G. Ja. Rotkovič

О дизъюнктно полных архимедовых полуупорядоченных группах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 27 (1977), No. 4, 523–527

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101489

Czechoslovak Mathematical Journal, 27 (102) 1977, Praha

О ДИЗЪЮНКТНО ПОЛНЫХ АРХИМЕДОВЫХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

Г. Я. Роткович, Ленинград

(Поступило в редакцию 26/VI 1975 г.)

1. Введение. Исследованием связей между различными видами полноты в l-группах (полуупорядоченных группах, решеточно упорядоченных группах) занимались С. Бернау, А. И. Векслер, В. А. Гейлер, П. Конрад, Я. Якубик, автор и другие математики. Для случая, когда l-группа является архимедовой векторной решеткой окончательные результаты были получены А. И. Векслером и В. А. Гейлером в [5]. Для l-групп Я. Якубик в [13] и автор в [10] независимо друг от друга показали, что полнота l-группы равносильна тому, что она является σ-полной и дизъюнктно полной. В этой работе результаты А. И. Векслера и В. А. Гейлера переносятся на случай произвольной архимедовой l-группы, причем теорема 3 является усилением названного выше результата Я. Якубика и автора. Но доказательства совершенно иные, чем в упомянутых выше работах. В частности, в [5] сначала получен аналог теоремы 2 и с его помощью доказывается аналог теоремы I, а в данной работе наоборот. Отчасти это происходит потому, что нельзя использовать некоторые специфические свойства векторных решеток.

2. Некоторые определения и понятия. Будем использовать, в основном, терминологию и обозначения из [6] и [8]. Те понятия, которые не разъяснены в работе, имеют одинаковый смысл для l-групп и для векторных решеток и их можно найти в книге [6].

Группа X называется l-группой (полуупорядоченной группой, решеточно упорядоченной группой), если она является одновременно решеткой, в которой из $x > y$ следует $x + z > y + z$ для любого $z \in X$.

Архимедова l-группа является абелевой (см., например, [3], гл. XIV), что оправдывает применяемую здесь аддитивную запись групповой операции.

В l-группе X элемент x называется *полулинейным,* если для всякого $y \in X$, $\mathbf{0} < y \leqq x$ существует $z \in X$ такой, что $\mathbf{0} < 2z \leqq y$. Если всегда можно подобрать z так, чтобы выполнялось точное равенство, то x называется *линейным*.

Элемент $x \in X$ дизъюнктный всем полулинейным элементам, называется *d-элементом*. Если l-группа не содержит полулинейных элементов, т.е. состоит из d-элементов, то она называется *сингулярной.*

Если в l-группе любое (ограниченное) дизъюнктное множество имеет супремум и инфимум, то она называется *латерально* (*дизъюнктно*) *полной.* Понятие латеральной полноты было введено П. Конрадом в [7], понятие дизъюнктной полноты А. И. Векслером в [4].

Компонентой l-группы X называется всякое множество $X_1 \subset X$ являющееся дизъюнктным дополнением какого-то $E \subset X$, т.е. $X_1 = \{x \in X : |x| \wedge |e| = \mathbf{0}, \forall e \in E\}$. Наименьшая компонента X_x содержащая данный элемент x, называется *главной* или *порожденной элементом x*. *Проекцией* элемента x в компоненту X_1 называется такой $x_1 \in X_1$ (если он существует), что $(x - x_1)\, dX_1$. Если в l группе X существует проекция любого элемента во всякую (главную) компоненту, то X называется *l-группой с проекциями* (*в главную компоненту*).

Латерально полная l-группа с проекциями называется *ортополной.* Понятие ортополноты было введено С. Бернау в [1].

3. Связь между латеральной и дизъюнктной полнотой с существованием проекций.

Лемма 1. *Для архимедовой латерально полной группы X ее пополнение по Дедекинду* (*K-пополнение*) *$\hat{X}$ тоже латерально полно.*

Доказательство. Непрерывные функции, отображающие топологическое пространство P в расширенное множество вещественных чисел, которые могут принимать на нигде не плотных множествах из P значения $\pm\infty$, будем называть *расширенными.* Как известно (см., например, [2], [7]), архимедова l-группа X алгебраически и решеточно изоморфна l-группе расширенных функций на экстремально несвязном бикомпакте $Q = Q(X)$, являющемся стоуновым пространством булевой алгебры компонент из X (упорядочение по включению). Бикомпакт Q будем называть *каноническим для l-группы X.* Соответствующий изоморфизм будем называть *реализацией или представлением X на ее каноническом бикомпакте.* Реализовать l-группу на Q можно различными способами. Образ элемента $x \in X$ в данной реализации будем обозначать $x(\cdot)$, а сам X имеет образом $X(\cdot)$. *Носителем* $x \in X$ будем называть множество

$$Q_x = \mathrm{cl}\{q \in Q : x(q) \neq 0\}\,.$$

Из латеральной полноты X следует, что для любого $q \in Q$ найдется $x(\cdot) \in X_+(\cdot)$ такой, что $x(q) > 0$. В самом деле, для любой окрестности U точки q найдется точка $q_\alpha \in U$ и функция $x_\alpha(\cdot) \in X_+(\cdot)$ такие, что $x_\alpha(q_\alpha) > 0$. Подберем дизъюнктную систему $\{x_\alpha\}$ такую, что $\mathrm{cl}(\bigcup_\alpha Q_{x_\alpha}) \supset U$. Умножая затем в случае необходимости x_α на подходящие $n_\alpha \in N$, получим, что $x(\cdot) = \sup\{x_\alpha(\cdot)\}$ больше нуля во всех точках $Q_x \supset U$.

Также из латеральной полноты следует, что всякое открыто-замкнутое множество из Q является носителем элемента из X.

Обозначим через $C_\infty(Q)$ условно полную l-группу всех расширенных функций на Q, она является даже расширенным K-пространством (см., например, [6]).

Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого $x(\cdot) \in C_\infty^+(Q)$ найдется $y(\cdot) \in X(\cdot)$ такой, что $x(\cdot) \leqq y(\cdot)$. Пусть

$$Q_\infty = \{q \in Q : x(q) = +\infty\},$$

$Q_n = \mathrm{cl}\,\mathrm{int}\,\{q \in Q : n + 1 \geqq x(q) > n\}$. В силу экстремальной несвязности все Q_n попарно не пересекаются. По построению $Q_x = \mathrm{cl}\,(\bigcup_{n \in N} Q_n) = Q_\infty \cup \cup (\bigcup_{n \in N} Q_n)$.

Для каждой точки $q \in Q_n$ найдется $y_q \in X_+$, для которой $y_q(q) > 1$; $y_q(\cdot) = 0$ на $Q \setminus Q_n$. В силу компактности Q_n существует $y_n = y_{q_1} \vee \ldots \vee y_{qn} \in X$ такой, что $y_n(q) \geqq 1$ во всех точках из Q_n. Подбирая подходящие $m_n \in N$ получим, что $y_n(q) = m_n\, y_n(q) \geqq x(q)$ во всех $q \in Q_n$. В силу латеральной полноты $y = \sup\{y_n : n \in N\} \in X$. По построению $x(\cdot) \leqq y(\cdot)$, что и завершает доказательство леммы.

Теорема 1. *Для архимедовой l-группы X понятия латеральной полноты и ортополноты совпадают.*

Доказательство. В силу определения из ортополноты во всякой l-группе следует латеральная полнота. Следовательно, нужно показать, что из латеральной полноты архимедовой l-группы X следует ортополнота. В каждой компоненте $X_1 \subset X$ можно выбрать (используя лемму Цорна) полную систему попарно дизъюнктных положительных элементов $\{x_\alpha\}$. В силу латеральной полноты в X существует $x = \sup\{x_\alpha\}$. По построению x порождает компоненту X_1. Значит, все компоненты латерально полной l-группы — главные. Таким образом, достаточно показать, что X является группой с проекциями в главную компоненту.

Из теоремы 2.11 из [12] несложно выводится, что сингулярная подгруппа X'' группы X является полной. Как следует из теоремы 1 из [10] X является прямой суммой двух подгрупп: X', состоящей из полулинейных элементов, и сингулярной X'', т.е. любой $x \in X$ единственным образом представляется в виде $x = x' + x''$, $x' \in X'$, $x'' \in X''$. Таким образом, не уменьшая общности, можно считать, что $X = X'$, т.е. не содержит d-элементов.

В силу леммы 1 $\hat{X}$ является расширенным K-пространством.

Так как существование проекций в компоненту у $x \in X$ равносильно существованию проекций у x_+ и x_-, то в дальнейшем рассуждении ограничимся рассмотрением положительных элементов. Пусть y_x — проекция произвольного элемента $y \in X_+$ в компоненту $\hat{X}_x$. В силу свойств K-пополнения существует $z \in X_x$ такой, что $\mathbf{0} < y_x \leqq z$. Тогда $y_x = y \wedge z \in X$ и является проекцией y в X. Теорема доказана.

Теорема 2. *Дизъюнктно полная архимедова l-группа X является группой с проекциями.*

Доказательство. Как показал П. Конрад ([7], теорема 3.5) у X существует единственным образом определенное латеральное пополнение $X^{\wedge}$ т.е. наименьшая латерально полная l-группа, содержащая l-подгруппу, алгебраически и решеточно изоморфную X. При этом из архимедовости X следует архимедовость $X^{\wedge}$. Из дизъюнктной полноты X несложно выводится, что она является идеалом в $X^{\wedge}$. Из этого и теоремы 1 следует, что X является группой с проекциями.

4. Основная теорема. Напомним еще некоторые понятия. В l-группе X последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется (r)-*фундаментальной,* если существует $u \in X_+$ и $N \ni m_n \to +\infty$ такие, что $m_n|x_{n+p} - x_n| \leqq u$ для любого $p \in N$. Последовательность $\{x_n\}$ называется (r)-*сходящейся к* $x \in X$ (с регулятором u), если $m_n|x - x_n| \leqq u$. Архимедова l-группа называется (r)-*полной,* если в ней всякая (r)-фундаментальная последовательность (r)-сходится. Известно, что σ-полная l-группа (r)-полна, а всякий l-идеал (r)-полной l-группы сам (r)-полон.

Лемма 2. *Латерально полная (r)-полная l-группа X — полна.*

Доказательство. В силу определения (r)-полноты X — архимедова. А тогда, как уже отмечалось в доказательстве теоремы 1, X является прямой суммой подгрупп X', состоящей из полулинейных элементов, и сингулярной X''. Полнота X'' была доказана Я. Якубиком ([12], теорема 2.12). Следовательно, чтобы доказать лемму, достаточно доказать, что X' — полна.

Покажем сначала, что в X' все полулинейные элементы — линейны. Поскольку линейность x равносильна линейности $|x|$, то будем в следующем ниже рассуждении предполагать, что все рассматриваемые элементы положительны. Пусть $x, x_n \in X'_+$ $(n \in N)$, причем x — произвольный, а x_n таковы, что $\mathbf{0} < 2^n x \leqq x$ и $X_x = X_{x_n}$. Обозначим через $x_{nm} = x - x \wedge 2m x_n$, через X_{nm} компоненту в $X_{x_{nm}}$, являющуюся дизъюнктным дополнением к $X_{x_{nm+1}}$. В силу теоремы 1 X_{nm} — компонента с проекциями, следовательно, $y_{nm} = \Pr_{X_{nm}} x_n$ существует в X. Поскольку все y_{nm} попарно дизъюнктны, то в X при всяком $n \in N$ существует и $y_n = \sup\{2m y_{nm} : m \in N\}$. Покажем, что последовательность $\{y_n\}$ — (r)-сходится к x с регулятором x. Реализуем X так, чтобы $x(q) = 1$ на своем носителе. Тогда $1 \geqq 2m y_{nm}(q) > 1 - 1/2^{n-1}$ на носителе $y_{nm}(\cdot)$ для всех $y_{nm} \neq \mathbf{0}$. Поскольку $y_{nm} = \mathbf{0}$, если $2m < n$, то $1 \geqq y_n(q) > 1 - 1/2^n$ на своем носителе. Последнее неравенство и означает, что $\{y_n\}$ (r)-сходится к x. Пусть теперь $z = \sup\{m y_{nm} : m \in N\}$. По построению $2z_n = y_n$ и последовательность $\{z_n\}$ (r)-фундаментальна. В силу (r)-полноты эта последовательность (r)-сходится к $z \in X$. Ясно, что $2z = x$. Итак, x — линеен. В силу произвольности x и все элементы из X — линейны.

По теореме 1 из [11] X' является векторной решеткой. В силу тоеремы 4 из [5] (r)-полная дизъюнктно полная векторная решетка является K-пространством, что и доказывает лемму.

Теорема 3. *Для l-группы X равносильны условия*:

(I) *X является полной*;

(II) *X является (r)-полной и дизъюнктно полной.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только импликация (II) $\Rightarrow$ (I).

Итак, пусть X – дизъюнктно полная (r)-полная l-группа. Она является l-идеалом в своем латеральном пополнении $X^{\wedge}$, которое по лемме 2 является полной l-группой. Хорошо известно, что полная l-группа представляется в виде прямой суммы K-пространства и полной сингулярной l-группы. Подгруппы группы X, сингулярная X'' и X', состоящая из полулинейных элементов, оказываются сами полными как l-идеалы полных l-групп. Тогда и сама X является полной, как прямая сумма полных групп.

Замечание. Примеры из [11] показывают, что (r)-полная l-группа с проекциями не обязана быть полной. При этом могут быть неполными и сингулярная подгруппа X'' и подгруппа X', состоящая из полулинейных элементов.

В заключение приношу благодарность В. А. Гейлеру и А. И. Векслеру, внимательно прочитавшим рукопись, а также рецензенту журнала, чьи замечания способствовали улучшению изложения.

Литература

[1] *S. Bernau:* Ortocompletion of a lattice groups. Proc. London Math. Soc. 1966, *16*, № 1, 107—130.

[2] *S. Bernau:* Unique representation of archimedean lattice groups and normal archimedean lattice rings. Proc. London Math. Soc. 1965, *15*, № 4, 599—631.

[3] *Г. Биркгоф:* Теория структур. ИЛ, М., 1952.

[4] *А. И. Векслер:* О банаховой и дедекиндовой полноте пространств непрерывных функций, векторных структур и максимальных колец частных, ДАН СССР, 1971, *196*, № I, 20—23.

[5] *А. И. Векслер* и *В. А. Гейлер:* О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств. Сибирск. матем. журн. 1972, *13*, № I, 43—51.

[6] *Б. З. Вулих:* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., 1961.

[7] *P. Conrad:* The lateral completion of a lattice-ordered group. Proc. London Math. Soc. 1969, *19*, № 3, 444—480.

[8] *Г. Я. Роткович:* О полуупорядоченных группах. Уч. зап. Лен. педаг. ин-та, 1971, *404*, 439—451.

[9] *Г. Я. Роткович:* О σ-полных решеточно упорядоченных группах. XXУП Герценовские чтения. Математика. Лен. педаг. ин-т, Л., 1974.

[10] *Г. Я. Роткович:* О σ-полных решеточно упорядоченных группах. Czechoslovak Math. J. 1975, *25*, 279—281.

[11] *Г. Я. Роткович:* Об относительно равномерно полных полуупорядоченных группах. Сб. „Функциональный анализ", 2, Ульяновск, 1974.

[12] *J. Jakubík:* On σ-complete lattice ordered groups. Czechoslovak Math. J. 1973, *23*, 164—174.

[13] *J. Jakubík:* Conditionally ortogonally complete l-groups. Math. Nachr. 1975, *65*, 153—162.

Адрес автора: Ленинград, 194017, Дрезденская ул., 26, кв. 27, СССР