Czechoslovak Mathematical Journal

Gerhard Rosenberger; Franz Tessun

Über vollständige Automorphismengruppen und Gleichungen in der Modulgruppe

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 29 (1979), No. 2, 192–201

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101597

Czechoslovak Mathematical Journal, 29 (104) 1979, Praha

# ÜBER VOLLSTÄNDIGE AUTOMORPHISMENGRUPPEN UND GLEICHUNGEN IN DER MODULGRUPPE

GERHARD ROSENBERGER, Dortmund und FRANZ TESSUN, Hamburg

(Eingegangen im Dezember 27, 1975)

## EINLEITUNG

**A.** Sei $K$ eine Gruppe von endlichem Rang $q$, d. h. $K$ wird von $q$ aber nicht von $q - 1$ Elementen erzeugt.

$K$ heißt *quasifrei vom Rang* $q$; wenn gilt:

i) Jeder Automorphismus der freien Gruppe vom Rang $q$ induziert einen Automorphismus von $K$.

ii) Jeder Automorphismus von $K$ wird von einem Automorphismus der freien Gruppe vom Rang $q$ induziert.

$K$ heißt *vollständig*, wenn das Zentrum $Z(K)$ von $K$ trivial ist und jeder Automorphismus von $K$ ein innerer ist.

J. L. DYER und E. FORMANEK zeigten in [3] (vgl. auch [2]), daß die Automorphismengruppe $A(F_q)$ der freien Gruppe $F_q$ vom Rang $q$ für $q \geqq 2$ vollständig ist.

Hier zeigen wir, daß die Automorphismengruppe einer quasifreien Gruppe $K$ von endlichem Rand $q \geqq 2$ vollständig ist, wenn $K$ eine Gruppe mit einer definierenden Relation und Torsion ist.

Damit sind zugleich Beispiele für unendliche Gruppen mit Torsion gegeben, deren Automorphismengruppe vollständig ist.

Weiter werden in dieser Note alle quasifreien Fuchsschen Gruppen vom Rang $q \geqq 2$ bestimmt, deren Automorphismengruppe vollständig ist. Als interessantes Nebenergebnis erhalten wir die Lösungen gewisser Gleichungen in der Modulgruppe.

**B.** Sei $K$ eine Gruppe, dann bedeute:

| | |
|---|---|
| $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ | den Kommutator von $x, y \in K$. |
| $K' := [K, K]$ | die Kommutatorgruppe von K. |
| $A(K)$ | die Gruppe aller Automorphismen von $K$. |
| $I(K)$ | die Gruppe der inneren Automorphismen von $K$. |
| $i_g$ | der von $g \in K$ definierte innere Automorphismus von $K$. |

| | |
|---|---|
| $Z(K)$ | das Zentrum von $K$. |
| $F_q$ | die freie Gruppe von endlichem Rang $q$. |
| $\langle \ldots \mid \ldots \rangle$ | die Gruppenbeschreibung durch Erzeugende und Relationen. Sei $K$ die von $x$ und $y$ erzeugte Gruppe, dann bedeute $W(x, y)$ ein Wort in $x$ und $y$. |

## 1. VORBEMERKUNGEN

Wir untersuchen im folgenden die Automorphismengruppen der Gruppen

$$G = \langle a, b \mid [a, b]^n = 1 \rangle, \quad n \geqq 2,$$

und

$$H = \langle a, b \mid [a, b]^{2k+1} = (a[a, b]^k)^2 = (ab[a, b]^k)^2 = = (aba[a, b]^k)^2 = 1 \rangle, \quad k \geqq 1,$$

auf Vollständigkeit.

In [11, Satz 3], (vgl. auch [10]), bzw. in [12] (Korollar zu Theorem 4) wird gezeigt, daß $G$ bzw. $H$ quasifreie Gruppe vom Rang 2 ist. Es sei noch bemerkt, daß $G$ und $H$ Fuchssche Gruppen sind, und es läßt sich leicht zeigen, daß dies die einzigen quasifreien Fuchsschen Gruppen vom Rang $q \geqq 2$ sind.

Die folgenden beiden Sätze sind im weiteren sehr nützlich.

**Satz 1.1.** ([4, Theorem 1], vgl. auch [6]). *Sei $K$ eine nicht zyklische Fuchssche Gruppe, dann ist das Zentrum von $K$ trivial.*

**Satz 1.2.** ([1], Seite 95). *Sei $K$ eine Gruppe mit trivialem Zentrum. Ist $I(K)$ eine charakteristische Untergruppe von $A(K)$, dann ist $A(K)$ vollständig.*

## 2. EINIGE GLEICHUNGEN IN DER MODULGRUPPE

**Satz 1.** *Sei $K = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1 \rangle \cong PSL(2, \mathbb{Z})$ die Modulgruppe. Sei $U(x, y) = xy^{\varepsilon_1} \ldots xy^{\varepsilon_n}$, $n \geqq 1$, $1 \leqq \varepsilon_i \leqq 2$ für $i = 1, \ldots, n$. Gibt es ein Element $V(x, y) \in K$ mit*

$$V(x, y)\, U(x, y) = U(x, y^{-1})\, V(x, y), \tag{2.1}$$

*so ist $n$ gerade und $U(x, y)$ von der Form $U(x, y) = (S(x, y)\, S(x, y^{-1}))^\gamma$, $\gamma \geqq 1$.*

Beweis. Setze $V(x, y) = x^\alpha y^{\beta_1} x y^{\beta_2} \ldots x y^{\beta_m}$, mit $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $0 \leqq \beta_m \leqq 2$, und $1 \leqq \beta_i \leqq 2$ für $i = 1, \ldots, m-1$.

Ist $\beta_m = 0$, so ist natürlich auch $\alpha = 0$, und wir erhalten wegen (2.1) $xy^{\varepsilon_1} \ldots xy^{\varepsilon_n} xy^{-\beta_{m-1}} \ldots xy^{-\beta_1} = xy^{-\beta_{m-1}} \ldots xy^{-\beta_1} xy^{-\varepsilon_1} \ldots xy^{-\varepsilon_n}$, d. h. wir können $\alpha = 1$ und $1 \leqq \beta_m \leqq 2$ annehmen.

Sei nun also $\alpha = 1$ und $1 \leqq \beta_m \leqq 2$.

Ist $m > n$, so ist notwendig $V(x, y) = xy^{\beta_1} \dots xy^{\beta_q}(U(x, y))^\beta$ für $\beta > 0$ und $q < m$. Ist $U(x, y)$ von der Form $U(x, y) = (S(x, y)\, S(x, y^{-1}))^\gamma$, $\gamma \geqq 1$, so auch $(S(x, y)\,(S(x, y)\, S(x, y^{-1})^\beta\, S(x, y^{-1})\,(S(x, y^{-1})\, S(x, y))^\beta)^\delta$, $\delta \geqq 1$.

Wir können also $n \geqq m$ annehmen (vgl. auch den weiteren Beweisgang).

Sei also nun $n \geqq m$. Es ist sogar $n > m$, denn sonst wäre $\varepsilon_n \equiv -\varepsilon_n(3)$. Setze $n = m + k$. Aus $xy^{\beta_1} \dots xy^{\beta_m} xy^{\varepsilon_1} \dots xy^{\varepsilon_n} = xy^{-\varepsilon_1} \dots xy^{-\varepsilon_n} xy^{\beta_1} \dots xy^{\beta_m}$ erhalten wir durch Exponentenvergleich:

$$\beta_i \equiv -\varepsilon_i(3) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m\,;$$

$$\varepsilon_{m+i} \equiv -\varepsilon_i(3) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, k$$

und

$$\varepsilon_{k+i} \equiv \beta_i(3) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m\,.$$

a) Sei $m < k$. Dann gilt:

$$U(x, y) = V(x, y^{-1})\, R(x, y)\, V(x, y) \quad \text{mit} \quad R(x, y) = xy^{\varepsilon_{m+1}} \dots xy^{\varepsilon_k}\,.$$

Wegen $m < k$ ist $R(x, y) \neq 1$.

Aus (2.1) folgt $V(x, y^{-1})\, R(x, y) = R(x, y^{-1})\, V(x, y^{-1})$.

Wenn $n - 2m$ gerade ist, so auch $n$. Ist $R(x, y)$ von der Form $R(x, y) = (S(x, y)\, S(x, y^{-1}))^\gamma$, $\gamma \geqq 1$, und $V(x, y)$ von der Form $V(x, y) = S(x, y)\,(S(x, y^{-1})\,.\,S(x, y))^\beta$, so ist $U(x, y)$ von der Form $U(x, y) = (S(x, y^{-1})\, S(x, y))^{\gamma+2\beta+1}$.

Wir können also $m \geqq k$ annehmen (vgl. auch den weiteren Beweisgang).

b) Sei $m > k$. Dann gilt:

$$V(x, y) = W(x, y)\, T(x, y) \quad \text{mit} \quad W(x, y) = xy^{\beta_1} \dots xy^{\beta_k}$$

und

$$T(x, y) = xy^{-\varepsilon_{k+1}} \dots xy^{-\varepsilon_m}\,.$$

Wegen $m > k$ ist $W(x, y) \neq 1$ und $T(x, y) \neq 1$. Weiter ist mit (2.1)

$$U(x, y) = W(x, y^{-1})\, T(x, y^{-1})\, W(x, y) = V(x, y^{-1})\,(T(x, y^{-1}))^{-1}\, V(x, y)$$

und

$$T(x, y^{-1})\, W(x, y) = W(x, y)\, T(x, y)\,.$$

Damit ist auch $U(x, y) = W(x, y^{-1})\, W(x, y)\, T(x, y)$.

Wenn $n - 2k$ gerade ist, so auch $n$. Ist $T(x, y)$ von der Form $T(x, y) = (S(x, y)\, S(x, y^{-1}))^\gamma$, $\gamma \geqq 1$, und $W(x, y)$ von der Form $W(x, y) = S(x, y^{-1})\,.\,(S(x, y)\, S(x, y^{-1}))^\beta$, so ist $U(x, y)$ von der Form $U(x, y) = (S(x, y)\, S(x, y^{-1}))^{\gamma+2\beta+1}$. Wir können also $m \leqq k$ annehmen (vgl. auch den weiteren Beweisgang). Insgesamt können wir daher $m = k$ annehmen.

c) Sei nun $m = k$. Aus $n = m + k = 2m$ folgt, daß $n$ gerade ist. Weiter ist $U(x, y) = V(x, y^{-1})\, V(x, y)$. q. e. d.

**Lemma 1.** *Sei* $K = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1\rangle$. *Sei* $U(x, y) = y^{\varepsilon_1}xy^{\varepsilon_2} \dots xy^{\varepsilon_{n+1}}$, $n \geqq 1$, $1 \leqq \varepsilon_i \leqq 2$ *für* $i = 1, \dots, n + 1$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_{n+1}$. *Gibt es ein Element* $V(x, y) \in K$, *das* (2.1) *erfüllt, so ist* $n$ *ungerade und* $U(x, y)$ *von der Form* $U(x, y) = (S(x, y) \,.\, S(x, y^{-1}))^\gamma$, $\gamma \geqq 1$.

Beweis. Setze $W(x, y) = xy^{\varepsilon_2}x \dots xy^{\varepsilon_n}xy^{-\varepsilon_{n+1}}$. Dann ist $U(x, y) = y^{\varepsilon_1} W(x, y)\, y^{-\varepsilon_1}$ und $V(x, y)\, y^{\varepsilon_1} W(x, y)\, y^{-\varepsilon_1} = y^{-\varepsilon_1} W(x, y^{-1})\, y^{\varepsilon_1} V(x, y)$. Mit $R(x, y) = y^{\varepsilon_1} V(x, y)\, y^{\varepsilon_1}$ gilt: $R(x, y)\, W(x, y) = W(x, y^{-1})\, R(x, y)$. Nach Satz 1 ist $n$ ungerade und $W(x, y)$ von der Form $W(x, y) = (S(x, y)\, S(x, y^{-1}))^\gamma$, $\gamma \geqq 1$.
Mit $Q(x, y) = y^{\varepsilon_1} S(x, y)\, y^{\varepsilon_1}$ ist

$$y^{\varepsilon_1} W(x, y)\, y^{-\varepsilon_1} = (y^{\varepsilon_1} S(x, y)\, y^{\varepsilon_1} y^{-\varepsilon_1} S(x, y^{-1})\, y^{-\varepsilon_1})^\gamma =$$
$$= (Q(x, y)\, Q(x, y^{-1}))^\gamma, \quad \gamma \geqq 1 .$$

q. e. d.

**Lemma 2.** *Sei* $K = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1\rangle$. *Sei* $U(x, y) = xy^{\varepsilon_1} \dots xy^{\varepsilon_n}x$, $n \geqq 1$, $1 \leqq \varepsilon_i \leqq 2$ *für* $i = 1, \dots, n$. *Dann gibt es kein Element* $V(x, y) \in K$ *mit*

$$V(x, y)\, U(x, y) = y^\varepsilon\, U(x, y^{-1})\, V(x, y), \quad 1 \leqq \varepsilon \leqq 2 . \tag{2.2}$$

Beweis. Angenommen, es gibt ein Element $V(x, y) \in K$, das (2.2) erfüllt. Setze $V(x, y) = x^\alpha y^{\beta_1}xy^{\beta_2} \dots xy^{\beta_m}$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $0 \leqq \beta_m \leqq 2$ und $1 \leqq \beta_i \leqq 2$ für $i = 1, \dots, m - 1$. Ein Exponentenvergleich führt dann in jedem Fall zu einem Widerspruch.

q. e. d.

**Korollar.** *Sei* $K = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1\rangle$. *Sei* $U(x, y) = y^\gamma xy^{\varepsilon_1} \dots xy^{\varepsilon_n}xy^{-\gamma}$, $n \geqq 1$, $1 \leqq \gamma \leqq 2$, $1 \leqq \varepsilon_i \leqq 2$ *für* $i = 1, \dots, n$. *Dann gibt es kein Element* $V(x, y) \in K$, *das* (2.2) *erfüllt.*

Beweis. Angenommen, es gibt ein Element $V(x, y) \in K$, das (2.2) erfüllt. Setze $U(x, y) = y^\gamma W(x, y)\, y^{-\gamma}$, dann ist

$$V(x, y)\, y^\gamma W(x, y)\, y^{-\gamma} = y^\varepsilon y^{-\gamma} W(x, y^{-1})\, y^\gamma V(x, y) .$$

Mit $R(x, y) = y^\gamma V(x, y)\, y^\gamma$ gilt: $R(x, y)\, W(x, y) = y^\varepsilon W(x, y^{-1})\, R(x, y)$. Nach Lemma 2 ist $W(x, y) = 1$, damit ist auch $U(x, y) = 1$. Das ist aber ein Widerspruch.

q. e. d.

**Satz 2.** *Sei* $K = \langle p, x, y \mid p^2 = x^4 = (px)^2 = (py)^2 = 1,\ x^2 = y^3\rangle \cong GL(2, \mathbb{Z})$. *Seien* $a, b \in K$, *mit* $[a, b] = y^\varepsilon$, $\varepsilon \not\equiv 0(3)$.

*Dann gibt es einen freien Übergang (Nielsen Transformation) von* $\{a, b\}$ *zu einem System, in dem ein Element die Ordnung zwei hat.*

Beweis. Wir rechnen im folgenden o. E. modulo Zentrum von K, d. h. in der Gruppe

$$K = \langle p, x, y \mid p^2 = x^2 = y^3 = (px)^2 = (py)^2 = 1\rangle .$$

Es ist $a = p^r U(x, y)$, $b = p^s V(x, y)$ mit $r, s \in \{0, 1\}$.

Angenommen $r = s = 0$. Dann ist $a, b \in \langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1\rangle \cong PSL(2, \mathbb{Z})$. Fügt man in $PSL(2, \mathbb{Z})$ die Relation $[x, y] = 1$ hinzu, so erhält man die Gruppe $\langle x, y \mid x^2 = y^3 = [x, y] = 1\rangle \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Aus $[a, b] = y^\varepsilon$ folgt aber, daß $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ keine Elemente der Ordnung 3 enthält, und das ist ein Widerspruch.

Also ist $r + s \geqq 1$.

Es genügt den Fall $r = 1$, $s = 0$ zu behandeln, denn der Fall $r = s = 1$, bzw. $r = 0$, $s = 1$ folgt aus dem Fall $r = 1$, $s = 0$ wegen

$$[a, b] = [ab, b] = y^\varepsilon \quad \text{bzw.} \quad [a, b]^{-1} = [b, a] = y^{-\varepsilon}.$$

Sei also nun $r = 1$, $s = 0$. Dann ist

$$[a, b] = U(x, y^{-1})\, V(x, y^{-1})\, (U(x, y^{-1}))^{-1}\, (V(x, y))^{-1}.$$

Zu untersuchen ist also in $\langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1\rangle$ o. E. – eventuell nach Umbezeichnung – eine Gleichung

$$V(x, y)\, U(x, y) = y^\varepsilon\, U(x, y^{-1})\, V(x, y). \tag{2.2}$$

Nach Lemma 2 können wir o. E. – eventuell nach einer geeigneten Konjugation – $U(x, y) = y^{\varepsilon_1} x y^{\varepsilon_2} \dots x y^{\varepsilon_{n+1}}$, $n \geqq 0$, $1 \leqq \varepsilon_i \leqq 2$ für $i = 1, \dots, n + 1$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_{n+1}$, annehmen.

Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen.

Sei nun $n \geqq 1$. Setze $V(x, y) = x^\alpha y^{\beta_1} x y^{\beta_2} \dots x y^{\beta_m}$, mit $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $0 \leqq \beta_m \leqq 2$, $1 \leqq \beta_i \leqq 2$ für $i = 1, \dots, m - 1$. Ist $\alpha = 0$ und $m = 1$, so ist nichts zu zeigen.

Sei nun $m \geqq 2$, falls $\alpha = 0$.

Ist $\alpha = 0$, so ist notwendig $\beta_1 + \beta_m \equiv 0(3)$, da sonst ein Exponentenvergleich $\varepsilon_1 \equiv -\varepsilon_1(3)$ ergebe.

Ist $\alpha = 1$, so ist notwendig $\beta_m \not\equiv 0(3)$.

Es sind also die folgenden beiden Fälle zu untersuchen:

i) $\alpha = 1$, $\beta_m \not\equiv 0(3)$, $m \geqq 1$.

ii) $\alpha = 0$, $\beta_m \equiv -\beta_1(3)$, $m \geqq 2$.

Es trete nun der Fall i) ein. Dann ist folgende Gleichung zu betrachten:

$$x y^{\beta_1} \dots x y^{\beta_m} y^{\varepsilon_1} x \dots x y^{\varepsilon_{n+1}} = y^\varepsilon y^{-\varepsilon_1} x \dots x y^{-\varepsilon_{n+1}} x y^{\beta_1} \dots x y^{\beta_m}.$$

Ein Exponentenvergleich ergibt $\varepsilon \equiv \varepsilon_1(3)$.

Ist $m \geqq n + 1$, so ist mit Lemma 2 notwendig $V(x, y) = x y^{\beta_1} \dots x y^{\beta_{q-1}} x y^{\beta'_q} \cdot U(x, y)$, $q \geqq 1$ und $\beta'_q \not\equiv 0(3)$, d. h. wir können $m \leqq n$ annehmen.

Ist $m < n$, so ist notwendig $U(x, y) = y^{\varepsilon_1} x \dots x y^{\varepsilon_p}\, V(x, y)$, $p \geqq 1$, d. h. wir können $m \geqq n$ annehmen.

Insgesamt können wir also $m = n$ annehmen.

Sei nun $m = n$. Dann ist aber $U(x, y) = y^{\varepsilon_1}\, V(x, y)$ und es ist alles gezeigt. Es trete nun der Fall ii) ein. Dann ist folgende Gleichung zu betrachten

$$y^{\beta_1} x \dots x y^{\beta_m} y^{\varepsilon_1} x \dots x y^{\varepsilon_{n+1}} = y^\varepsilon y^{-\varepsilon_1} x \dots x y^{-\varepsilon_{n+1}} y^{\beta_1} x \dots x y^{\beta_m}.$$

Angenommen, es ist $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon - \beta_1(3)$. Dann ergibt ein Exponentenvergleich notwendig $\varepsilon_{n+1} \equiv \varepsilon_1 \equiv -\beta_1(3)$, d. h. $\varepsilon \equiv 0(3)$, daß ist aber ein Widerspruch. Also ist $\varepsilon_1 \not\equiv \varepsilon - \beta_1(3)$, d. h. aber $\varepsilon \equiv \varepsilon_1(3)$ und weiter $\varepsilon_1 \equiv \beta_1(3)$.

Damit erhalten wir die Gleichung

$$y^{\beta_1}x \dots xy^{\beta_m}y^{\varepsilon_1}x \dots xy^{\varepsilon_{n+1}} = xy^{-\varepsilon_2} \dots xy^{-\varepsilon_{n+1}}y^{\beta_1}x \dots xy^{\beta_m}.$$

Eine Umformung ergibt dann die Gleichung

$$y^{\beta_1}x \dots xy^{\beta_m}y^{-\varepsilon_{n+1}}x \dots xy^{-\varepsilon_1} = y^{\varepsilon_{n+1}}x \dots xy^{\varepsilon_2}xy^{\beta_1}x \dots xy^{\beta_m}.$$

Ist $m > n + 1$, so ist notwendig $V(x, y) = y^{\beta_1}x \dots xy^{\beta'_q}(U(x, y))^{-1}$, $q \geqq 1$, $\beta'_q \equiv -\beta_1(3)$, d. h. wir können $m \leqq n + 1$ annehmen.

Ist $m < n + 1$, so ist notwendig $(U(x, y))^{-1} = y^{-\varepsilon_{n+1}}x \dots xy^{-\varepsilon_{m+1}}x\, V(x, y)$, d. h. wir können $m \geqq n + 1$ annehmen.

Insgesamt können wir also $m = n + 1$ annehmen.

Sei nun $m = n + 1$. Dann ist aber $(U(x, y))^{-1} = y^{-\beta_m}\, V(x, y)$, und es ist alles gezeigt. q. e. d.

**Bemerkung.** In [7] sind alle Elemente von $GL(2, \mathbb{Z})$ mit endlicher Ordnung angegeben. Mit Satz 2 erhalten wir damit einen Algorithmus, der in der Modulgruppe $\langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1\rangle \cong PSL(2, \mathbb{Z})$ alle Lösungen der Gleichung $V(x, y)\, U(x, y) = y^{\varepsilon}\, U(x, y^{\gamma})\, V(x, y^{\beta})$, $\varepsilon \not\equiv 0(3)$ und $\gamma = -1$, $\beta = 1$ oder $\gamma = -1$, $\beta = -1$ oder $\gamma = 1$, $\beta = -1$ liefert.

## 3. VOLLSTÄNDIGKEIT VON $A(G)$ UND $A(H)$

**Satz 3.** *Sei $G = \langle a, b \mid [a, b]^n = 1\rangle$, $n \geqq 2$. Dann ist $A(G)$ vollständig.*

Beweis. Da $G$ Fuchssche Gruppe ist, ist nach Satz 1.1 das Zentrum von $G$ trivial. Sei $F_2$ die von $a$ und $b$ erzeugte freie Gruppe und $\pi : F_2 \to G$ der durch $a \mapsto a$; $b \mapsto b$ definierte kanonische Epimorphismus. Nach [9] hat $A(F_2)$ die Präsentierung $A(F_2) = \langle P, S, U \mid P^2 = S^2 = (SP)^4 = (PSPU)^2 = (UPS)^3 = [U, SUS] = 1\rangle$, wobei $P, S, U$ definiert ist durch: $P : (a, b) \mapsto (b, a)$; $S : (a, b) \mapsto (a^{-1}, b)$; $U : (a, b) \mapsto (ab, b)$; (vgl. auch [8]).

Nach [11] ist $G$ quasifreie Gruppe vom Rang 2 (vgl. auch [10]), und es existiert ein Epimorphismus $\phi : A(F_2) \to A(G)$, definiert durch $P \mapsto \hat{P}$; $S \mapsto \hat{S}$; $U \mapsto \hat{U}$; dabei sind $\hat{P}, \hat{S}, \hat{U}$ die von $P, S, U$ induzierten Automorphismen von $G$.

Man überlegt sich leicht, daß $\ker(\phi) \subset I(F_2)$ und $\ker(\phi) \neq I(F_2)$, genauer $\ker(\phi) \cong \ker(\pi)$. Sei $F_2/F'_2$ die von $a$ und $b$ erzeugte freie abelsche Gruppe und $\pi' : F_2 \to F_2/F'_2$ der durch $a \mapsto a$; $b \mapsto b$ definierte kanonische Epimorphismus. Es ist $G/G' \cong F_2/F'_2$. Wir identifizieren $G/G'$ mit $F_2/F'_2$. Es ist $A(G/G') = A(F_2/F'_2) \cong GL(2, \mathbb{Z})$.

Seien $p, s, u$ die von $P, S, U$ induzierten Automorphismen von $F_2/F_2'$. Es existiert ein Epimorphismus $\Lambda : A(F_2) \to A(F_2/F_2')$, definiert durch $P \mapsto p$; $S \mapsto s$; $U \mapsto u$; mit $\ker(\Lambda) = I(F_2)$. Damit existiert ein Epimorphismus $\psi : A(G) \to A(F_2/F_2')$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A(F_2) \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "|||"] & A(F_2/F_2') \\ A(G) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, und es gilt $\ker(\psi) = I(G)$, d. h. $A(G)/I(G) \cong A(G/G')$. Nach Satz 1.2 muß nur noch gezeigt werden, daß $\ker(\psi) = I(G)$ charakteristische Untergruppe von $A(G)$ ist.

$I(G)$ wird von $i_a$ und $i_b$ erzeugt und wegen $Z(G) = 1$ gilt: $I(G) \cong G$. Sei nun $\alpha \in A(A(G))$. Wir werden zeigen, daß folgende beiden Fälle nicht eintreten können.

$$\alpha(i_a) = \gamma_a \notin I(G)\,; \quad \alpha(i_b) = i_g \in I(G)\,; \quad g \in G\,. \tag{3.1}$$

$$\alpha(i_a) = \gamma_a \notin I(G)\,; \quad \alpha(i_b) = \gamma_b \notin I(G)\,. \tag{3.2}$$

Wir zeigen zuerst, daß der Fall (3.1) nicht eintreten kann. Sei $\alpha(i_a) = \gamma_a \notin I(G)$ und $\alpha(i_b) = i_g \in I(G)$. In $I(G)$ hat $[i_a, i_b]$ die Ordnung $n$ und da $\alpha$ Automorphismus ist, hat $[\gamma_a, i_g]$ ebenfalls die Ordnung $n$, d. h. $\gamma_a(g)\, g^{-1}$ hat in $G$ die Ordnung $n$. Natürlich ist $g \notin G'$. Wir können o. E. voraussetzen, daß nicht $\gamma_a(g) = hgh^{-1}$ für ein $h \in G$ (vgl. [10] und [11]).

Sei nun $\bar{\gamma}_a$ der von $\gamma_a$ induzierte Automorphismus von $G/G'$. Da $\gamma_a \notin I(G)$ ist $\bar{\gamma}_a$ nicht die Identität, und wir haben dann in $G/G' = F_2/F_2'$ ein nicht triviales Element endlicher Ordnung. Das ist aber ein Widerspruch, und somit kann der Fall (3.1) nicht eintreten.

Wir zeigen nun, daß der Fall (3.2) nicht eintreten kann. Sei $\alpha(i_a) = \gamma_a \notin I(G)$ und $\alpha(i_b) = \gamma_b \notin I(G)$. Wir rechnen im folgenden ohne Einschränkung modulo innerer Automorphismen und identifizieren $A(G)/I(G)$ mit $GL(2, \mathbb{Z})$, wobei die äußeren Automorphismen von $G$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $A(G)/I(G)$ bilden.

Es gilt (siehe [7]):

$$GL(2, \mathbb{Z}) = \langle p, x, y \mid p^2 = x^4 = (px)^2 = (py)^2 = 1,\ x^2 = y^3 \rangle$$

mit

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da das Zentrum von $GL(2, \mathbb{Z})$ nur aus 1 und $x^2$ besteht, gilt:

$$I(GL(2, \mathbb{Z})) = \langle p, x, y \mid p^2 = x^2 = y^3 = (px)^2 = (py)^2 = 1 \rangle$$

Man überlegt sich leicht, daß $[\gamma_a, \gamma_b] \notin I(G)$, und daher ist $1 \neq [\gamma_a, \gamma_b] \in GL(2, \mathbb{Z})$, genauer $[\gamma_a, \gamma_b] \in K := (GL(2, \mathbb{Z}))'$ und es ist $K \subset SL(2, \mathbb{Z})$. Da $[\gamma_a, \gamma_b] = \alpha([i_a, i_b])$, muß $[\gamma_a, \gamma_b]$ in $GL(2, \mathbb{Z})$ die Ordnung $n$ haben.

Periodische Elemente von $GL(2, \mathbb{Z})$ haben aber nur die Ordnungen 2, 3, 4, 6; genauer: periodische Elemente von $GL(2, \mathbb{Z})$ sind konjugiert zu genau einem $p$, $px$, $x^2$, $y^2$, $x$ und $y$; wobei ord $(p)$ = ord $(px)$ = ord $(x^2) = 2$, ord $(y^2) = 3$, ord $(x) = 4$, ord $(y) = 6$; (vgl. [7]). Für $n = 5$ und $n \geqq 7$ kann also der Fall (3.2) nicht eintreten. Da $x \notin K$ und ord $(x) = 4$, kann der Fall (3.2) auch für $n = 4$ nicht eintreten.

Man überlegt sich leicht, daß $\gamma_a$ und $\gamma_b$ unendliche Ordnung haben. Weiter kann die von $\gamma_a$ und $\gamma_b$ erzeugte Gruppe nicht von einem Paar $\{\varphi, \psi\}$ erzeugt werden, in dem $\varphi$ die Ordnung zwei hat. Damit kann nach Satz 2 der Fall (3.2) für $n = 3$ nicht eintreten. Ähnlich zeigt man, daß auch für $n = 6$ der Fall (3.2) nicht eintreten kann.

Es bleibt also $n = 2$ zu untersuchen.

Sei $n = 2$: Wegen det $(p)$ = det $(px) = -1$ folgt $p, px \notin K$ und somit $[\gamma_a, \gamma_b] = x^2$ (da $x^2 \in Z(GL(2, \mathbb{Z}))$). Aus der Präsentierung von $GL(2, \mathbb{Z})$ ersieht man, daß ein Element von $GL(2, \mathbb{Z})$ in der Form $p^r\, V(x, y)$, $0 \leqq r \leqq 1$, geschrieben werden kann. Weiter erhalten wir, daß o. E. einer der folgenden Fälle eintritt

$$[\gamma_a, \gamma_b] = [V(x, y), W(x, y)]\,. \tag{3.3}$$

$$[\gamma_a, \gamma_b] = V(x, y)\, W(x, y)\, V(x, y)^{-1}\, W(x^{-1}, y^{-1})^{-1}\,. \tag{3.4}$$

Es trete (3.3) ein. Wir betrachten den kanonischen Epimorphismus $\bar{\ }: SL(2, \mathbb{Z}) \to$ $\to PSL(2, \mathbb{Z})$ und erhalten dann in $PSL(2, \mathbb{Z})$ die Gleichung $\bar{\gamma}_a\bar{\gamma}_b = \bar{\gamma}_b\bar{\gamma}_a$. Da $PSL(2, \mathbb{Z})$ isomorph zur Modulgruppe ist, gibt es nach Satz 1.1 ein $\bar{C}(\bar{x}, \bar{y}) \in PSL(2, \mathbb{Z})$, mit $\bar{\gamma}_a = \bar{C}(\bar{x}, \bar{y})^\varepsilon$, $\bar{\gamma}_b = \bar{C}(\bar{x}, \bar{y})^\eta$, $\varepsilon, \eta \in \mathbb{Z}$. Damit gilt in $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\gamma_a = C(x, y)^\varepsilon \,.\, x^{2\varepsilon_1}\,, \quad \gamma_b = C(x, y)^\eta \,.\, x^{2\varepsilon_2}\,, \quad 0 \leqq \varepsilon_i \leqq 1 \quad \text{für} \quad i = 1, 2\,.$$

Das bedeutet aber $[\gamma_a, \gamma_b] = 1$; und das ist ein Widerspruch zu $[\gamma_a, \gamma_b] = x^2$. Damit kann (3.3) nicht eintreten.

Es trete nun (3.4) ein.

Man überlegt sich leicht, daß $\gamma_a$ und $\gamma_b$ unendliche Ordnung haben. Nach Satz 1 und Lemma 1 können wir also — eventuell nach einer geeigneten Konjugation — annehmen, daß $W(x, y)$ o. E. von der Form $W(x, y) = x^{2\varepsilon} \,.\, S(x, y)\, S(x, y^{-1})$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, ist.

Dem Beweis von Satz 1 und Lemma 1 entnehmen wir, daß wir weiter o. E. etwa $V(x, y) = x^{2\delta} \,.\, S(x, y^{-1})$, $0 \leqq \delta \leqq 1$, annehmen können. Damit erhalten wir nach Satz 1 und Lemma 1

$$\begin{aligned}[\gamma_a, \gamma_b] &= V(x, y)\, W(x, y)\, (V(x, y))^{-1}\, (W(x^{-1}, y^{-1}))^{-1} = \\ &= S(x, y^{-1})\, S(x, y)\, (S(x^{-1}, y))^{-1}\, (S(x^{-1}, y^{-1}))^{-1} = \\ &= S(x, y^{-1})\, S(x, y)\, (S(x, y))^{-1}\, (S(x, y^{-1}))^{-1} = 1\,.\end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch zu $[\gamma_a, \gamma_b] = x^2$. Damit kann (3.4) nicht eintreten.

Insgesamt kann also auch für $n = 2$ der Fall (3.2) nicht auftreten. Folglich ist $I(G)$ charakteristische Untergruppe von $A(G)$. q. e. d.

**Bemerkung.** Im Fall $n = 1$ ist $A(G)$ nicht vollständig, denn $A(G) \cong GL(2, \mathbb{Z})$ und $A(GL(2, \mathbb{Z}))$ besitzt äußere Automorphismen (siehe [5]). Mit Satz 3 von [11] hat damit jede quasifreie Gruppe vom Rang $q \geqq 2$ eine vollständige Automormphismengruppe, wenn sie eine Gruppe mit einer definierenden Relation und Torsion ist.

**Satz 4.** *Sei* $H = \langle a, b \mid [a, b]^{2k+1} = (a[a, b]^k)^2 = (ab[a, b]^k)^2 = (aba[a, b]^k)^2 = 1\rangle$, $k \geqq 1$. *Dann ist* $A(H)$ *vollständig.*

Beweis. Sei $F_2$ die von $a$ und $b$ erzeugte freie Gruppe. $H$ ist Fuchssche Gruppe (vgl. [12]) und damit ist nach Satz 1.1 das Zentrum von $H$ trivial. Nach [12] ist $H$ quasifrei vom Rang 2. $H/H' = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1\rangle$ ist quasifrei vom Rang 2 (vgl. [11]). $A(H/H')$ hat die Präsentierung $A(H/H') = \langle p, u \mid p^2 = u^2 = (pu)^3 = 1\rangle$, wobei $p, u$ definiert ist durch: $p : (a, b) \mapsto (b, a)$; $u : (a, b) \mapsto (ab, b)$. Seien $P', S', U'$ die von $P, S, U \in A(F_2)$ induzierten Automorphismen von $H$. Es existiert ein Epimorphismus $\phi' : A(F_2) \to A(H)$, definiert durch: $P \mapsto P'$; $S \mapsto S'$; $U \mapsto U'$; und ein Epimorphismus $\Lambda' : A(F_2) \to A(H/H')$, definiert durch: $P \mapsto p$; $S \mapsto 1$; $U \mapsto u$; und es gilt $\ker(\phi') \subset I(F_2) \subset \ker(\Lambda')$.

Damit existiert ein Epimorphismus $\psi' : A(H) \to A(H/H')$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A(F_2) \arrow[r, "\Lambda'"] \arrow[d, "\phi'"'] \arrow[dr, phantom, "|||"] & A(H/H') \\
A(H) \arrow[ur, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht; und es gilt $I(H) \subset \ker(\psi')$ und $I(H) \neq \ker(\psi')$. Mit ähnlichen Methoden wie in Satz 3 und genauen Fallunterscheidungen zeigt man, daß $\ker(\psi')$ charakteristische Untergruppe von $A(H)$ ist. Man überlegt sich leicht, daß nun auch $I(H)$ eine charakteristische Untergruppe von $A(H)$ ist. q. e. d.

**Bemerkungen.** Da $G$ und $H$ die einzigen Fuchsschen Gruppen sind, die quasifrei vom Rang $q \geqq 2$ sind, gilt also, daß jede quasifreie Fuchssche Gruppe vom Rang $q \geqq 2$ eine vollständige Automorphismengruppe hat. Zu bemerken ist in diesem Zusammenhang

$$H/H' \cong A(GL(2, \mathbb{Z}))/I(GL(2, \mathbb{Z})), \quad (\text{vgl. } [5]).$$

## *Literatur*


[1] *W. S. Burnside:* Theory of groups of finite order, Dover 1955.

[2] *J. L. Dyer, E. Formanek:* Complete automorphism groups, Bull. Amer. Math. Soc. *81*, 435—437, (1975).

[3] *J. L. Dyer, E. Formanek:* The automorphism group of a free group is complete, J. London Math. Soc. (2), *11*, 181—190 (1975).

[4] *L. Greenberg:* Discrete groups of motions, Canad. J. Math. *12*, 415—426, (1960).

[5] *L. K. Hua, I. Reiner:* Automorphisms of the unimodular group, Trans. Amer. Math. Soc. *71*, 331—348, (1951).

[6] *A. M. Macbeath:* Discontinuous groups and birational transformations, Proc. of the Dundee Summer School (1961).

[7] *S. Meskin:* Periodic automorphisms of the two-generator free group, Springer Verlag, Lect. Notes Math. *372*, 494—498, (1973).

[8] *J. Nielsen:* Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann. *91*, 169—209, (1924).

[9] *B. Neumann:* Die Automorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann. *107*, 367—386, (1932).

[10] *S. J. Pride:* On the generators of one-relator groups, Trans. Amer. Math. Soc. *210*, 331—364 (1975).

[11] *G. Rosenberger:* Automorphismen und Erzeugende für Gruppen mit einer definierenden Relation, Math. Z. *129*, 259—267, (1972).

[12] *G. Rosenberger, R. N. Kalia:* Automorphisms of the Fuchsian groups of type $(o; 2, 2, 2, q; o)$. Comm. in Algebra *6(11)*, 1115—1129 (1978).



*Anschrift der Verfasser:* G. Rosenberger, Universität Dortmund, Abteilung Mathematik, 4600 Dortmund 50, Postfach 500500, BRD; F. Tessun, Universität Hamburg, Mathematisches Seminar, 2000 Hamburg, 13, Bundesstraße 55, BRD.