

Heinz Damm

Zur Zerlegung des E_n durch einfache Hyperflächen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 28 (1978), No. 3, 480–483

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101553>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1978

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ZUR ZERLEGUNG DES E_n DURCH EINFACHE HYPERFLÄCHEN

HEINZ DAMM, Berlin

(Eingegangen am 2. Februar 1977)

EINLEITUNG

In [2] wurde eine geometrische Konzeption für den Aufbau einer qualitativen Theorie der nichtlinearen Optimierung entwickelt. Im Falle der konvexen Optimierung konnte diese Konzeption bereits mit Erfolg angewandt werden [4]. Eine zentrale Stellung nehmen in [2] die einfachen Flächen ein. Für abgeschlossene einfache Hyperflächen wurde gezeigt [2], daß diese den E_n in genau zwei Gebiete zerlegen. Die Zerlegung des E_n durch homöomorphe Bilder von abgeschlossenen einfachen Hyperflächen ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Dabei wird in den Fällen, wo der E_n als topologischer Raum aufgefaßt wird, die natürliche Topologie zugrunde gelegt. Mit $S_n = \{x \in E_{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 = 1\}$ wird die n -Sphäre bezeichnet. Schließt man E_n mit einem unendlich fernen Punkt ∞ ab, so sind $\bar{E}_n = E_n \cup \{\infty\}$ und S_n in bekannter Weise homöomorph zueinander. Begriffe und Bezeichnungen, die im folgenden aus [2] übernommen wurden, werden als solche gekennzeichnet und hier nicht noch einmal erklärt.

ZERLEGUNGSSÄTZE

Es sei $M_{n-1} \subset E_n$ eine einfache Hyperfläche [2] und $M \subset E_n$ homöomorph zu M_{n-1} . Wie Beispiel 1 zeigt, braucht M keine einfache Hyperfläche zu sein.

Beispiel 1. Sei

$$M = \{x \in E_2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = (x_1)^2\} \cup \{x \in E_2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = (x_1)^3\}.$$

Man überzeugt sich sofort, daß in $x = (0, 0)$ die Definition der einfachen Hyperfläche nicht erfüllbar ist. Andererseits ist M homöomorph zu S_1 und S_1 ist eine einfache Hyperfläche in E_2 .

Gilt $M_{n-1} = \bar{M}_{n-1}$, so zerlegt M_{n-1} den E_2 in genau zwei Gebiete [2].

Beispiel 2. Sei $M_{n-1} = \{x \in E_2 \mid -\frac{1}{2}\pi < x_1 < \frac{1}{2}\pi, x_2 = \tan x_1\}$. Dann ist M_{n-1} eine einfache Hyperfläche in E_2 und es gilt $M_{n-1} = \overline{M}_{n-1}$. Die Mengen M_{n-1} und $M = \{x \in E_2 \mid -\frac{1}{2}\pi < x_1 < \frac{1}{2}\pi, x_2 = 0\}$ sind homöomorph und M ist eine einfache Hyperfläche in E_2 . Man sieht aber sofort, daß M nicht abgeschlossen ist und den E_2 nicht zerlegt. Daraus folgt, daß das homöomorphe Bild einer abgeschlossenen einfachen Hyperfläche den E_n nicht zu zerlegen braucht.

Die abgeschlossenen einfachen Hyperflächen besitzen folgende Eigenschaft.

Satz 1. Sei $M_{n-1} = \overline{M}_{n-1} \subset E_n$. Dann ist M_{n-1} gemeinsame Begrenzung der Gebiete G_1 und G_2 , in die der E_n durch M_{n-1} zerlegt wird.

Beweis. Der Beweis wird nur skizziert. Es werden die Bezeichnungen und Ergebnisse des § 4 von [2] benutzt. Sei $Z(M_{n-1}) = \bigcup_{x \in M_{n-1}} U(x)$ eine Z-Überdeckung von M_{n-1} . Dann zerlegt M_{n-1} jedes $U(x)$ in genau zwei Gebiete ${}^1U(x)$ und ${}^2U(x)$ ([2], § 4, Beh. 1). Aus dem in [2] dafür angegebenen Beweis folgt sofort, daß für jedes feste $x^0 \in M_{n-1}$ jedes $x \in M_{n-1} \cap U(x^0)$ Begrenzungspunkt von ${}^1U(x^0)$ und ${}^2U(x^0)$ ist. Berücksichtigt man jetzt die Konstruktion der Gebiete G_1 und G_2 aus den Mengen ${}^1U(x)$ und ${}^2U(x)$ ([2], § 4, Beh. 2, 3 und 4), so folgt sofort, daß jeder Punkt von M_{n-1} Begrenzungspunkt von G_1 und G_2 ist.

Es sei jetzt $M \subset E_n$ abgeschlossen und homöomorph zu einer abgeschlossenen einfachen Hyperfläche M_{n-1} von E_n . Der Homöomorphismus von M auf M_{n-1} werde mit φ bezeichnet. Zunächst wird der Fall betrachtet, daß M_{n-1} unbeschränkt ist. Dann ist auch M unbeschränkt und es gilt folgende Aussage.

Lemma 1. Für jedes hinreichend große $d \in E_1$ $d > 0$ existiert ein $h \in E_1$, $h > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Die Punktmenge $N(h) = \{x \in E_n \mid \sum_{i=1}^n (x_i)^2 > h\} \cap M$ wird durch φ in die Punktmenge $Q(d) = \{x \in E_n \mid \sum_{i=1}^n (x_i)^2 > d\} \cap M_{n-1}$ abgebildet.

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, für $d^* > 0$ existiert kein h mit der genannten Eigenschaft. Dann gibt es zu jedem $h > \tilde{h} > 0$ ein $x(h) \in N(h)$ mit $\varphi(x(h)) \notin Q(d^*)$. Folglich gilt $\varphi(x(h)) \in \{x \in E_n \mid \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \leq d^*\} \cap M_{n-1} = \tilde{Q}(d^*)$. Sei jetzt $h_{v+1} = h_v + 1$, $h_1 > \tilde{h} > 0$ und $v = 1, 2, \dots$. Für jedes $v = 1, 2, \dots$ existiert dann ein $x(h_v) \in N(h_v)$ mit $\varphi(x(h_v)) \in \tilde{Q}(d^*)$. Da $\tilde{Q}(d^*)$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $\{\varphi(x(h_\mu))\}_{\mu=1}^\infty$, deren Grenzwert x^* zu $\tilde{Q}(d^*)$ gehört. In jeder ε -Umgebung von x^* liegen daher unendlich viele Glieder der Folge $\{\varphi(x(h_\mu))\}_{\mu=1}^\infty$. Sei $\varphi^{-1}(x^*) = \tilde{x} \in M$. Wegen φ^{-1} stetig, liegen daher in jeder Umgebung von \tilde{x} unendlich viele Punkte der Folge $\{x(h_\mu)\}$. Das steht aber im Widerspruch zur Konstruktion der $x(h_\mu)$. Das Lemma ist damit bewiesen.

Bemerkung. Aus dem eben angegebenen Beweis folgt sofort: Für jedes hinreichend große $h \in E_1$, $h > 0$ existiert ein $d \in E_1$, $d > 0$ mit der Eigenschaft, daß $\varphi^{-1}(Q(d)) \subset N(h)$.

Sei jetzt $\bar{E}_n = E_n \cup \{\infty\}$. Als Umgebungen des Punktes ∞ werden in bekannter Weise alle Mengen angesehen, die den Punkt ∞ und alle Punkte außerhalb einer genügend großen abgeschlossenen Kugel mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt enthalten. Es ist dann ohne weiteres klar, daß $\tilde{M} = M \cup \{\infty\}$ und $\tilde{M}_{n-1} = M_{n-1} \cup \{\infty\}$ in \bar{E}_n abgeschlossen sind. Die Abbildung

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in E_n \\ \infty & \text{für } x = \infty \end{cases}$$

ist dann ein Homöomorphismus von \tilde{M} auf \tilde{M}_{n-1} . Die Stetigkeit von ψ und ψ^{-1} ergibt sich dabei unmittelbar aus Lemma 1 und der sich daran anschließenden Bemerkung.

Im weiteren wird folgende Lemma benutzt, dessen Beweis unmittelbar klar ist.

Lemma 2. *Es seien R und R^* homöomorphe topologische Räume. Wenn $P \subset R$ den Raum R zerlegt, so zerlegt auch das Bild P^* von P den Raum R^* . Beide Zerlegungen haben dieselbe Anzahl von Komponenten.*

Bildet man jetzt \bar{E}_n homöomorph auf S_n ab, so gehen \tilde{M} und \tilde{M}_{n-1} in zueinander homöomorphe Mengen \hat{M} und \hat{M}_{n-1} über. Nach Lemma 2 zerlegt \hat{M}_{n-1} den Raum S_n in genau zwei Gebiete. Unter Benutzung des Dualitätssatzes von ALEXANDER und PONTRJAGIN [1] folgt sofort, daß auch \hat{M} den Raum S_n in genau zwei Gebiete zerlegt. Wendet man nochmal Lemma 2 an und berücksichtigt die Definition von \tilde{M} und \tilde{M}_{n-1} , so ergibt sich folgendes Resultat.

Satz 2. *1°. Ist $M \subset E_n$, $M = \bar{M}$ homöomorph zu einer abgeschlossenen unbeschränkten einfachen Hyperfläche M_{n-1} , so zerlegt M den E_n in genau zwei Gebiete G_1 und G_2 . 2°. M ist die gemeinsame Begrenzung von G_1 und G_2 .*

Beweis. Es muß nur noch Behauptung 2° bewiesen werden. Nach Satz 1 ist jeder Punkt von M_{n-1} Begrenzungspunkt von M_{n-1} und die Menge M_{n-1} ist gemeinsame Begrenzung der beiden Gebiete, in die sie den E_n zerlegt. Aus dem Satz von der Gebietsinvarianz ([3], S. 346) folgt dann, daß jeder Punkt von M ebenfalls Begrenzungspunkt von M ist. Sei $x \in M$. In jeder n -dimensionalen Umgebung von x liegt dann stets ein Punkt von G_1 und ein Punkt von G_2 . Denn würde eine Umgebung $U(x)$ existieren mit o.B.d.A. $U(x) \setminus M \subset G_1$, so würde jede Umgebung des Bildpunktes \tilde{x} von x , $\tilde{x} \in M_{n-1}$, eine Umgebung enthalten, die homöomorph zu E_n ist. Das ist aber nicht möglich. Jeder Punkt von M ist daher Begrenzungspunkt von G_1 und G_2 . Die Menge M ist somit gemeinsame Begrenzung von G_1 und G_2 .

Es sei jetzt $M_{n-1} = \bar{M}_{n-1}$ eine beschränkte einfache Hyperfläche in E_n . Wie in [2] bewiesen wurde, ist eins der beiden Gebiete, in die der E_n durch M_{n-1} zerlegt wird, beschränkt. Aus Satz 1 folgt daher sofort

Korollar 1. Jede kompakte einfache Hyperfläche $M_{n-1} \subset E_n$ ist eine reguläre Gebietsgrenze in E_n .

Sei $M \subset E_n$ homöomorph zu einer kompakten einfachen Hyperfläche $M_{n-1} \subset E_n$. Aus Korollar 1 folgt dann unter Benutzung des Dualitätssatzes von Alexander und Pontrjagin [1] unmittelbar der nachstehende Satz.

Satz 3. Jede Teilmenge des E_n , die homöomorph zu einer kompakten einfachen Hyperfläche des E_n ist, ist in E_n reguläre Gebietsgrenze.

Literatur

- [1] Александров, П. С.: Комбинаторная топология. Москва 1947.
- [2] Nožička, F.: Über einfache Mannigfaltigkeiten im linearen affinen Raum A_n in globaler Auffassung. Czechoslovak Mathematical Journal, No. 4, 1976.
- [3] Rinow, W.: Topologie. Berlin 1975.
- [4] Salzwedel, D.: Über einige Grundbegriffe der nichtlinearen Optimierung. Diplomarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik, 1975.

Anschrift des Verfassers: Humboldt Universität zu Berlin, Sektion Mathematik, Unter den Linden, Berlin, DDR.