G. M. Nepomnyashchij

Об эквивалентности некоторых свойств непрерывных отображений

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 29 (1979), No. 3, 378–384

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101621

Czechoslovak Mathematical Journal, 29 (104) 1979, Praha

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Г. М. Непомнящий, Москва

(Поступило в редакцию 15/IX 1976 г.)

Целью настоящей заметки является охарактеризовать те непрерывные отображения $f : X \to Y$, которые для достаточно большого класса $\mathfrak{N}$ топологических пространств обладают одним из следующих свойств:

($*$) *каковы бы ни были пространство* $Z \in \mathfrak{N}$, *его замкнутое подмножество* Z_0, *непрерывные отображения* $\alpha : Z_0 \to X$ *и* $\beta : Z \to Y$, *где* $f \circ \alpha = \beta|_{Z_0}$, *найдется такое расширение* $\bar{\alpha} : Z \to X$ *отображения* α $(\bar{\alpha}|_{Z_0} = \alpha)$, *что* $f \circ \bar{\alpha} = \beta$.

Свойство $(*_U)$ получится из ($*$), если требовать существование продолжающего отображения лишь на некоторой окрестности U множества Z_0 в Z.*)

В дальнейшем техника, которую мы будем использовать в рассуждениях, заставит нас ограничиться случаем конечномерных метризуемых пространств. Класс таких пространств мы будем в дальнейшем обозначать $\mathfrak{M}^\wedge$.

Буквой f всюду обозначается непрерывное отображение X в Y. Под отображением всюду понимается однозначное непрерывное отображение.

Нам понадобится несколько определений, которые мы сейчас приведем.

Определение 1 (см. [1]). Семейство $\varphi = \{\Phi\}$ подмножеств пространства X называется *равностепенно локально стягиваемым* (обозначается: $\varphi \in ELC$), если для любой точки $x \in \Phi \in \varphi$ и для любой её окрестности U (в X) найдется такая окрестность V той же точки (в X), что если $\Phi' \cap V \neq \emptyset$ для некоторого $\Phi' \in \varphi$, то множество $\Phi' \cap V$ стягивается по $\Phi' \cap U$ в точку.

Заметим, что деформация для каждого множества $\Phi' \cap V$, вообще говоря, *своя*. Поэтому мы получим более сильное (см. пример 1) свойство, если потребуем существование для каждой тройки (x, U, V) (полученной как выше) *единой* гомотопии. Точнее:

*) Очевидно, постоянное отображение $X \to (\cdot)$ удовлетворяет свойству ($*$) тогда и только тогда, когда X есть абсолютный экстензор для класса $\mathcal{N}$. Для всякого X тождественое отображение id_X удовлетворяет свойству ($*$). По поводу свойств ($*$) и $(*_U)$ см. также теорему 4 в статье [6].

Определение 2. Мы скажем, что семейство $\varphi \in \{\Phi\}$ подмножеств топологического пространства X *равностепенно локально стягиваемо в целом* (обозначается $\varphi \in ELCW$), если для всякой точки $x_0 \in \Phi \in \varphi$ и любой её окрестности U (в X) найдется такая окрестность V той же точки (в X) и такая гомотопия $H = H(x_0, U) : V \times I \to U$, что каждое (непустое) множество $\Phi' \cap V$ стягивается по $U \cap \Phi'$ в точку ($\Phi' \in \varphi$).

В дальнейшем мы увидим, *что если φ есть семейство полных прообразов точек при отркытом отображении достаточно хороших пространств, то свойства $\varphi \in ELC$ и $\varphi \in ELCW$ эквивалентны* (теорема I′).

Нам понадобится еще одно

Определение 3. Пусть $f : X \to Y$ и $x_0 \in X$ — произвольная точка. Мы скажем, что X *обладает* (f, x_0) — *деформацией,* если существует такая гомотопия $H_{x_0} : X \times I \to X$; что выполнены следующие 4 условия:

(α) $f \circ H_{x_0}(x, t) = f(x)$ для любых $x \in X$, $t \in I$;

(β) $H_{x_0}(x, 0) = x$ для любой точки $x \in X$;

(γ) $H_{x_0}(f^{-1}(y), 1) = x_y$ для любой точки $y \in Y$;

(δ) $H_{x_0}(x_0, t) = x_0$ для любого $t \in I$.

Можно сказать, что H_{x_0} стягивает каждый „слой“ $f^{-1}(y)$ по себе в точку, причем x_0 есть неподвижная точка этой деформации. Ниже будет доказано (лемма 2), что *наличие (f, x_0)-деформации в каждой точке $x_0 \in X$ влечет выполнение свойства ELCW и, следовательно, ELC для семейства $\{f^{-1}(y), y \in Y\}$ полных прообразов точек.*

Сформулируем основной результат этой заметки:

Теорема 1. *Пусть $f : X \to Y$ непрерывное отображение конечномерных метризуемых пространств, X — полное пространство.*

Следующие 3 *свойства f эквивалентны*:

I. *f — открыто, семейство $\{f^{-1}(y), y \in Y\} \in ELC$, $f^{-1}(y) \in AR(\mathfrak{M})$* [2] *для каждой точки $y \in Y$;*

II. *f обладает свойством $(*)$ в классе $\mathfrak{M}^\wedge$;*

III. *f факторно и X обладает (f, x_0)-деформацией для каждой точки $x_0 \in X$.*

Теорема 1′. *Пусть f, X и Y такие же, как в теореме I. Следующие* 3 *свойства f эквивалентны*:

I′. *f — открыто, семейство $\{f^{-1}(y), y \in Y\} \in ELC$;*

II′. *f обладает свойством $(*_U)$ в классе $\mathfrak{M}^\wedge$;*

III′. *f открыто и семейство $\{f^{-1}(y), y \in Y\} \in ELCW$.*

Заметим, что из свойства I следует, что f „на“, отображения f, обладающие свойствами теоремы 1′, не обязательно „на“. *Интересно, что из наличия (f, x_0)-деформации и факторности отображения f уже следует его открытость, в то время, как более слабое условие ELCW не обеспечивает открытости* (см. пример 2).

Требование конечномерности в обеих теоремах существенно (см. пример 3). Перед доказательством теорем сформулируем и докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть $f: X \to Y$, где X и Y метризуемы,* $\dim Y < \infty$, *X — полное пространство. Если f обладает свойством II теоремы* 1, *то есть f r-отображение* [2].

Более того, для всякой точки $x_0 \in X$ найдется такое правое обратное для f отображение $g_{x_0}: Y \to X$, что $g_{x_0} \circ f(x_0) = x_0$.

Лемма 1′. *Пусть f, X и Y такие же, как в лемме I. Пусть, далее, f обладает свойством II′ теоремы I′. Тогда f обладает правым обратным в окрестности любой точки $y_0 \in f(X) \subseteq Y$. Более точно, для любой точки $y_0 \in f(X) \subseteq Y$ найдется такая окрестность $O = O(y_0)$ этой точки (в Y) и такое отображение $g = g_{y_0}: O \to X$, что $f \circ g = \mathrm{id}_O$ и, более того, можно считать, что для любой наперед заданной точки $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, $g_{y_0} \circ f(x_0) = x_0$.*

Доказателство леммы 1. Рассмотрим отображение α, сопоставляющее точке $f(x_0) \in Y$ точку $x_0 \in X$. Положим $\beta = \mathrm{id}_Y$. Равенство $f \circ \alpha = \beta|_{f(x_0)}$ очевидно. Так как $\dim Y < \infty$, а по предположению f обладает свойством $(*)$ в классе $\mathfrak{M}^\wedge$, то найдется расширение $\bar{\alpha}: Y \to X$ отображения α, удовлетворяющее равенству $f \circ \bar{\alpha} = \beta$. Ясно, что это отображение $\bar{\alpha}$ и есть искомое правое обратное отображение.

Доказательство леммы 1′ проводится теми же рассуждениями, что и доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Если X обладает (f, x_0)-деформацией для любой точки $x_0 \in X$, то семейство $\{f^{-1}(y), y \in Y\} \in ELCW$.*

Доказательство леммы 2. Пусть $x_0 \in X$ — произвольная точка, U — произвольная её окрестность в X. Рассмотрим деформацию $H_{x_0}: X \times I \to X$ (см. определение 3). Пусть $W = H_{x_0}^{-1}(U)$. Заметим, что W есть открытое в $X \times I$ множество, содержащее $(x_0) \times I$ (ведь $H_{x_0}((x_0) \times I) =^{(\delta)} x_0 \in U$). Так как I — компакт, то найдется такая окрестность V точки x_0 в X, что $V \times I \subseteq W$. Рассмотрим сужение $H_{x_0|V \times I}: V \times I \to U$, это и есть искомая деформация.

Лемма 3 (она понадобится нам в примере 3). *Пусть $f: X \to Y$ обладает свойством III′ теоремы* 1′ *(мы не накладываем требований конечномерности и полноты). Тогда для f верно заключение леммы* 1′.

Доказательство леммы 3. Пусть $y_0 \in f(X) \subseteq Y$ – произвольная точка. По предположению леммы найдется такая окрестность V произвольной точки $x_0 \in f^{-1}(y)$ и такая деформация $H : V \times I \to X$, что каждое (непустое) множество $V \cap f^{-1}(y)$ стягивается по $f^{-1}(y)$ в точку. Заметим, что $f(V)$ открыто в Y и содержит точку y_0. Зададим отображение $g : f(V) \to X$ формулой $g(y) = H(f^{-1}(y) \cap V, 1)$ для каждой точки $y \in f(V)$. Эта формула задает *однозначное* отображение в силу определения H. Непрерывность g следует из равенства: $g \circ f(x) = H(x, 1)$ (здесь существенно, что f открыто), а равенство $f \circ g(y) = y$ для любой точки $y \in f(V)$ проверяется непосредственно.

Доказательство теоремы 1. Начнем с импликации $I \Rightarrow II$. Пусть $f : X \to Y$ такое открытое отображение с гомотопически тривиальными полными прообразами точек, что семейство $\{f^{-1}(y), y \in Y\} \in ELC$. Пусть, далее, Z_0 – замкнутое подмножество конечномерного метризуемого пространства Z, а отображения $\alpha : Z_0 \to X$ и $\beta : Z \to Y$ обладают свойством $f \circ \alpha = \beta|_{Z_0}$. Рассмотрим многозначное отображение $\mathscr{F} : Z \to X$, определяемое формулой $\mathscr{F}(z) = f^{-1}(\beta(z))$. Так как f открыто, то $\mathscr{F}$ *полунепрерывно снизу* [3]. Так как $\{f^{-1}(y), y \in Y\} \in ELC$, то и $\{\mathscr{F}(z), z \in Z\} \in ELC$. Кроме этого, на замкнутом множестве Z_0 задана *непрерывная селекция* [4] $\alpha : Z_0 \to X$ отображения $\mathscr{F}|_{Z_0}$. Мы видим, что выполнены все условия теоремы 1.2 Майкла [4], достаточные для того, чтобы селекцию α можно было продолжить в селекцию $\bar{\alpha} : Z \to X$ для многозначного отображению $\mathscr{F}$. Так как $\bar{\alpha}(z) \in f^{-1}(\beta(z))$, то $f \circ \bar{\alpha} = \beta$. Очевидно, что $\bar{\alpha}$ есть искомое расширение. Заметим, что конечномерность X и Y в этих рассуждениях не использовалась.

Доказательство импликации $II \Rightarrow III$. Пусть $f : X \to Y$ обладает свойством $(*)$ в классе конечномерных метризуемых пространств, X и Y – конечномерные метризуемые пространства, X – полное пространство.

Мы докажем открытость этого отображения, чем факторность его будет подавно установлена. Пусть $Z = X \times Y$, $Z_0 = \{(x, y) \in X \times Y = Z \mid y = f(x), x \in X\}$. Определим отображения $\alpha : Z_0 \to X$ и $\beta : Z \to Y$ формулами: $\alpha(x, f(x)) = x$, $\beta(x, y) = y$ для всяких $x \in X$ и $y \in Y$. Заметим, что мы получили конечномерное метризуемое пространство Z, его замкнутое подмножество Z_0, а отображения α и β подчинены равенству $f \circ \alpha = \beta|_{Z_0}$. Так как свойство $(*)$ в классе $\mathfrak{M}^\wedge$ предполагается для f выполненым, то найдется такое расширение $\bar{\alpha} : Z \to X$ отображения α, что $f \circ \bar{\alpha} = \beta$. Так как β открыто, а $\bar{\alpha}$ – „на", то и f открыто.

Пусть теперь $x_0 \in X$ – произвольная точка, будем строить (f, x_0)-деформацию. По лемме 1 найдется такое правое обратное для f отображение $g_{x_0} : Y \to X$, что $g_{x_0} \circ f(x_0) = x_0$.

Рассмотрим $Z \in \mathfrak{M}^\wedge$, определенное формулой $Z = X \times I$, где I, как всегда, замкнутый интервал $[0, 1]$, и замкнутое подмножество $Z_0 = (X \times (0)) \cup ((x_0) \times I) \cup (X \times (1))$ пространства Z. Зададим отображения $\alpha : Z_0 \to X$ и $\beta : Z \to Y$

формулами:
$$\alpha(z) = \begin{cases} x\,, & \text{если} \quad z = (x, 0)\,, \quad x \in X\,; \\ x_0\,, & \text{если} \quad z = (x_0, t)\,, \quad t \in I\,; \\ g_{x_0} \circ f(x)\,, & \text{если} \quad z = (x, 1)\,, \quad x \in X \end{cases}$$

и $\beta(z) = \beta(x, y) = f(x)$, для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Непрерывность α и выполнение равенства $f \circ \alpha = \beta|_{Z_0}$ проверяется непосредственно. Пусть $\bar{\alpha} = H_{x_0} : Z \to X$ такое расширение α, что $f \circ \bar{\alpha} = \beta$. Легко видеть, что это и есть искомая деформация. В частности, свойство (γ) в определении 3 следует из того, что $H_{x_0}(x', 1) = g_{x_0} \circ f(x') = g_{x_0}(y)$ для всякого $x' \in f^{-1}(y)$.

Доказательство импликации $III \Rightarrow I$. Покажем, что f открыто. Пусть $O \subseteq X$ – произвольное открытое множество. Для доказательства открытости образа $f(O)$, в виду факторности f, достаточно показать открытость множества $f^{-1}(f(O))$. Пусть $x_0 \in f^{-1}(f(O)$ – произвольная точка, докажем, что она – внутренняя. Действительно, найдется такая точка $x_1 \in O$, что $f(x_1) = f(x_0)$. Пусть $H_{x_1} : X \times I \to X$ – соответствующая (f, x_1)-деформация. Положим $h_1(x) = H_{x_1}(x, 1)$ для всех $x \in X$ и рассмотрим множество $V = h_1^{-1}(O)$.

Покажем, что $x_0 \in V \subseteq f^{-1}(f(O))$, чем, в виду произвольности точки $x_0 \in f^{-1}(f(O))$ открытость множества $f^{-1}(f(O))$ будет доказана. Включение $x_0 \in V$ следует из того, что $h_1(x_0) =^{(\gamma)} h_1(x_1) =^{(\delta)} x_1 \in O$. Проверим включение $V \subseteq f^{-1}(f(O))$. Пусть $v \in V$ – произвольная точка, тогда $h_1(v) \in O$, но $f(v) =^{(\alpha)} =^{(\alpha)} f \circ h_1(v) \in f(O)$, что и требовалось доказать.

Далее, по лемме 2, семейство $\{f^{-1}(y),\ y \in Y\} \in ELC$ (даже $ELCW$). К тому же из наличия (f, x_0)-деформации хотя бы для одной точки $x_0 \in X$ уже следует стягиваемость каждого „слоя“ $f^{-1}(y)$. В виду конечномерности $f^{-1}(y)$ для всех $y \in Y$, свойства ELC для семейства $\{f^{-1}(y),\ y \in Y\}$, влекущего включение $f^{-1}(y) \in LC$ для всех $y \in Y$, мы заключаем [2], что $f^{-1}(y) \in AR(\mathfrak{M})$ для всех $y \in Y$. Теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что из свойств *I*, *II* и *III* теоремы 1, эквивалентность которых для полных конечномерных пространств мы доказали, следует, что f есть *гомотопическая эквивалентность*. Действительно. Пусть $g_{x_0} : Y \to X$ – правое обратное, существование которого утверждается в лемме 1. Тогда композиция $f \circ g_{x_0} = \mathrm{id}_Y$, а композиция в обратном порядке: $g_{x_0} \circ f = H_{x_0}(x, 1)$, откуда видно, что $g_{x_0} \circ f \approx \mathrm{id}_X$. Заметим, далее, что при доказательстве импликаций $III \Rightarrow I$ и $I \Rightarrow II$ конечномерность исходных пространств не использовалась. Зато при доказательстве импликации $II \Rightarrow III$ она существенна (см. пример 3).

Доказательство теоремы 1′. Импликация $I' \Rightarrow II'$ устанавливается аналогично соответствующей импликации теоремы 1 и проводится также, опираясь на теорему 1.2 Майкла [4].

Доказательство импликации $II' \Rightarrow III'$. Пусть $f : X \to Y$ обладает свойством $(*_U)$ в классе $\mathfrak{M}^\wedge$. Пусть, далее, $x_0 \in X$ – произвольная точка и $U \subseteq X$ – некоторая её (открытая) окрестность. Нам надо найти такую окрестность V той же точки в X и такую деформацию $H = H(x_0, U) : V \times I \to U$, что каждое непустое множество $V \cap f^{-1}(y)$, $y \in Y$ стягивается по $U \cap f^{-1}(y)$ в точку. Мы покажем большее, а именно, что найдется такая окрестность V и такая гомотопия H, что x_0 — *неподвижная* точка этой гомотопии. По лемме 1′ найдется такая окрестность O точки $y_0 = f(x_0)$ и такое отображение $g : O \to X$, что $f \circ g = \mathrm{id}_O$ и $g \circ f(x_0) = x_0$. Положим $\tilde{U} = U \cap f^{-1}(O)$. (Эта окрестность точки x_0 нам понадобится для того, чтобы на ней можно было рассматривать композицию $g \circ f$).

Далее, повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1, рассмотрим (конечномерное, метризуемое) пространство $Z = \tilde{U} \times I$, а в нем замкнутое подмножество $Z_0 = (\tilde{U} \times (0)) \cup ((x_0) \times I) \cup (\tilde{U} \times (1))$. Определим два непрерывных отображения $\alpha : Z_0 \to X$ и $\beta : Z \to Y$ формулами:

$$\alpha(z) = \begin{cases} x\,, & \text{если} \quad z = (x, 0)\,, \quad x \in \tilde{U}\,; \\ x_0\,, & \text{если} \quad z = (x_0, t)\,, \quad t \in I\,; \\ g \circ f(x)\,, & \text{если} \quad z = (x, 1)\,, \quad x \in \tilde{U} \end{cases}$$

и $\beta(z) = \beta(x, t) = f(x)$, для всех $x \in \tilde{U}$, $t \in I$. Непрерывность α и равенство $f \circ \alpha = \beta|_{Z_0}$ проверяются непосредственно.

Так как свойство $(*_U)$ для f предполагается выполненым в классе $\mathfrak{M}^\wedge$, то найдется такая окрестность W множества Z_0 в Z и такое расширение $\bar{\alpha} : W \to X$ отображения α, что $f \circ \bar{\alpha} = \beta$. Возьмем прообраз $\bar{\alpha}^{-1}(\tilde{U})$, он содержит множество $(x_0) \times I$ и открыт в $Z = \tilde{U} \times I$. Поэтому найдется такая окрестность V точки x_0 в $\tilde{U}$ и, следовательно, в X, что $V \times I \subseteq W$. Легко проверяется, что V есть искомая окрестность, а нужная нам деформация $H = H(x_0, \tilde{U}) : V \times I \to \tilde{U}$ есть сужение $\bar{\alpha}$ на $V \times I$.

Импликация $III' \Rightarrow I'$ очевидна. Теорема 1′ полностью доказана. Заметим, что, как и в доказательстве теоремы 1, конечномерность и полнота использовались только при доказательстве импликации $II' \Rightarrow III'$, и, по крайней мере, конечномерность здесь существенна (пример 3).

Пример 1. Пусть $A = \{\alpha_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\alpha_\infty\}$ — последовательность с предельной точкой. В пространстве $X = A \times I \subseteq R^2$ зададим (*не полунепрерывное снизу*) разбиение, единственным неодноточечным элементом которого будет множество $(\alpha_\infty) \times I$. Очевидно, что семейство элементов этого (полунепрерывного сверху) разбиения компакта X обладает свойством ELC. *Покажем, что не выполнено свойство ELCW в любой точке* $x_0 \in (\alpha_\infty) \times I$.

Действительно, пусть $x_0 \in (\alpha_\infty) \times I$, U-окрестность точки x_0 в X. Пусть, далее, V-произвольная окрестность x_0. Возьмем произвольную точку $x_1 \in V \cap ((\alpha_\infty) \times I$. Найдется такая последовательность $\{x^k\} \to x_1$, что $x^k \in V$ и $x^k \notin (\alpha_\infty) \times I$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Предположим, что найдется такая деформация $H : V \times I \to U$, как в определении $ELCW$ — семейства. Но тогда $H(x_1, 1) = \lim\limits_{k \to \infty} H(x^k, 1) =^{(\alpha)} \lim\limits_{k \to \infty} x^k = x_1$, что противоречит стягиванию неодноточечного множества $V \cap ((\alpha_\infty) \times I)$ в точку.

Пример 2. Проекция $\omega : I \cup I' \to I$ объединения двух прилегающих сторон квадрата на одну из них, очевидно, *не открыта*, но семейство прообразов $\{\omega^{-1}(x), x \in I\} \in ELCW$. Заметим, что ω — замкнутое и, следовательно, факторное отображение.

Пример 3. Пусть $\mathscr{F} : Q_1 \to Q_2$ — многозначное отображение гильбертовых кубов, построенное в работе [5].

Известны следующие свойства этого отображения:

1. $\mathscr{F}$ — полунепрерывно снизу;
2. $\{\mathscr{F}(x), x \in Q_1\} \in ELC$;
3. $\mathscr{F}(x) \in AR$ для всех $x \in X$;
4. Существует такая точка $y_0 \in Q_1$, что ни для какой её окрестности U в Q_1 не существует непрерывной селекции для $\mathscr{F}|_U$.

Пусть $X = \{(x, y) \in Q_1 \times Q_2 \mid y \in \mathscr{F}(x), x \in Q_1\}$ есть график этого отображения. Рассмотрим проектирование $\pi : Q_1 \times Q_2 \to Q_1$, и пусть $f : X \to Q_1$ есть сужение на X этого проектирования. Легко проверяется, что:

1'. f — открыто;

2'. $\{f^{-1}(y), y \in Q_1\} \in ELC$;

3'. $f^{-1}(y) \in AR$ для всех $y \in Q_1$;

4'. *Не существует никакой окрестности U точки $y_0 \in Q_1$, на которой можно было бы задать непрерывное отображение $g : U \to X$ удовлетворяющее равенству* $f \circ g = \mathrm{id}_U$. Мы видим, что f обладает свойством I (и, следовательно II) теоремы 1, но, согласно лемме 3, не обладает даже свойством III' теоремы 1' (можно доказать, что X — полное пространство).

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю профессору Ю. М. Смирнову за помощь в написании этой работы.

Литература

[1] *K. Borsuk:* On some metrizations of hyperspace of compact, sets Fund. Math., *41* (1954), p. p. 168—202.

[2] *К. Ворсук:* Теория ретрактов, М., „Мир“, 1971.

[3] *К. Куратовский:* Топология, т. 2, М., „Мир“, 1969.

[4] *E. Michael:* Continuous selections II, Ann. Math. Sev. 2, *64*, No 3 (1956), p. p. 562—580.

[5] *C. P. Pixley:* An example concerning continuous selections on infinite-dimensional spaces, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. *43*, No 1, 1974, p. p. 237—244.

[6] *Г. М. Непомнящий, Ю. М. Смирнов:* О ретракции отображений, Czech. Math. J. *29* (*104*), (1979), 366—377.

Адресс автора: МГУ, механико-математический факультет, кафедра топологии, Москва, СССР.