèses suivantes:

(41)
$$\begin{aligned} & f \in C^\circ(0, T, L^2(\Omega)) \cap VB(0, T, L^2(\Omega)) , \\ & \psi \in W_p^1(\Omega) , \quad A\psi \in L^{p'}(\Omega) , \\ & g \in C^\circ(0, T, W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)) , \quad g \geqq \psi|_\Sigma , \\ & u_0 \in {}^\circ W_p^1 + G, Au_0 \in L^2(\Omega) , \quad u_0 \geqq \psi . \end{aligned}$$

où $(G \in W_p^2(\Omega)/G|_{\delta\Omega}) = g(0)$.

On s'interesse au problème

(P)
$$\langle u' + Au, v - v\rangle \geqq \langle f, v - u\rangle , \quad \forall v \in K , \quad u(0) = u_0 , \quad u \in K$$

où $K = \{u \in L^p(0, T, {}^\circ W_p^1(\Omega) + G), u \geqq \psi \text{ p. p. dans } Q\}$.

On peut maintenant établir le théorème suivant:

Théorème 5. *Si on fait l'hypothèse* (41) *le problème* (P) *admet une solution unique u telle que*:

$$u \in L^\infty(0, T, H_p^{1+[1/(p-1)^2]}(\Omega)) , \quad u' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) .$$

Pour démontrer le théorème ci-dessus on va employer trois lemmes.

On désigne par

$$A_\varepsilon v = Av - \frac{1}{\varepsilon}(\psi - v)^+$$

et on se pose le problème:

(I)
$$u \in W_p^1(\Omega) , \quad u|_{\partial\Omega} = g , \quad A_\varepsilon u = f .$$

On a:

Lemme 5. *Sous l'hypothèse* (41) *le problème* (I) *admet une solution unique u telle que*:

$$u \in H_p^{1+[1/(p-1)^2]}(\Omega).$$

Démonstration. Pour l'existence et l'unicité voir Lions [11], pour prouver la régularité on considère l'equation:

$$Au = f + \frac{1}{\varepsilon}(\psi - u)^+$$

où le deuxième membre est dans $L^{p'}(Q)$, d'après J. Simon [19] on achève la démonstration.

On va maintenant étudier le suivant problème:

$$(\mathrm{II})_\varepsilon \qquad u \in L^p(0, T, G + {}^\circ W_p^1(\Omega)), \quad u' + A_\varepsilon u = f, \quad u(0) = u_0$$

et établir le:

Lemme 6. *Toujours sous l'hypothèse* (41) *il existe une unique solution* u_ε *de* $(\mathrm{II})_\varepsilon$ *et de plus*:

$$(42) \qquad \|u_\varepsilon'\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leqq C$$

où C ne dépend pas de ε.

Démonstration. On commence par rémarquer que si l'on désigne par $D(A_\varepsilon) = \{u \in G + {}^\circ W_p^1(\Omega) : A_\varepsilon u \in L^2(\Omega)\}$, A_ε vérifieles hypothèses du théorème de [16] (voir Annexe 2).

Compte tenu que $u_0 \leqq \psi$ donne $A_\varepsilon u_0 = Au_0$, on a que il existe une unique solution de $(\mathrm{II})_\varepsilon$ et de plus:

$$(43) \quad \|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \leqq |t - \tau| \left(\operatorname*{var}_{(0,T)} \|f\| + \operatorname*{Max}_{[0,T]} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|Au_0\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

On déduit alors de (43) que:

$$(44) \qquad \|u_\varepsilon'\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leqq C,$$

où C ne dépend pas de ε.

Lemma 7. *Soit* u_ε *solution de* $(\mathrm{II})_\varepsilon$ *on a la majoration suivante*:

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^+\right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leqq C,$$

où C ne dépend pas de ε.

Démonstration. On commence en multipliant par $-|(\psi - u_\varepsilon)^+|^{p'-2}(\psi - u_\varepsilon)^+$ les deux membres de l'égalité suivante

$$Au_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^+ = f - u'_\varepsilon$$

et on déduit:

$$\frac{1}{\varepsilon}\|(\psi - u_\varepsilon)^+(t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} + (A\psi - Au_\varepsilon, |(\psi - u_\varepsilon)^+|^{p'-2}(\psi - u_\varepsilon)^+)(t) =$$
$$= (f - u'_\varepsilon + A\psi, |(\psi - u_\varepsilon)^+|^{p'-2}(\psi - u_\varepsilon)^+)(t)$$

et, de que

$$(A\psi - Au_\varepsilon, |(\psi - u_\varepsilon)^+|^{p'-2}(\psi - u_\varepsilon)^+) \geqq$$
$$\geqq (p' - 1)\int_{\Omega\cap\{\psi \geqq u_\varepsilon\}} |\mathrm{grad}\,(\psi - u_\varepsilon)|^p\,|(\psi - u_\varepsilon)^+|^{p'-2}\,\mathrm{d}x \geqq 0\,,$$

(voir lemme 1) on obtient, en utilisant l'inégalité de Young:

$$\frac{1}{\varepsilon}\|(\psi - u_\varepsilon)^+\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}(t) \leqq \frac{1}{p'}\mu^{-p'}\|A\psi + f - u'_\varepsilon\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}(t) +$$
$$+ \frac{1}{p}\mu^p\|(\psi - u_\varepsilon)^+\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}(t)\,,$$

avec la choix $\mu^p = 1/\varepsilon$ on achève la preuve.

On va maintenant terminer la démonstration du théorème 5.

Démonstration. On déduit du lemme 6 et 7 que la fonction u_ε est solution de l'équation:

$$Au_\varepsilon = -u'_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^+ + f \quad \text{p. p. dans } (0, T)$$

où le deuxième membre

$$F(t, x) = -u'_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^+ + f$$

est dans $L^\infty(0, T, L^{p'}(\Omega))$ et vérifie:

$$\|F\|_{L^\infty(0,T,L^{p'}(\Omega))} \leqq C\,,$$

où C ne dépend pas de ε.

D'après Simon [19] on obtient:

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{H_p^{1+[1/(p-1)^2]}(\Omega)} \leqq C\left\{\|u'_\varepsilon(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} + \left\|\frac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^+(t)\right\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|f(t)\|_{L^{p'}(\Omega)}\right\} \leqq$$
$$\leqq C\left\{\|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^{p'}(\Omega))} + \left\|\frac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^+\right\|_{L^\infty(0,T,L^{p'}(\Omega))} + \|f\|_{L^\infty(0,T,L^{p'}(\Omega))}\right\}$$

et encore

$$(45) \qquad \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,H_p^{1+[1/(p-1)^2]}(\Omega))} \leqq C\,,$$

où C ne dépend pas de ε.

Compte tenu de (44) et (45), on achève alors la démonstration comme dans [11].

Annexe 1. (cfr. Simon [19]). Soient Ω un ouvert borné de R^n dont la frontière $\partial\Omega$ est de classe C^3 et $d \in L^\infty(\Omega)$, telle que $\operatorname{infess}_{\Omega} d > 0$, on définit une bijection $\mathscr{A}_p$

$$\mathscr{A}_p : W_p^1(\Omega) \to W_{p'}^{-1}(\Omega) \times W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

par $\mathscr{A}_p u = (\operatorname{div}(d(|\operatorname{grad} u|_{R^n})^{p-2} \,.\, \operatorname{grad} u,\ u|_{\partial\Omega})$, on a alors:

Théorème. *On suppose $p \geqq 2$, $d \in W_\infty^1(\Omega)$.*
L'application $\mathscr{A}_p^{-1}$ envoie

$$L^{p'}(\Omega) \times W_p^{2-1/p}(\partial\Omega) \quad \text{dans} \quad H_p^{1+[1/(p-1)^2]}(\Omega)\,.$$

Annexe 2. Soit A un opérateur monotone dans $D(A) \subseteq H$ où H est un espace d'Hilbert reel: on suppose que:

$$(A + I)(D(A)) = H\,.$$

On suppose $u_0 \in D(A)$ et $f \in C^0(0, T, H) \cap VB(0, T, H)$ on définit solution du problème (*)

$$(*) \qquad u' + Au(t) = f(t)\,, \quad 0 \leqq t \leqq T, \quad u(0) = u_0$$

toute fonction u fortement continue de $[0, T]$ à H, faiblement derivable dans H par rapport à $t \in [0, T]$, telle que $u(t) \in D(A)$ par tout $t \in [0, T]$, $Au(t)$ est faiblement continue et qui vérifie l'équation (*) pour tout t dans $[0, T]$.

On a alors le suivant:

Théorème. *Dans les hypothèses exposées ci-dessus il existe une solution unique u du problème (*): de plus $u(t)$ est uniformement lipschitzienne est vérifié l'inégalité:*

$$\|u(t) - u(\tau)\| \leqq |t - \tau| \left(\operatorname*{var}_{[0,T]} \|f\|_H + \operatorname*{Max}_{[0,T]} \|f(t)\|_H + \|Au_0\|_H\right).$$

Bibliographie

[1] *H. Attouch, P. Benilan, A. Damlamian, C. Picard:* Equations d'évolution avec condition unilaterale. C.R.A.S. *t. 279* (série A) (1974) pp. 607—609.

[2] *M. Biroli:* Sur un'inéquation parabolique avec convexe dépendant du temps. Ricerche di Matematica, vol. *XXIII* (1974), pp. 203—222.

[3] *M. Biroli:* Solutions faibles des inéquations variationnelles d'évolution avec convexe dépendants du temps. C.R.A.S. *280*, série A (1975), pp. 1209—1212.
[4] *H. Brezis:* Problèmes unilateraux. Journ. Math. Pur. Appl. *51* (1972), pp. 1—168.
[5] *H. Brezis:* Un Problème d'évolution avec contraintes unilaterales dépendants du temps. C.R.A.S. *274*, série A (1972), pp. 310—312.
[6] *P. Charrier, G. M. Troianiello:* On strong solutions to parabolic unilateral problems with obstacle dependent on time. (A paraître sur Journ. Math. Pur. Appl.).
[7] *F. Donati, M. Matzeu:* Solutions fortes et estimations duales pour des inéquations variationnelles paraboliques non linéaires. C.R.A.S. *285*, série A (1977), pp. 347—350.
[8] *A. El Kolli:* Régularité de la solution et majoration de l'erreur d'approximation pour un problème de Dirichlet non linéaire. Journ. of Diff. Equations *22* (1976), pp. 453—466.
[9] *A. Friedman:* Stochastic games and variational inequalities. Arch. Math. Mech. Anal. *51* (1973), pp. 321—346.
[10] *M. G. Garroni, M. A. Vivaldi:* Regularité de la solution forte d'un problème non linéaire d'evolution avec contraintes dépendantes du temps. C.R.A.S. *286*, série A (1978), pp. 207—210.
[11] *J. L. Lions:* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris (1969).
[12] *J. L. Lions, E. Magenes:* Problèmes aux limites non homogènes et applications. Voll. I et II, Dunod, Paris (1968).
[13] *J. L. Lions, J. Peetre:* Sur une classe d'espaces d'interpolation. I.H.E.S. n° *19* (1964), pp. 5—68.
[14] *J. L. Lions, G. Stampacchia:* Variational inequalities. Communication on Pure and Appl. Math. *20* (1967), pp. 493—519.
[15] *F. Mignot, J. P. Puel:* Solutions maximum de certaines inéquations d'évolution paraboliques et inéquations quasi-variationnelles paraboliques. C.R.A.S. *280*, série A (1975), pp. 259—262.
[16] *J. Nečas:* Application of Rothe's method to abstract parabolic equations. Czechoslovak Mathematical Journal *24* (1974), Praha, pp. 496—500.
[17] *S. M. Nikolski:* On inbedding continuation and approximation theories for differentiable functions of several variables. Russian Math. Surveys. Vol. *16*, n° 15, (1961), pp. 55—104.
[18] *J. Simon:* Quelques propriétés de solutions d'équations et d'inéquations d'évolution paraboliques non linéaires. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Serie 4, vol. 2, pp. 585—609.
[19] *J. Simon:* Régularité des solutions des problèmes non linéaires. C.R.A.S. *282*, série A, pp. 1351—1354.

Adresse des auteurs: Instituto Matematico ,,Guido Calstenuovo", Università di Roma, Città Universitaria, 00100 Roma, Italy.