Czechoslovak Mathematical Journal

František Machala

Erweiterte lokale Ternärringe

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 27 (1977), No. 4, 560–572

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101494`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1977

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

Czechoslovak Mathematical Journal, 27 (102) 1977, Praha

ERWEITERTE LOKALE TERNÄRRINGE

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 1. September 1975)

M. HALL koordinatisierte in [1] affine und projektive Ebenen durch ternäre algebraische Strukturen, welche Ternärkörper [5] oder auch Ternärringe [1], [6] genannt werden. Gemäß [5] werden wir diese Strukturen Ternärkörper nennen. Die Bezeichnung „Ternärring" verwenden wir im algemeineren Fall (Definition 1) in der Übereinstimmung mit den Strukturen mit zwei binären Operationen.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir zunächst algebraische Eigenschaften von Ternärringen, welche später bei der Definitionen weiterer Ternärstrukturen benutzt werden. In der Definition 4 wird ein Ideal im Ternärring definiert. Dabei wird gezeigt, daß die Ideale in den Ternärringen ähnliche Struktureigenschaften, wie die Ideale in den Ringen besitzen. So läßt sich z. B. durch jedes Ideal im Ternäring ein Restklassen-Ternärring definieren. Eine kanonische Abbildung eines Ternärringes auf einen Restklassen-Ternärring ist ein Epimorphismus und jeder Epimorphismus der Ternärringe läßt sich auf diese Weise beschreiben.

In den Definitionen 6 und 7 werden vollständige und H-vollständige Ideale definiert. Ein Ternärring, der ein vollständiges bzw. H-vollständiges Ideal besitzt, heißt ein lokaler Ternärring bzw. ein Hjelmslev-Ternärring (H-Ternärring). Wird auf einem lokalen Ring (etwa [4]) mit Hilfe von binären Operationen eine Ternäroperation in geeigneter Weise definiert, so erhalten wir eine Ternärstruktur, die einen lokalen Ternärring darstellt. Ähnlich erhalten wir mit Hilfe des Hjelmslev-Ringes (H-Ringes [2], [3]) einen H-Ternärring.

Der weitere Teil wurde den Definitionen und dem Studium der erweiterten Ternärstrukturen gewidmet. In der Definition 11 wird ein erweiterter Ternärkörper, in der Definition 12 ein erweiterter lokaler Ternärring und in der Definition 13 ein erweiterter H-Ternärring eingeführt. Es wird z. B. gezeigt, daß jeder erweiterter Ternärkörper einen erweiterten lokalen Ternärring darstellt und daß aus jedem erweiterten lokalen Ternärring durch gewisse Faktorisation ein erweiterter Ternärkorper zu erhalten ist.

Ähnlich wie die klassischen Ternärkörper, haben auch die durch die Definitionen 11 bis 13 eingeführten erweiterten Ternärstrukturen eine geometrische Interpretation.

Im anschließenden Artikel „Koordinatisation projetiver Ebenen mit Homomorphismus" beweist der Autor, daß sich projektive Ebenen bzw. H-Ebenen [2] bzw. projektive Ebenen mit Homomorphismus [3] durch erweiterte Ternärkörper bzw. erweiterte H-Ternärringe bzw. erweiterte lokale Ternärringe koordinatisieren lassen.

Definition 1. Ein *Ternärring* T ist definiert als ein Paar (R, t), wo R eine Menge, t eine Ternäroperation über R sind und wobei

K_1. Es existieren Elemente $0, 1 \in R$, $0 \neq 1$, mit $t(0, a, b) = t(a, 0, b) = b$, $t(1, a, 0) = t(a, 1, 0) = a \ \forall a, b \in R$.

K_2. $\forall a, b, c \in R \ \exists! \, x \in R \ c = t(a, b, x)$.

Satz 1. *Ist* $T = (R, t)$ *ein Ternärring, so gibt es ein einziges Paar* $(0, 1)$, *das die Bedingung* K_1 *erfüllt.*

Beweis. Nehmen wir an, daß es zwei die Bedingung K_1 erfüllende Paare $(0, 1)$, $(0', 1')$ gibt. Dann gilt $t(1, 0', 0) = 0'$ und zugleich auch $t(1, 0', 0) = 0$, woraus $0 = 0'$ folgt. Nach K_1 ergibt sich weiter $t(1, 1', 0) = 1'$ und $t(1, 1', 0') = 1$. Im Hinblick auf $t(1, 1', 0) = t(1, 1', 0')$ gilt dann $1 = 1'$.

Definition 2. Ein Ternärring $T = (R, t)$ heißt ein *Ternärkörper*, wenn gilt:

K_3. Für alle Elemente a, b, c, d aus R mit $a \neq c$ gibt es genau ein $x \in R$ derart, daß $t(x, a, b) = t(x, c, d)$.

K_4. Für alle Elemente a, b, c, d aus R mit $a \neq c$ gibt es genau ein Paar (x, y) aus $R \times R$ derart, daß $b = t(a, x, y)$ und $d = t(c, x, y)$.

Bemerkung 1. Es sei $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ ein Ring (nicht notwendig assoziativ) mit Einselement. Setzen wir $t(a, b, c) = ab + c \ \forall a, b, c \in R$, so ist $T = (R, t)$ ein Ternärring. Falls $\mathcal{R}$ ein Körper ist, so ist T ein Ternärkörper.

Definition 3. Es seien $T_1 = (R_1, t_1)$ und $T_2 = (R_2, t_2)$ Ternärringe. Eine Abbildung φ der Menge R_1 auf die Menge R_2 heißt ein *Epimorphismus* des Ternärringes T_1 auf den Ternärring T_2, falls $[t_1(a, b, c)]^\varphi = t_2(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi) \ \forall a, b, c \in R$ gilt. Der Epimorphismus φ heißt *Isomorphismus*, falls φ eine bijektive Abbildung der Menge R_1 auf R_2 ist.

Definition 4. Es seien $T = (R, t)$ ein Ternärring und R_0 eine Teilmenge aus R. Setzen wir $a \oplus r = t(1, a, r) \ \forall a \in R \ \forall r \in R_0$. R_0 heißt ein *Ideal* des Ternärringes T, wenn folgendes gilt:

(i) $0 \in R_0$.

(ii) Gilt $b = a \oplus r$ für $a, b \in R$, $r \in R_0$, so existiert ein $r' \in R_0$ mit $a = b \oplus r'$.

(iii) Für alle $a, b, c \in R$ und $r_1, r_2, r_3 \in R_0$ existiert ein $r' \in R_0$, so daß $t(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = t(a, b, c) \oplus r'$.

(iv) Gilt $t(a, b, x') = t(a, b, x) \oplus r$ für $a, b, x, x' \in R$, $r \in R_0$, so existiert ein $r' \in R_0$ mit $x' = x \oplus r'$.

Bemerkung 2. Nach K_2 ist r' aus (ii), (iii), (iv) ein einziges Element, das (ii), (iii), (iv) erfüllt. Offensichtlich gilt $0 \oplus r = r \; \forall r \in R_0$ und $a \oplus 0 = a \; \forall a \in R$.

Folgerungen aus Definition 4:

(1) Für alle $a \in R$; $r_1, r_2 \in R_0$ gilt $t(a, r_1, r_2) = t(a \oplus 0, 0 \oplus r_1, 0 \oplus r_2)$, nach (iii) gibt es ein $r \in R_0$ mit $t(a \oplus 0, 0 \oplus r_1, 0 \oplus r_2) = t(a, 0, 0) \oplus r = 0 \oplus r = r$ und folglich $t(a, r_1, r_2) \in R_0$. Entsprechend ist $t(r_1, a, r_2) \in R_0$.

(2) Nach (1) gilt $t(r_1, r_2, r_3) \in R_0 \; \forall r_1, r_2, r_3 \in R_0$.

(3) Für alle $a \in R$ und $r_1, r_2 \in R_0$ gilt $(a \oplus r_1) \oplus r_2 = t(1, a \oplus r_1, r_2) = t(1 \oplus 0, a \oplus r_1, 0 \oplus r_2)$ und nach (iii) gibt es ein $r \in R_0$ mit $t(1 \oplus 0, a \oplus r_1, 0 \oplus r_2) = t(1, a, 0) \oplus r = a \oplus r$. Folglich ergibt sich $(a \oplus r_1) \oplus r_2 = a \oplus r$.

Satz 2. *Im jeden Ternärring $T = (R, t)$ sind $\{0\}$, R Ideale. Ist T ein Ternärkörper, so sind $\{0\}$ und R die einzigen Ideale in T.*

Beweis. 1. Sei $T = (R, t)$ ein Ternärring.

a) Die Menge $\{0\}$ ist ein Ideal: Gilt $b = a \oplus 0$, so folgt $b = b \oplus 0 = a \oplus 0 = a$. Ferner erhält man $t(a \oplus 0, b \oplus 0, c \oplus 0) = t(a, b, c) = t(a, b, c) \oplus 0$. Gilt $t(a, b, x') = t(a, b, x) \oplus 0 = t(a, b, x)$, so folgt nach K_2 $x' = x$ und mithin $x' = x \oplus 0$.

b) Die Menge R ist ein Ideal: Es sei $b = a \oplus r$. Nach K_2 gibt es ein $r' \in R$ mit $a = t(1, b, r') = b \oplus r'$. Es seien Elemente a, b, c, r_1, r_2, r_3 aus R gegeben und setzen wir $d = t(a, b, c)$. Nach K_2 gibt es ein $r \in R$ mit $t(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = t(1, d, r) = d \oplus r = t(a, b, c) \oplus r$. Nach K_2 gibt es für beliebige Elemente x, x' aus R ein $r \in R$, wo $x' = t(1, x, r) = x \oplus r$ gilt und daraus (iv) folgt.

2. Es sei R_0 ein Ideal im Ternärkörper T und nehmen wir an, daß $R_0 \neq \{0\}$ ist. Dann gibt es ein Element $r \in R_0$ mit $r \neq 0$. Ist d ein beliebiges Element aus R, so gibt es nach K_3 ein $x \in R$ mit $t(x, r, 0) = t(x, 0, d) = d$. Wegen $r, 0 \in R_0$ ist dann $d \in R_0$ nach Folgerung (1) und folglich erhält man $R_0 = R$.

Satz 3. *Es seien $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1 und $T = (R, t)$ ein Ternärring nach Bemerkung 1. Ist R_0 ein Ideal in $\mathcal{R}$, so ist R_0 auch ein Ideal in T.*

Beweis. Es sei R_0 ein Ideal in $\mathcal{R}$. Dann ist $0 \in R_0$. Nehmen wir nun an, daß $b = a \oplus r = t(1, a, r) = a + r$ für Elemente $a, b \in R$ und $r \in R_0$ gilt. Da $(R_0, +)$ eine Gruppe ist, gibt es ein zu r umgekehrtes Element $r' \in R_0$ und es gilt $a = b + r' = t(1, b, r') = b \oplus r'$. Es liege $a, b, c \in R$ und $r_1, r_2, r_3 \in R_0$ vor. Dann gilt $t(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = (a + r_1)(b + r_2) + (c + r_3) = ab + r_1 b + ar_2 +$

$+ r_1 r_2 + c + r_3 = (ab + c) + r'$, wo $r' \in R_0$. Daher gilt $t(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = t(a, b, c) \oplus r'$. Gilt $t(a, b, x') = t(a, b, x) \oplus r$, so erhält man $ab + x' = (ab + x) + r$ und daraus folgt $x' = x + r = t(1, x, r) = x \oplus r$.

Satz 4. *Es sei R_0 ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$. Setzen wir für jedes $a \in R$ $\bar{a} = \{a \oplus r \mid r \in R_0\}$ und $R/R_0 = \{\bar{a} \mid a \in R\}$, dann ist R/R_0 eine Zerlegung der Menge R.*

Beweis. Sei a ein Element aus R und setzen wir $x \in \bar{a}$ an. Dann existiert ein solches $r \in R_0$, daß $x = a \oplus r$. Sei y ein beliebiges Element aus $\bar{x}$, also $y = x \oplus r' = (a \oplus r) \oplus r'$. Nach Folgerung (3) ist $y \in \bar{a}$, woraus $\bar{x} \subset \bar{a}$ folgt. Nach (ii) gibt es ein solches $r_1 \in R_0$, daß $a = x \oplus r_1$ und deshalb ist $a \in \bar{x}$. Nach dem Vorhergehenden gilt dann $\bar{a} \subset \bar{x}$ und daher erhält man $\bar{x} = \bar{a}$. Setzen wir voraus, daß $x \in \bar{a} \cap \bar{b}$. Dann gilt $x \in \bar{a}$ und mithin $\bar{x} = \bar{a}$. Gleichzeitig ist $x \in \bar{b}$, also $\bar{x} = \bar{b}$ und daraus ergibt sich $\bar{a} = \bar{b}$.

Satz 5. *Es sei R_0 ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$ mit $R_0 \neq R$. Setzen wir $t'(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \overline{t(a, b, c)}$ $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R/R_0$, so ist t' eine Ternäroperation über R/R_0 und $T' = (R/R_0, t')$ ist ein Ternärring.*

Beweis. Nach (iii) gilt $t(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) \in \overline{t(a, b, c)}$ $\forall a, b, c \in R$ $\forall r_1, r_2, r_3 \in R_0$ und deshalb ist t' eine Ternäroperation über R/R_0. Nun wird gezeigt, daß t' den Forderungen K_1, K_2 aus Definition 1 genügt.

ad K_1. Wegen $r = 0 \oplus r$ $\forall r \in R_0$ gilt $R_0 = \bar{0}$. Nehmen wir an, daß $1 \in R_0$. Dann gilt nach Forderung (1) $t(1, a, 0) = a \in R_0$ $\forall a \in R$, also $R_0 = R$, was ein Widerspruch ist. Folglich gilt $\bar{0} \neq \bar{1}$. Aus Definition von t' folgt dann für alle $a, b \in R$ $t'(\bar{0}, \bar{a}, \bar{b}) = \overline{t(0, a, b)} = \bar{b} = \overline{t(a, 0, b)} = t'(\bar{a}, \bar{0}, \bar{b})$ und $t'(\bar{1}, \bar{a}, \bar{0}) = \overline{t(1, a, 0)} = \bar{a} = \overline{t(a, 1, 0)} = t'(\bar{a}, \bar{1}, \bar{0})$.

ad K_2. Für beliebige $a, b, c \in R$ gibt es nach K_2 ein Element $x \in R$ derart, daß $c = t(a, b, x)$ und es gilt $t'(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}) = \overline{t(a, b, x)} = \bar{c}$. Nehmen wir an, daß es ein Element $\bar{x}' \in R/R_0$ mit $t'(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}) = t'(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}')$ gibt. Dabei ist $\overline{t(a, b, x)} = \overline{t(a, b, x')}$ und es gibt ein $r \in R_0$ so daß $t(a, b, x') = t(a, b, x) \oplus r$. Nach (iv) gibt es dann ein solches $r' \in R_0$, daß $x' = x \oplus r'$, also $x' \in \bar{x}$ und $\bar{x}' = \bar{x}$.

Definition 5. Es sei $T = (R, t)$ ein Ternärring und R_0 ein Ideal in T mit $R_0 \neq R$. Im Satz 4 beschriebener Ternärring $T' = (R/R_0, t')$ heißt ein durch das Ideal R_0 bestimmter *Restklassen-Ternärring.*

Satz 6. 1. *Es sei $T' = (R/R_0, t')$ ein durch das Ideal R_0 des Ternärringes $T = (R, t)$ bestimmter Restklassen-Ternärring. Dann ist die Abbildung $\varphi : a \to \bar{a}$ $\forall a \in R$ ein Epimorphismus von T auf T'.*

2. *Es sei φ ein Epimorphismus des Ternärringes $T_1 = (R_1, t_1)$ auf den Ternärring $T_2 = (R_2, t_2)$. Dann ist $R_0 = \{a \in R \mid a^\varphi = 0^\varphi\}$ ein von R_1 verschiedenes Ideal in T_1 und Ternärringe $T' = (R_1/R_0, t')$, T_2 sind isomorph.*

Beweis. 1. φ ist eine Abbildung auf R/R_0 und nach Definition von t' gilt $[t(a, b, c)]^\varphi = \overline{t(a, b, c)} = t'(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = t'(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi)$.

2. Es seien c, d beliebige Elemente aus R_2. Dann existieren $a, b \in R_1$, so daß $a^\varphi = c$, $b^\varphi = d$ und es gilt $t_2(0^\varphi, c, d) = t_2(0^\varphi, a^\varphi, b^\varphi) = [t_1(0, a, b)]^\varphi = b^\varphi = d$. Ähnlich ist $t_2(c, 0^\varphi, d) = d$. Weiter gilt $t_2(1^\varphi, c, 0^\varphi) = t_2(1^\varphi, a^\varphi, 0^\varphi) = [t_1(1, a, 0)]^\varphi = a^\varphi = c$ und $t_2(c, 1^\varphi, 0^\varphi) = c$. Nach Satz 1 ist $0^\varphi \neq 1^\varphi$ und daher $R_0 \neq R$. Nun wird gezeigt, daß die Menge R_0 ein Ideal in T_1 ist: Die Forderung $0 \in R_0$ folgt direkt aus Definition der Menge R_0.

ad (ii). Es sei $b = a \oplus r = t_1(1, a, r)$ mit $a, b \in R$, $r \in R_0$. Dann gilt $b^\varphi = [t_1(1, a, r)]^\varphi = t_2(1^\varphi, a^\varphi, 0^\varphi) = a^\varphi$. Nach K_2 existiert ein einziges Element $r' \in R_1$ mit $a = t_1(1, b, r')$. Dann ist $a^\varphi = t_2(1^\varphi, b^\varphi, r'^\varphi) = t_2(1^\varphi, a^\varphi, r'^\varphi) = t_2(1^\varphi, a^\varphi, 0^\varphi)$. Da T_2 ein Ternärring ist, ergibt sich aus K_2, daß $r'^\varphi = 0^\varphi$ und $r' \in R_0$. Damit erhält man $a = t_1(1, b, r') = b \oplus r'$.

ad (iii). Es gebe $a, b, c \in R_1$ und $r_1, r_2, r_3 \in R_0$. Dann ist $(a \oplus r_1)^\varphi = a^\varphi$, $(b \oplus r_2)^\varphi = b^\varphi$, $(c \oplus r_3)^\varphi = c^\varphi$. Setzen wir $d = t_1(a, b, c)$. Nach K_2 gibt es ein einziges Element $r \in R_1$ derart, daß $t_1(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = t_1(1, d, r)$. So folgt $t_2(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi) = t_2(1^\varphi, d^\varphi, r^\varphi) = d^\varphi = t_2(1^\varphi, d^\varphi, 0^\varphi)$. Daraus folgt $r^\varphi = 0^\varphi$, $r \in R_0$ und es gilt $t_1(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = t_1(a, b, c) \oplus r$.

ad (iv). Vorgelegt sei $t_1(a, b, x') = t_1(a, b, x) \oplus r$ mit $r \in R_0$ und setzen wir $d = t_1(a, b, x)$. Dann ist $t_1(a, b, x') = d \oplus r = t_1(1, d, r)$ und $t_2(a^\varphi, b^\varphi, x'^\varphi) = t_2(1^\varphi, d^\varphi, 0^\varphi) = d^\varphi = t_2(a^\varphi, b^\varphi, x^\varphi)$. Daraus folgt nach K_2 $x'^\varphi = x^\varphi$. Nach K_2 gibt es ein $s \in R_1$ derart, daß $x' = t_1(1, x, s)$. Dann ist $x'^\varphi = t_2(1^\varphi, x^\varphi, s^\varphi) = t_2(1^\varphi, x'^\varphi, s^\varphi) = t_2(1^\varphi, x'^\varphi, 0^\varphi)$. Hieraus folgt sofort $s^\varphi = 0^\varphi$, $s \in R_0$ und $x' = x \oplus s$.

Nach dem vorgehenden Teil des Beweises gilt $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a^\varphi = b^\varphi$. Die Abbildung $\bar{\varphi} : \bar{a} \to a^\varphi$ $\forall \bar{a} \in R_1/R_0$ ist somit bijektiv, es gilt $[t'(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})]^{\bar{\varphi}} = [\overline{t_1(a, b, c)}]^{\bar{\varphi}} = [t_1(a, b, c)]^\varphi = t_2(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi) = t_2(\bar{a}^{\bar{\varphi}}, \bar{b}^{\bar{\varphi}}, \bar{c}^{\bar{\varphi}})$ und $\bar{\varphi}$ ist also ein Isomorphismus des Ternärringes $T' = (R_1/R_0, t')$ auf T_2.

Definition 6. Es sei R_0 ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$ mit $R_0 \neq R$ und $T' = (R/R_0, t')$ ein durch dieses Ideal bestimmter Restklassen-Ternärring. Das Ideal R_0 heißt *vollständig*, wenn gilt

K'_3. (a) Für alle Elemente a, b, c, d aus R mit $\bar{a} \neq \bar{c}$ gibt es genau ein $x \in R$ derart, daß $t(x, a, b) = t(x, c, d)$.

(b) Falls $t'(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}) = t'(\bar{x}, \bar{c}, \bar{d})$ und gleichzeitig $t'(\bar{x}', \bar{a}, \bar{b}) = t'(\bar{x}', \bar{c}, \bar{d})$ ist, dann gilt $\bar{x} = \bar{x}'$.

K'_4 (a) Für alle Elemente a, b, c, d aus R mit $\bar{a} \neq \bar{c}$ gibt es genau ein Paar $(x, y) \in R \times R$ derart, daß $b = t(a, x, y)$, $d = t(c, x, y)$.

(b) Falls $\bar{b} = t'(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y})$, $\bar{d} = t'(\bar{c}, \bar{x}, \bar{y})$ und gleichzeitig $\bar{b} = t'(\bar{a}, \bar{x}', \bar{y}')$, $\bar{d} = t'(\bar{c}, \bar{x}', \bar{y}')$ ist, dann gilt $\bar{x}' = \bar{x}$, $\bar{y}' = \bar{y}$.

Definition 7. Es seien $T = (R, t)$ ein Ternärring, R_0 ein vollständiges Ideal in T und $T' = (R/R_0, t')$ ein durch R_0 bestimmter Restklassen-Ternärring. Das Ideal R_0 heißt *H-vollständig*, wenn gilt

(1) Gibt es ein $x \in R$ mit $t(x, a, b) = t(x, c, d)$, wo $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$, dann existiert ein von x verschiedenes Element x' derart, daß $t(x', a, b) = t(x', c, d)$.

(2) Gibt es ein solches Paar $(x, y) \in R \times R$, daß $b = t(a, x, y)$, $d = t(c, x, y)$ für $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$ ist, dann existiert ein von (x, y) verschiedenes Paar (x', y'), für das $b = t(a, x', y')$, $d = t(c, x', y')$ gilt.

Satz 7. *Ist R_0 ein vollständiges Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$, so ist jedes von R verschiedene Ideal aus T in R_0 enthalten.*

Beweis. Es sei Q ein Ideal aus T mit $Q \neq R$ und nehmen wir an, daß $a \in Q \cap$ $\cap (R \setminus R_0)$ ist. Sei d ein beliebiges Element aus R. Wegen $a \notin R_0$ ist $\bar{a} \neq \bar{0}$. Nach Definition 6 gibt es ein $x \in R$ mit $t(x, a, 0) = t(x, 0, d) = d$. Wegen $a, 0 \in Q$ gilt $d \in Q$ nach Folgerung (1). Daher ist $Q = R$, woraus ein Widerspruch folgt. Es gilt somit $Q \subset R_0$.

Bemerkung 3. Das vollständige Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$ ist nach Satz 7 ein enziges maximales Ideal in T.

Satz 8. *Ist R_0 ein vollständiges Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$, so ist der Restklassen-Ternärring $T' = (R/R_0, t')$ ein Ternärkörper.*

Beweis. Wir zeigen, daß der Ternärring $T' = (R/R_0, t')$ den Forderungen K_3, K_4 der Definition 2 genügt: Gegeben seien beliebige Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in R/R_0$ mit $\bar{a} \neq \bar{c}$. Nach $K_3'(a)$ von der Definition 6 gibt es ein Element $x \in R$ mit $t(x, a, b) =$ $= t(x, c, d)$. Dann gilt $\overline{t(x, a, b)} = t'(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}) = \overline{t(x, c, d)} = t'(\bar{x}, \bar{c}, \bar{d})$. Nach $K_3'(b)$ ist $\bar{x}$ ein enziges Element dieser Eigenschaft. Mit Hilfe von K_4' wird in ähnlicher Weise bewiesen, daß K_4 in T' gilt.

Definition 8. Ein Ternärring, der ein vollständiges Ideal enthält, heißt ein *lokaler Ternärring*. Ein Ternärring, der ein H-vollständiges Ideal enthält, heißt ein *Hjelmslev-Ternärring* (kurz H-Ternärring).

Definition 9. Ein assoziativer Ring $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$ mit Einselement 1 heißt (wie bekannt) *lokal*, wenn er ein einziges maximales Rechtsideal enthält.

Bemerkung 4. $\mathcal{R}$ sei ein lokaler Ring mit dem maximalen Rechtsideal R_0. Nach [4], Kapitel 3, § 3.7 gilt: R_0 ist ein zweiseitiges Ideal in R und es stellt die Menge von nichtinvertierbaren Elementen dar, d. h. von Elementen, zu denen in $\mathcal{R}$ keine Inversen bestehen. Der durch das Ideal R_0 bestimmte Restklassenring ist ein Körper.

Definition 10. Ein lokaler Ring $\mathscr{R}$ mit dem maximalen Ideal R_0 heißt ein *H-Ring*, wenn gilt:

(1) Jeder Nullteiler in $\mathscr{R}$ ist ein zweiseitiger Nullteiler.
(2) Ist $R_0 \neq \{0\}$, so ist R_0 die Nullteilermenge.
(3) Für jede $a, b \in R$ existieren solche Elemente $m, m' \in R$, daß
 (a) $a = mb \vee b = ma$,
 (b) $a = bm' \vee b = am'$.

Beispiele. 1. Jeder Ternärkörper T ist ein H-Ternärring, denn $\{0\}$ ist ein H-vollständiges Ideal in T.

2. Es sei $\mathscr{R} = (R, +, \cdot)$ ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal R_0. Betrachten wir nach Bemerkung 1 einen Ternärring $T = (R, t)$, wo $t(a, b, c) = ab + c \ \forall a, b, c \in \in R$ gilt. Nach Satz 3 ist R_0 ein Ideal in T. Wir zeigen, daß R_0 ein vollständiges Ideal in T ist. Seien $a, b, c, d \in R$ und $\bar{a} \neq \bar{c}$, wo $\bar{a}, \bar{c} \in R/R_0$.

ad $K_3'(a)$. Betrachten wir die Gleichung $t(x, a, b) = t(x, c, d)$, also $xa + b = = xc + d$. Dann ist $x(a - c) = d - b$. Wegen $\bar{a} \neq \bar{c}$ gilt $a - c \notin R_0$ und es liegt ein zu $a - c$ inverses Element $(a - c)^{-1}$ vor. Dann ist $x = (d - b)(a - c)^{-1}$. Es besteht also genau ein $x \in R$, welches die Gleichung $xa + b = t(x, a, b) = xc + d = = t(x, c, d)$ befriedigt.

(b) Da nach Bemerkung 4 $\mathscr{R}' = (R/R_0, +, \cdot)$ ein Körper ist, so gibt es ein enziges Element $\bar{x} \in R/R_0$ mit $\bar{x}\bar{a} + \bar{b} = \bar{x}\bar{c} + \bar{d}$ und folglich auch $t'(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}) = t'(\bar{x}, \bar{c}, \bar{d})$.

ad K_4' (a) Betrachten wir die Gleichungen $b = t(a, x, y)$, $d = t(c, x, y)$. Dann ist $b = ax + y$, $d = cx + y$, also $b = (a - c)x + d$, $x = (a - c)^{-1}(b - d)$ und $y = d - c(a - c)^{-1}(b - d)$. Die Gleichungen $b = t(a, x, y)$, $d = t(c, x, y)$ besitzen deshalb eine einzige Lösung.

(b) Erfolgt in ähnlicher Weise wie in ad $K_3'(b)$.

Da R_0 ein vollständiges Ideal in T ist, bildet T einen lokalen Ternärring.

3. Sei $\mathscr{R} = (R, +, \cdot)$ ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal R_0 und es gelte die Forderungen (1), (2) aus der Definition 10. Dann ist der nach der Bemerkung 1 konstruierte Ternärring $T = (R, t)$ ein H-Ternärring mit dem H-vollständigen Ideal R_0: Nach dem Beispiel 2 ist R_0 ein vollständiges Ideal in T. Nun wollen wir beweisen, daß die Bedingungen (1) und (2) von der Definition 7 erfüllt sind.

Gegeben seien die Elemente a, b, c, d aus R mit $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$.

ad (1). Wegen $\bar{a} = \bar{c}$ gilt $a - c \in R_0$ und nach (1) und (2) aus Definition 10 existiert ein Element $w \neq 0$, so daß $w(a - c) = 0$ gilt. Nehmen wir an, daß $b = d$. Dann ist $0a + b = 0c + d$ und zugleich $w(a - c) = 0 = d - b$, also $wa + b = = wc + d$. Somit gilt $t(0, a, b) = t(0, c, d)$ und $t(w, a, b) = t(w, c, d)$ mit $w \neq 0$. Nehmen wir an, daß $b \neq d$ und es existiere ein solches Element $x \in R$, daß $t(x, a, b) = t(x, c, d)$, also $xa + b = xc + d$ gilt. Somit ist $x(a - c) = d - b$. Setzen wir $x' = x - w$, dann ist $x' \neq x$. So erhält man $w(a - c) = (x - x') \cdot \cdot (a - c) = 0$ und $x'(a - c) = x(a - c) = d - b$. Mithin gilt $x'a + b = x'c + d$ und $t(x', a, b) = t(x', c, d)$.

ad (2). Wegen $a - c \in R_0$ existiert ein Element $w \neq 0$ derart, daß $(c - a) w = 0$ gilt. Nehmen wir zuerst an, daß $b = d$. Dann $(c - a) w = d - b$. Setzen wir $v = b - aw$, so erhalten wir $b = aw + v$, $d = cw + v$, also $b = t(a, w, v)$ $d = t(c, w, v)$. Gleichzeitig gilt $b = t(a, 0, b)$, $d = t(c, 0, d)$. Es sei $b \neq d$ und nehmen wir an, es existiere ein Paar $(x, y) \in R \times R$ derart, daß $b = t(a, x, y)$, $d = t(c, x, y)$, also $b = ax + y$, $d = cx + y$. Dann ist $y = b - ax$ und $d = cx + b - ax$, also $(c - a) x = d - b$. Wird $x' = w + x$ gesetzt, so gilt $x' \neq x$ und $(c - a) \cdot (x' - x) = 0$, also $(c - a) x' = (c - a) x = d - b$. Dann folgt $d = cx' + b - ax'$. Setzen wir $y' = b - ax'$, so erhalten wir $b = ax' + y'$, $d = cx' + y'$ und $b = t(a, x', y')$, $d = t(c, x', y')$.

Definition 11. Es sei R eine Menge und u ein Element mit $u \notin R$. Setzen wir $Q = R \cup \{u\}$ und $Q' = \{(a, b, c) \in Q \times Q \times Q \mid b = u \Rightarrow c = u\}$. Das Trippel $T = (R, u, t)$ heißt ein *erweiterter Ternärkörper* (mit ausgezeichnetem Element u), wenn t eine Abbildung von Q' in Q ist und gilt

11.1. $\mathcal{T} = (R, t \mid R)$ ist ein Ternärkörper, wo mit $t \mid R$ eine Restriktion der Abbildung t auf die Menge $R \times R \times R$ bezeichnet ist.

11.2. $t(u, b, c) = b \ \forall b, c \in R$,

11.3. $t(a, b, u) = b \ \forall a \in R \ \forall b \in Q$,

11.4. $t(u, b, u) = u \ \forall b \in Q$.

Bemerkung 5. Zu jedem Ternärring $T = (R, t)$ und jedem Element u mit $u \notin R$ läßt sich ein erweiterter Ternärkörper (mit ausgezeichnetem Element u) kanonisch zuordnen.

Definition 12. Es seien R, R' elementfremde Mengen und schreiben wir $Q = R \cup R'$, $Q' = \{(a, b, c) \in Q \times Q \times Q \mid b \in R' \Rightarrow c \in R'\}$. Ferner sei t eine Abbildung der Menge Q' in Q. Das Tripel $T = (R, R', t)$ heißt ein *erweiterter lokaler Ternärring* (mit ausgezeichneter Menge R'), wenn gilt:

(1) $t(a, b, c) \in R \ \forall a, b, c \in R$ und $\mathcal{T} = (R, t \mid R)$ ist ein lokaler Ternärring mit dem vollständigen Ideal R_0 (im weiteren werden wir mit $\mathcal{T}' = (R/R_0, t')$ den durch das Ideal R_0 in $\mathcal{T}$ bestimmten Restklassen-Ternärkörper bezeichnen. Hierbei ist $R/R_0 = \{\bar{a} \mid a \in R\}$. Weiter setzen wir $\bar{u} = \{R'\} \ \forall u \in R'$).

(2) (a) $t(a, b, c) \in \bar{b} \quad \forall a \in R' \ \forall b, c \in R$,

(b) $t(a, b, c) \in \bar{b} \quad \forall a \in R \quad \forall b \in Q \ \forall c \in R'$,

(c) $t(a, b, c) \in R' \ \forall a, c \in R' \ \forall b \in Q$.

K_3'' 1. Zu den Elementen a, b, c, d aus Q gibt es ein einziges Element $x \in Q$ derart, daß $t(x, a, b) = t(x, c, d)$ gilt, wenn

(a) $a, b, c, d \in R$ und $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} \neq \bar{d}$,

(b) $a, c \in R$; $b, d \in R'$ und $\bar{a} \neq \bar{c}$.

2. Zu jeden Elementen a, b, c, d aus Q gibt es ein einziges Paar $(x, y) \in Q \times Q$ derart, daß $y = t(x, a, b)$, $x = t(y, c, d)$ gilt, wenn

(a) $a, b \in R;\ c \in Q;\ d \in R'$,

(b) $a \in R;\ b, c, d \in R'$.

K_4'' Für die Elemente a, b, c, d aus Q gibt es ein einziges Paar $(x, y) \in Q \times Q$ mit $b = t(a, x, y)$, $d = t(c, x, y)$, wenn

(a) $a, b, d \in R;\ c \in R'$,

(b) $a, c \in R;\ b, d \in R'$ und $\bar{a} \neq \bar{c}$,

(c) $a, b \in R;\ c, d \in R'$,

(d) $a \in R;\ b, c, d \in R'$,

(e) $a, b, c, d \in R$ und $\bar{a} \neq \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$, $y \in R'$.

Satz 9. *Seien $T = (R, R', t)$ ein erweiterter lokaler Ternärring, $\mathscr{T} = (R, t \mid R)$ der lokale Ternärring mit vollständigem Ideal R_0, $\mathscr{T}' = (R/R_0, t')$ der Restklassen-Ternärkörper und Q, Q' aus Definition 12. Definieren wir t_1 durch $t_1(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \overline{t(a, b, c)}$ für alle $(a, b, c) \in Q'$, dann ist $T_1 = (R/R_0, \{R'\}, t_1)$ ein erweiterter Ternärkörper.*

Beweis. Es genügt zu beweisen, daß die Gleichheiten 11.2 bis 11.4 gelten.

ad 11.2. Gegeben seien $\bar{b}, \bar{c} \in R/R_0$. Dann ist $t_1(\bar{u}, \bar{b}, \bar{c}) = \overline{t(u, b, c)}$. Nach (2) (a) aus der Definition 12 gilt $t(u, b, c) \in \bar{b}$ und daraus folgt $t_1(\bar{u}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{b}$.

Die Eigenschaften 11.3 und 11.4 werden in ähnlicher Weise bewiesen, indem wir (2) (b) und (2) (c) aus der Definition 12 anwenden.

Bemerkung 6. Sei $T = (R, R', t)$ ein erweiterter lokaler Ternärring und $T_1 = (R/R_0, \{R'\}, t_1)$ ein erweiterter Ternärkörper vom Satz 9. Für die Abbildung $\varphi : T \to T_1$, welche durch $a^\varphi = \bar{a}\ \forall a \in Q$ bestimmt ist, gilt $[t(a, b, c)]^\varphi = \overline{t(a, b, c)} = t_1(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = t_1(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi)$ für alle a, b, c aus Q.

Satz 10. *Seien $T = (R, R', t)$ ein erweiterter lokaler Ternärring und R_0 ein vollständiges Ideal im lokalen Ternärring $\mathscr{T} = (R, t \mid R)$. Dann besitzen die Mengen R_0, R' dieselbe Mächtigkeit.*

Beweis. Sei $r \in R_0$. Nach K_3'' 1(a) existiert ein einziges Element $w \in Q$, wo $Q = R \cup R'$ derart, daß $t(w, r, 1) = t(w, 0, 0)$ ist. Dabei muß $w \in R'$ gelten. Wird $r^\psi = w \Leftrightarrow t(w, r, 1) = t(w, 0, 0)$ gesetzt, so ist ψ eine Abbildung von R_0 in R'.

Gegeben sei ein beliebiges $w \in R'$ und sei $t(w, 0, 0) = r'$ gesetzt. Nach (2) (a) aus der Definition 12 folgt $r' \in R_0$. Für jedes r, wo $r' = t(w, r, 1)$, gilt nach (2) (a) auch $r \in R_0$. Da $\mathscr{T}$ ein Ternärring ist, gilt nach K_1 $t(0, r, 1) = 1\ \forall r \in R$. Nach K_4'' (a) existiert ein einziges Paar $(r, 1) \in Q \times Q$, für welches $t(w, r, 1) = r'$, $t(0, r, 1) = 1$ ist und somit auch ein einziges r. Dann ist $r^\psi = w$. Die Abbildung ψ ist eine bijektive Abbildung der Menge R_0 auf R'.

Definition 13. Ein erweiterter lokaler Ternärring $T = (R, R', t)$, wo $Q = R \cup R'$, heißt ein *erweiterter H-Ternärring*, wenn gilt:

(1) Für jede a, b, c, d aus Q mit $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$, wo $a \in R' \Rightarrow b \in R'$ und $c \in R' \Rightarrow$ $\Rightarrow d \in R'$ gilt, gibt es solche verschiedene Elemente x_1, x_2 aus Q, daß $t(x_i, a, b) =$ $= t(x_i, c, d)$, $i \in \{1, 2\}$.

(2) Für jede a, b, c, d aus Q mit $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$ schreiben wir

($*$) $b = t(a, m_i, k_i)$, $d = t(c, m_i, k_i)$,

($**$) $a = t(b, m_i, k_i)$, $c = t(d, m_i, k_i)$

mit Unbekannten m_i, k_i für $i \in \{1, 2\}$.

(a) Falls $a, b \in R$ ist, dann existieren entweder zwei verschiedene Paare $(m_i, k_i) \in$ $\in R \times R$, für die ($*$) gilt oder es existieren zwei verschiedene Paare $(m_i, k_i) \in R \times R'$, für die ($**$) gilt.

(b) Falls $a \in R'$, $b \in R$ ist, dann existieren entweder zwei verschiedene Paare $(m_i, k_i) \in R \times R$, für die ($*$) gilt oder $(m_i, k_i) \in R' \times R'$, für die ($**$) gilt.

(c) Falls $a, b \in R'$ ist, dann existieren entweder zwei verschiedene Paare $(m_i, k_i) \in$ $\in R \times R'$, für die ($*$) gilt oder $(m_i, k_i) \in R' \times R'$, für die ($**$) gilt.

Satz 11. *Es sei $T = (R, R', t)$ ein erweiterter H-Ternärring. Erfüllen die Elemente a, b, c, d, x_1, x_2 aus Q die Bedingung* (1) *aus der Definition* 13 *und gilt dabei entweder $a \neq c$ oder $b \neq d$, so ist $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$.*

Beweis. Wegen $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$ und $a \in R' \Rightarrow b \in R'$, $c \in R' \Rightarrow d \in R'$ ergibt sich für Elemente a, b, c, d drei folgende Möglichkeiten: a) $a, b, c, d \in R$, b) $a, c \in R$; $b, d \in R'$, c) $a, b, c, d \in R'$.

Nehmen wir an, daß $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ gilt und setzen wir $y_1 = t(x_1, a, b)$, $y_2 = t(x_2, c, d)$.

1. Es seien x_1, x_2 aus R.

a) Nehmen wir an, daß $a, b, c, d \in R$. Da $\mathcal{T} = (R, t \mid R)$ ein lokaler Ternärring ist und $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ gilt, gibt es nach K_4' ein einziges Paar (u, v) aus $R \times R$ mit $y_1 =$ $= t(x_1, u, v)$, $y_2 = t(x_2, u, v)$. Gleichzeitig gilt aber $y_1 = t(x_1, a, b) = t(x_1, c, d)$ und $y_2 = t(x_2, a, b) = t(x_2, c, d)$ nach (1) aus Definition 13. Daraus folgt $u = a = c$ und $v = b = d$, was ein Widerspruch ist. Es gilt $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$.

b) Es seien a, c aus R und b, d aus R'. Nach (2) (b) aus Definition 12 folgt $y_1 =$ $= t(x_1, a, b) \in \bar{a}$ und $y_2 = t(x_2, c, d) \in \bar{c}$. Dies bedeutet, daß $y_1, y_2 \in R$ und $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$. Wegen $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ und $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$, $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ gibt es nach K_4'' (e) ein einziges Paar (u, v) derart, daß $y_1 = t(x_1, u, v)$, $y_2 = t(x_2, u, v)$ ist. Daraus ergibt sich ganz ähnlich wie im Falle a), daß $a = c$ und $b = c$, also wieder ein Widerspruch.

c) Es seien a, b, c, d aus R'. Nach (2) (b) von der Definition 12 erhält man $y_1, y_2 \in$ $\in R'$. Wegen $x_1, x_2 \in R$ und $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ gibt es nach K_4'' (b) ein eniziges Paar (u, v) mit $y_1 = t(x_1, u, v)$, $y_2 = t(x_2, u, v)$. Daraus folgt $a = c$, $b = d$, also ein Widerspruch.

2. Nehmen wir an, daß $x_1 \in R$, $x_2 \in R'$.

a) Es seien a, b, c, d aus R. Dann gilt $y_1 = t(x_1, a, b) \in R$ und nach (2) (a) von der Definition 12 folgt $y_2 = t(x_2, a, b) \in \bar{a}$ also $y_2 \in R$. Wegen x_1 $y_1, y_2 \in R$ und $x_2 \in R'$

gibt es nach K_4'' (a) ein einziges Paar (u, v) mit $y_1 = t(x_1, u, v)$, $y_2 = t(x_2, u, v)$ und daraus ergibt sich $a = c$, $b = d$.

b) Es seien a, c aus R und b, d aus R'. Nach (2) (b) von der Definition 12 erhält man $y_1 = t(x_1, a, b) \in \bar{a}$, also $y_1 \in R$. Nach (2) (c) aus Definition 12 fogt dann $y_2 = t(x_2, c, d) \in R'$. Wegen $x_1, y_1 \in R$ und $x_2, y_2 \in R'$ gibt es nach K_4'' (c) ein einziges Paar (u, v) mit $y_1 = t(x_1, u, v)$, $y_2 = t(x_2, u, v)$ und folglich ergibt sich $a = c$, $b = d$.

c) Es seien a, b, c, d aus R'. Aus (2) (b) erhält man $y_1 = t(x_1, a, b) \in \bar{a}$, also $y_1 \in R'$. Nach (2) (c) folgt dann $y_2 \in R'$. Wegen $x_1 \in R$ und $x_2, y_1, y_2 \in R'$ gibt es nach K_4'' (d) ein eniziges Paar (u, v) mit $y_1 = t(x_1, a, b)$, $y_2 = t(x_2, c, d)$ und daraus erhalten wir $a = c$, $b = d$.

3. Ist $x_2 \in R'$ und $x_1 \in R$, so führen wir den Beweis durch Vertauschung der Elemente x_1, x_2 ganz ähnlich wie im Falle 2 durch.

Satz 12. *Sei $T = (R, R', t)$ ein erweiterter H-Ternärring und a, b, c, d Elemente aus Q mit $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$, wobei entweder $a \neq c$ oder $b \neq d$ gilt. Erfüllen die Paare (m_1, k_1), (m_2, k_2) aus $Q \times Q$ die Forderung (2) der Definition* 13, *dann gilt $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$, $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$.*

Beweis. (a) Seien $a, b \in R$ und folglich auch $c, d \in R$.

α) Nehmen wir an, daß zwei verschiedene Paare $(m_i, k_i) \in R \times R$ existieren, für die $(*)$ gilt und sei $\bar{m}_1 \neq \bar{m}_2$. Da $\mathcal{T} = (R, t \mid R)$ ein lokaler Ternärring ist, existiert nach K_3' ein einziges Element $x \in R$ derart, daß $t(x, m_1, k_1) = t(x, m_2, k_2)$ gilt. Nach $(*)$ ist $t(a, m_1, k_1) = t(a, m_2, k_2)$, $t(c, m_1, k_1) = t(c, m_2, k_2)$. Somit ist $x = a = c$ und auch $b = d$, was auf einen Widerspruch führt. Folglich gilt $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$. Nach Satz 6 ist die Abbildung $x \to \bar{x}\ \forall x \in R$ ein kanonischer Homomorphismus des lokalen Ternärringes $\mathcal{T}$ auf den Resklassen-Ternärring $\mathcal{T}' = (R/R_0, t')$. Nach $(*)$ ist dann $t'(\bar{a}, \bar{m}_1, \bar{k}_1) = t'(\bar{a}, \bar{m}_2, \bar{k}_2)$. Wegen $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$ gilt $t'(\bar{a}, \bar{m}_1, \bar{k}_1) = t'(\bar{a}, \bar{m}_1, \bar{k}_2)$. Aus K_2 folgt dann $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$.

β) Es seien $(m_i, k_i) \in R \times R'$ zwei verschiedene Paare, für die $(**)$ gilt. Dann ist $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$. Nach $(**)$ gilt $t(b, m_1, k_1) = t(b, m_2, k_2)$. Nach Satz 9 ist $T_1 = (R/R_0, \{R'\}, t_1)$ ein erweiterter Ternärkörper und es gilt $t_1(\bar{b}, \bar{m}_1, \bar{k}_1) = t_1(\bar{b}, \bar{m}_2, \bar{k}_2)$. Nach 11.3 gilt dann $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$.

(b) Seien $a \in R'$, $b \in R$ und folglich auch $c \in R'$, $d \in R$.

α) Es seien $(m_i, k_i) \in R \times R$ zwei verschiedene Paare, für die $(*)$ gilt. Dann ergibt sich $t(a, m_1, k_1) = t(a, m_2, k_2)$ und daher $t_1(\bar{a}, \bar{m}_1, \bar{k}_1) = t_1(\bar{a}, \bar{m}_2, \bar{k}_2)$. Da T_1 ein erweiterter Ternäkörper ist und $a \in R'$, gilt nach 11.2 $t_1(\bar{a}, \bar{m}_1, \bar{k}_1) = \bar{m}_1 = t_1(\bar{a}, \bar{m}_2, \bar{k}_2) = \bar{m}_2$. Nehmen wir an, daß $\bar{k}_1 \neq \bar{k}_2$ gilt. Nach K_3'' 1 (a) gibt es ein einziges Element $x \in Q$ derart, daß $t(x, m_1, k_1) = t(x, m_2, k_2)$. Da $(*)$ gilt, folgt daraus, daß $x = a = c$, $b = d$ und somit ein Widerspruch.

β) Aus $(m_i, k_i) \in R' \times R'$ folgt unmittelbar $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$, $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$.

(c) Seien $a, b \in R' \times R'$ und folglich auch $c, d \in R' \times R'$.

α) Es gelte $(m_i, k_i) \in R \times R'$ und $(*)$. Falls $\bar{m}_1 \neq \bar{m}_2$ gilt, so folgt aus K_3'' 1 (b) und aus $(*)$ $a = c$, $b = d$, also ein Widerspruch.

β) Ist $(m_i, k_i) \in R' \times R'$, so $\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \bar{k}_1 = \bar{k}_2$.

Satz 13. *Ist $T = (R, R', t)$ ein erweiterter H-Ternärring, so ist $\mathcal{T} = (R, t \mid R)$ ein H-Ternärring.*

Beweis. Betrachten wir das vollständige Ideal R_0 von $\mathcal{T}$ und den Restklassen-Ternärring $\mathcal{T}' = (R/R_0, t')$ von der Definition 12. Es wird gezeigt, daß R_0 ein H-vollständiges Ideal ist, d. h., daß es die Bedingungen (1), (2) der Definition 7 befriedigt. Seien a, b, c, d Elemente aus R mit $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$.

ad (1) Es gelte $t(x, a, b) = t(x, c, d)$ mit $x \in R$. Falls $a = c$ und $b = d$ ist, dann gilt $t(y, a, b) = t(y, c, d)$ für alle $y \in R$. Nehmen wir an, daß entweder $a \neq c$ oder $b \neq d$ gilt. Nach Definition 13 existiert ein zu x verschiedenes Element $x' \in Q$ derart, daß $t(x', a, b) = t(x', c, d)$ gilt und nach dem Satz 11 ist $\bar{x}' = \bar{x}$, also ist $x' \in R$.

ad (2) Nehmen wir an, es existiert ein Paar $(x, y) \in R \times R$ derart, daß $b = t(a, x, y)$, $d = t(c, x, y)$ gilt. Im Falle von $a = c$ und $b = d$ gelten die vorigen Gleichheiten für alle Paare (x, y) aus $R \times R$. Nehmen wir an, es gilt entweder $a \neq c$ oder $b \neq d$ und gleichzeitig $a = t(b, x_1, y_1)$, $c = t(d, x_1, y_1)$ für $(x_1, y_1) \in R \times R'$. Nach K_3'' 2 (a) existiert ein einziges Paar von $(u, v) \in Q \times Q$ derart, daß $v = t(u, x, y)$, $u = t(v, x_1, y_1)$. Dann gilt $a = u = c$, $b = v = d$, was einen Widerspruch enthält. Nach (2) (a) aus Definition 13 existiert also ein zu (x, y) verschiedenes Paar $(x', y') \in R \times R$ mit $b = t(a, x, y)$, $d = t(c, x, y)$.

Satz 14. *Jeder erweiterter Ternärkörper ist ein erweiterter H-Ternärring.*

Beweis. Es sei $T = (R, u, t)$ ein erweiterter Ternärkörper und setzen wir $Q = R \cup \{u\}$. Zunächst wird gezeigt, daß T ein erweiterter lokaler Ternärring ist. Nach 11.1 ist $\mathcal{T} = (R, t \mid R)$ ein Ternärkörper und nach dem Beispiel 1 ist $\mathcal{T}$ ein lokaler Ternärring mit vollständigem Ideal $\{0\}$. Mithin gilt $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a = b$. Die Forderungen (2) (a) bis (2) (c) der Definition 12 gelten nach 11.2 bis 11.4. Wir wollen beweisen, daß in T auch die Forderungen K_3'', K_4'' der Definition 12 befriedigt sind.

ad K_3'' 1 (a). Es seien a, b, c, d aus R gegeben, wo $a = c$, $b \neq d$. Nach 11.2 gilt $t(u, a, b) = a = c = t(u, c, d)$. Nehmen wir an, daß es $x \in R$ gibt mit $t(x, a, b) = t(x, c, d)$. Dann gilt $t(x, a, b) = t(x, a, d) \in R$ und nach K_2 folgt $b = d$, was ein Widerspruch ist.

(b) Es seien a, b, c, d aus Q gegeben mit $a, c \in R$, $b = d = u$ und $a \neq c$. Nach 11.4 ist $t(u, a, u) = t(u, c, u) = u$. Nehmen wir an, daß es $x \in R$ gibt mit $t(x, a, u) = t(x, c, u)$. Aus 11.3 folgt $t(x, a, u) = a = t(x, c, u) = c$, also ein Widerspruch.

2. (a) Es seien a, b, c, d aus Q gegeben mit $a, b \in R$, $c \in Q$, $d = u$. Nehmen wir an, daß $x = t(y, c, d)$, $y = t(x, a, b)$ und es sei $y = u$. Dann erhält man nach 11.4 $x = t(u, c, u) = u$ und $y = t(u, a, b) = a$. Damit ist ein Widerspruch erreicht. Ist y aus R, dann nach 11.2 gilt $x = t(y, c, u) = c$ und gleichzeitig $y = t(c, a, b)$.

(b) Es seien a, b, c, d aus Q gegeben mit $a \in R$ und $b = c = d = u$. Dann gilt $u = t(u, a, u)$, $u = t(u, u, u)$.

ad K_4''. Es seien $a, b, c, d \in Q$ und nehmen wir an, daß $b = t(a, x, y)$, $d = t(c, x, y)$ gilt.

(a) Seien $a, b, d \in R$ und $c = u$. Ist $y = u$, dann folgt $d = t(u, x, u)$, also ein Widerspruch. Es sei $y \in R$. Nach der Definition von t folgt, daß auch $x \in R$ ist. Nach 11.2 gilt $d = t(u, x, y) = x$ und somit $b = t(a, d, y)$. Nach K_2 gibt es ein einziges $y \in R$ dieser Eigenschaft.

(b) Seien $a, c \in R$ und $b = d = u$. Gilt $y \in R$, $x \in R$, dann ergibt sich $t(a, x, y) \in R$ und $u = t(a, x, y)$, was einen Widerspruch enthält. Für $y = u$ ergibt sich $u = t(a, x, u) = x = t(c, x, u)$.

(c) Seien $a, b \in R$ und $c = d = u$. Gilt $y \in R$, $x \in R$, dann ist $d = u = t(u, x, y) = x$, was ein Widerspruch ist. Nehmen wir an, daß $y = u$. Dann erhält man $b = t(a, x, u) = x$ und $d = u = t(u, b, u)$.

(d) Seien $a \in R$ und $b = c = d = u$. Gilt $y \in R$, $x \in R$, dann folgt $d = u = t(u, x, y) = x$, was ein Widerspruch ist. Gilt $y = u$, dann erhält man $b = t(a, x, u) = u$ und $d = t(u, b, u)$.

(e) Seien $a, b, c, d \in R$ mit $a \neq c$, $b = d$, $y = u$. Dann gilt $b = t(a, x, u) = x = t(c, x, u) = d$.

Nun beweisen wir, daß die Bedingungen (1), (2) der Definition 13 befriedigt sind.

ad (1) Gilt $a = c$, $b = d$ für Elemente a, b, c, d aus Q, so ist die Gleichheit $t(x, a, b) = t(x, c, d)$ für jedes Element $x \in Q$ erfüllt.

ad (2) Nehmen wir an, daß $a = c$, $b = d$ für Elemente a, b, c, d aus Q gilt.

(a) Sind a, b aus R, so existiert nach K_2 zu jedem $m \in R$ ein Element $k \in R$ derart, daß $b = t(a, m, k)$ ist. Dann gilt auch $d = t(c, m, k)$.

(b) Es seien $a = u$, $b \in R$. Nach 11.2 gilt $b = t(u, b, k) = t(a, b, k)$, $d = t(c, b, k)$ für alle $k \in R$.

(c) Gilt $a = b = u$, dann folgt nach 11.4 $b = t(a, m, u)$, $d = t(c, m, u)$ für alle $m \in R$.

Literatur

[1] *Hall, M.:* Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc., *54*, 229—277 (1943).

[2] *Klingenberg,* W.: Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Z., 384—406 (1954).

[3] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrien mit Homomorphismus, Math. Ann., *132*, 180—200 (1956).

[4] *Lambek, J.:* Lectures on rings and modules, Toronto, London, 1966.

[5] *Pickert, G.:* Projektive Ebenen, Springer-Verlag, 1955.

[6] *Stevenson, F. W.:* Projective planes, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1972.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UP).