Czechoslovak Mathematical Journal

Radu Rosca; Lieven Vanhecke

Variétés spatiales de codimension deux immergées dans un espace de Minkowski muni d'une connexion principale

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 27 (1977), No. 3, 343–355

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101472

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1977

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Czechoslovak Mathematical Journal, 27 (102) 1977, Praha

VARIÉTÉS SPATIALES DE CODIMENSION DEUX IMMERGÉES DANS UN ESPACE DE MINKOWSKI MUNI D'UNE CONNEXION PRINCIPALE

R. ROSCA, L. VANHECKE, Heverlee

(Reçu le 3. février 1975)

Soit $V^n_{\mathscr{L}}$ une C^∞-variété lorentzienne de dimension n et soit $T_x(V^n_{\mathscr{L}})$ l'espace tangent en chaque point $x \in V^n_{\mathscr{L}}$. On peut écrire $T_x(V^n_{\mathscr{L}}) = H_x(V^n_{\mathscr{L}}) \oplus S_x(V^n_{\mathscr{L}})$ où $H_x(V^n_{\mathscr{L}})$ et $S_x(V^n_{\mathscr{L}})$ sont respectivement un 2-plan de Minkowski et un $(n-2)$-plan spatial. Les vecteurs isotropes réels ξ_a $(a = 1, n) \in H_x(V^n_{\mathscr{L}})$ et les vecteurs spatiaux ξ_r $(r = 2, 3, \ldots, n-1) \in S_x(V^n_{\mathscr{L}})$ forment une base vectorielle *quasi-orthonormée* $\mathscr{R}_\xi$ dont la base duale $\mathscr{R}^*_\xi$ est $\{\alpha^A\}$ $(A = 1, 2 \ldots, n)$. Les 1-formes de connexion $\alpha^A_B = l^A_{BC}\alpha^C$ sur le fibré principal $\mathscr{F} = \bigcup \mathscr{R}_\xi$ qui sont du type α^r_1 et α^r_n $(\alpha^r_n = \alpha^1_r)$ sont dénommées *mixtes*. Une connexion ∇_p telle que $\alpha^r_1 = \bar{k}_r\alpha^r$, $\alpha^1_r = k_r\alpha^r$ (ne pas sommer) a été dénommée dans un travail antérieur [9] une *connexion principale* et une pareille connexion ∇_p assure l'existence des *sous-variétés spatiales de codimension deux*.

Le présent ouvrage est consacré à l'étude des pareilles variétés spatiales qui sont immergées dans un *espace de Minkowski* $\mathscr{M}^n$ structuré par une connexion ∇_p (noté par $\mathscr{M}^n_p$). Si $f : V^{n-2}_s \to \mathscr{M}^n_p$ est une telle immersion alors la connexion normale est triviale et f met en évidence deux champs normaux: le champ $\boldsymbol{X}$ (champ normal principal) qui définit toujours une section minimale et son associé $\tilde{\boldsymbol{X}}$ qui est homothétique à un champ concourant dans le cas où l'immersion f est ombilicale.

On considère ensuite la 1-*forme de position* $\psi \equiv \langle \boldsymbol{x}, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle$ et l'on montre que ψ est *harmonique* si et seulement si la composante tangentielle $\boldsymbol{T}$ du vecteur de position est de divergence nulle sur V^{n-2}_s et $\Delta\psi = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{T}$ définit une homothétie infinitésimale. Dans le cas particulier où *l'immersion* f est *ombilicale*, elle est nécessairement non substantielle et ces qualités entraînent un ensemble de propriétés dont nous citerons ici les suivantes:

(i) la connexion induite ∇_p est équi-affine;
(ii) l'application de Gauss est conforme et V^{n-2}_s est einsteinienne;
(iii) la forme ψ est une forme propre de l'opérateur harmonique Δ.

Si $n = 2m$ on considère sur V_s^{n-2} une *structure presque symplectique* $S_p(\Omega)$ définie par $\Omega = \alpha^2 \wedge \alpha^3 + \ldots + \alpha^{n-2} \wedge \alpha^{n-1}$ et si J est l'isomorphisme $\bigcup T_x(\mathscr{M}_p^n) \to$ $\to \bigcup T_x^*(\mathscr{M}_p^n) : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y} \lrcorner\, \Omega$, on discute certaines propriétés liées à $S_p(\Omega)$ qui mettent en jeu les champs $\boldsymbol{T}$, $\tilde{\boldsymbol{T}} = J^{-1}(\psi)$ et les formes ψ et $\tilde{\psi} = J(\boldsymbol{T})$.

Enfin, en supposant que les variétés V_s^{n-2} en question, dont la métrique est définie négative, sont compactes et sans bord, on établit dans la dernière partie de cet ouvrage quelques *formules intégrales* du type de Stokes ou de Minkowski.

1. Soit $\mathscr{M}^n$ un *espace de Minkowski* de dimension n et de signature hyperbolique normale $(- - \ldots - +)$ et soit

$$F_q(\mathscr{M}^n) \equiv \{x, \xi_A;\ A, B, C = 1, 2, \ldots, n\}$$

le faisceau des repères *quasi-orthonormés* [2], [8] associés au point générique $x \in \mathscr{M}^n$. La base vectorielle $\{\xi_A\}$ d'un pareil repère, que nous notons par $\mathscr{R}_\xi \equiv$ $\equiv \{x, \xi_A\}$, est formée par deux vecteurs *isotropes* réels, soit ξ_1 et ξ_n, et par $n - 2$ vecteurs *spatiaux* normés ξ_r $(r, s, \ldots = 2, 3, \ldots, n - 1)$ qui sont tels que l'on a

(1) $$\langle \xi_1, \xi_n \rangle = 1\,, \quad \langle \xi_r, \xi_A \rangle = 0 \quad \text{pour} \quad r \neq A\,.$$

Si $T_x(\mathscr{M}^n)$ est l'espace tangent à $\mathscr{M}^n$ en x, on peut le décomposer suivant

(2) $$T_x(\mathscr{M}^n) = H_x(\mathscr{M}^n) \oplus S_x(\mathscr{M}^n)$$

où $H_x(\mathscr{M}^n) \equiv \{\xi_1, \xi_n\}$ est un 2-plan de Minkowski et $S_x(\mathscr{M}^n) \equiv \{\xi_r\}$ est un $(n - 2)$-plan spatial.

Si $\{\alpha^A\}$ est la base duale de $\{\xi_A\}$, l'élément linéaire dx de $\mathscr{M}^n$ s'écrit

(3) $$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \alpha^A \otimes \xi_A$$

et en vertu de (1) la métrique de $\mathscr{M}^n$ rapportée à $\{\alpha^A\}$ a pour expression

(4) $$\mathrm{d}s^2 = 2\alpha^1\alpha^n - \sum_r (\alpha^r)^2\,.$$

La connexion ∇ sur $\mathscr{M}^n$ est donnée par

(5) $$\nabla \xi_A = \alpha_A^B \otimes \xi_B$$

et de (1) et (5) on déduit

(6) $$\begin{gathered} \alpha_1^n = 0 = \alpha_n^1\,, \quad \alpha_1^1 + \alpha_n^n = 0\,, \\ \alpha_r^n - \alpha_1^r = 0\,, \quad \alpha_n^r - \alpha_r^1 = 0\,, \\ \alpha_s^r + \alpha_r^s = 0\,. \end{gathered}$$

Le premier et le second groupe d'équations de structure afférentes à $\mathscr{R}_\xi$ sont

$$d \wedge \alpha^A = \alpha^B \wedge \alpha_B^A\,, \quad d \wedge \alpha_B^A = \alpha_B^C \wedge \alpha_C^A \tag{7}$$

et la forme α_1^1 $(= -\alpha_n^n)$ est la *composante d'homothétie* (unique) de la connexion.

Dans [9] nous avons dénommé une connexion ∇ telle que les formes de connexion *mixtes* α_1^r et α_r^1 soient de la forme

$$\alpha_1^r = \bar{k}_r\alpha^r\,, \quad \alpha_r^1 = k_r\alpha^r\,, \quad \bar{k}_r, k_r \in \mathscr{D}(\mathscr{M}^n)\,, \quad \text{(ne pas sommer!)} \tag{8}$$

une *connexion principale.*

Poserons

$$k = \sum_r k_r\,, \quad \bar{k} = \sum_r \bar{k}_r \tag{9}$$

et noterons désormais par ∇_p et $\mathscr{M}_p^n$ respectivement la connexion ∇ définie par (8) et l'espace de Minkowski structuré par une telle connexion.

2. En vertu de (8) on a

$$d \wedge \alpha^1 = \alpha^1 \wedge \alpha_1^1\,, \quad d \wedge \alpha^n = -\alpha^n \wedge \alpha_1^1\,, \tag{10}$$

ce qui montre que les variétés spatiales définies par les deux covecteurs isotropes réels $(\alpha^a = 0,\ a = 1, n)$ existent toujours dans une $\mathscr{M}_p^n$. Elles seront notées par V_s^{n-2}.

Le *champ principal*

$$X = k\xi_1 - \bar{k}\xi_n \tag{11}$$

et son *associé*

$$\tilde{X} = k\xi_1 + \bar{k}\xi_n \tag{12}$$

sur $V_{\mathscr{L}}^n$, introduits dans [9], deviennent des champs normaux sur V_s^{n-2}. Nous les dénommons le *champ normal principal* et son *associé.* Un champ normal quelconque $Y \in H_x(V_s^n)$ étant défini par

$$Y = y^1\xi_1 + y^n\xi_n\,,$$

on trouve à l'aide de (5), (6) et (8)

$$\nabla Y = (dy^1 + y^1\alpha_1^1) \otimes \xi_1 + (dy^n - y^n\alpha_1^1) \otimes \xi_n + (y^1\bar{k}_r + y^n k_r)\,\alpha^r \otimes \xi_r \tag{13}$$

(Les formes et fonctions induites sur V_s^{n-2} par l'immersion $f: V_s^{n-2} \to \mathscr{M}_p^n$ sont notées par le même symbole.) Dans le cas où l'immersion $f: V_s^{n-2} \to \mathscr{M}_p^n$ est *ombilicale,* c'est-à-dire

$$\bar{k}_r = a\,, \quad k_r = b\,, \tag{14}$$

on voit facilement que

$$\nabla X = 0\,, \quad \nabla \tilde{X} + 2(n-2)\,ab\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{15}$$

La première relation montre, conformément à la définition [10], que *l'immersion est non substantielle* et la seconde exprime que $\{2(n-2)\,ab\}^{-1}\,\tilde{X}$ est *concourant* [10]. Il resulte aussitôt de (15) que l'application

$$\mathscr{A} : x \to x + tX\,, \quad t \in \mathscr{D}(V_s^{n-2})\,,$$

est une *sométrie*. De plus, un calcul facile montre que *l'application de Gauss* [7] est dans ce cas *conforme* d'oû l'on conclut que la variété V_s^{n-2} est *einsteinienne*.

Dans le cas général les secondes formes fondamentales φ et $\tilde{\varphi}$ dans la direction de X et $\tilde{X}$ sont

$$\varphi = -\left\langle \mathrm{d}f(x), \nabla \frac{X}{\|X\|} \right\rangle = \frac{1}{\|X\|}\,(k\bar{k}_r - \bar{k}k_r)\,(\alpha^r)^2\,, \tag{16}$$

$$\tilde{\varphi} = -\left\langle \mathrm{d}f(x), \nabla \frac{\tilde{X}}{\|\tilde{X}\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\tilde{X}\|}\,(k\bar{k}_r + \bar{k}k_r)\,(\alpha^r)^2$$

et l'on déduit

$$\operatorname{tr}\varphi = 0\,, \;\; \operatorname{tr}\tilde{\varphi} = (2k\bar{k})^{1/2} = -\langle X, X\rangle^{1/2} = \langle \tilde{X}, \tilde{X}\rangle^{1/2}\,.$$

Ainsi le champ normal principal X détermine toujours une *section minimale* tandis que son associé $\tilde{X}$ ne détermine une pareille section que si il est isotrope.

Remarque. La *torsion gaussienne* associée à l'immersion étant *nulle* ($\mathrm{d} \wedge \alpha_1^1 = 0$), la connexion normale est comme on le sait *triviale*. Il est facile à vérifier que toutes les propriétés démontrées dans ce travail restent valables pour toute immersion de codimension deux dans $\mathscr{M}^n$ dont la connexion normale est triviale.

3. On peut décomposer le vecteur de position du point générique de V_s^{n-2} en

$$x = N + T\,, \tag{17}$$

où

$$T = x^r\xi_r \in S_x(V_s^{n-2})\,, \quad N = x^1\xi_1 + x^n\xi_n \in H_x(V_s^{n-2})\,. \tag{17'}$$

La différentiation de (17) donne

$$\mathrm{d}x^1 + x^1\alpha_1^1 + k_r x^r\alpha^r = 0\,, \tag{18}$$

$$\mathrm{d}x^n - x^n\alpha_1^1 + \bar{k}_r x^r\alpha^r = 0\,,$$

$$\mathrm{d}x^s + x^r\alpha_r^s + \lambda_s\alpha^s = 0 \quad (\text{ne pas sommer pour } s)\,,$$

où l'on a posé

$$\lambda_s = x^1 \bar{k}_s + x^n k_s - 1 .$$

Les conditions d'intégrabilité du système (18) sont

$$\text{(19)} \qquad d\lambda_s \wedge \alpha^s + (\lambda_s - \lambda_r)\,\alpha^r \wedge \alpha_r^s + x^r(k_r \bar{k}_s + \bar{k}_r k_s)\,\alpha^r \wedge \alpha^s = 0$$

où la sommation est faite seulement pour l'indice r. Il résulte aussi de (18) que

$$\text{(20)} \qquad d\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}\rangle + 2 \sum_r (\lambda_r + 1)\, x^r \alpha^r = 0 .$$

Posons ensuite

$$\psi = \langle \boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}\rangle$$

et convenons d'appeler la forme ψ la 1-*forme de position*; cette forme est comme on le sait toujours fermée (propriété dont on peut s'assurer facilement dans le cas qui nous occupe).

D'autre part, en notant par $\eta = \alpha^2 \wedge \alpha^3 \wedge \ldots \wedge \alpha^{n-1}$ l'élément de volume de V_s^{n-2}, de (18) il suit

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{div}_\eta \boldsymbol{T} = -\sum \lambda_s = \eta - 2 - \mu$$

où

$$\text{(22)} \qquad \mu = x^1 \bar{k} + x^n k .$$

Mais l'adjointe $_*\,\psi$ de ψ par rappot à η est

$$\text{(23)} \qquad {}_*\,\psi = -\boldsymbol{T} \,\lrcorner\, \eta$$

et l'on déduit

$$\text{(24)} \qquad d \wedge {}_*\,\psi = -\operatorname{div}_\eta \boldsymbol{T}\eta ,$$

$$\text{(25)} \qquad \delta\psi = \operatorname{div}_\eta \boldsymbol{T}$$

et

$$\text{(26)} \qquad \Delta\psi - \langle \boldsymbol{x}, \nabla \tilde{\boldsymbol{X}}\rangle = 0$$

($\Delta = d\delta + \delta d$). Mais cette dernière relation pouvant s'écrire aussi

$$\text{(27)} \qquad \Delta\psi = d(\operatorname{div}_\eta \boldsymbol{T}) ,$$

les relations (25) et (27) montrent respectivement que

(i) ψ *est cofermée (donc aussi harmonique) si et seulement si* $\operatorname{div}_\eta \boldsymbol{T} = 0$;

(ii) $\Delta\psi = 0$ *si et seulement si* $\operatorname{div}_\eta \boldsymbol{T} = \text{const.}$ (*$\boldsymbol{T}$ définit une homothétie infinitésimale*) (*V_s^{n-2} est supposée d'être connexe*).

Dans le cas d'une immersion ombilicale le système (18) prend la forme

$$\mathrm{d}x^1 + x^1\alpha_1^1 = b\psi\,, \quad \mathrm{d}x^n - x^n\alpha_1^1 = a\psi\,, \quad \mathrm{d}x^s + x^r\alpha_r^s + \lambda\alpha^s = 0 \tag{28}$$

où

$$\lambda = ax^1 + bx^n - 1\,. \tag{29}$$

(19) devient dans ce cas

$$\mathrm{d}\lambda = 2ab\psi \tag{30}$$

et le système formé par (28) et (29) est toujours fermé. De plus, de (28) on obtient

$$\begin{gathered}\mathrm{d}\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}\rangle = 2(\lambda + 1)\,\psi\,, \quad \mathrm{div}_\eta\, \boldsymbol{T} = -(n-2)\,\lambda\,,\\ \alpha_1^1 = \mathrm{dln}\, a = -\mathrm{dln}\, b \Rightarrow ab = \mathrm{const.}\,,\\ \Delta\psi = 2(n-2)\,ab\psi\,.\end{gathered} \tag{31}$$

Les relations ci-dessus montrent que si l'immersion f est ombilicale alors

(i) *la forme de torsion est un cobord et par conséquent la connexion sur* V_s^{n-2} *est équi-affine*;
(ii) *le champ normal principal et son associé sont les deux de module constant*;
(iii) ψ *est une forme propre de* Δ *la valeur propre correspondante étant* $2(n-2)\,ab$.

En supposant $k\bar{k} \neq 0$ le cas $\Delta\psi = 0$ ($\Leftrightarrow \psi = 0$) nous mène à la variété V_s^{n-2} définie par

$$\boldsymbol{x} = x^1\xi_1 + x^n\xi_n = \boldsymbol{N}\,. \tag{32}$$

A l'aide de la première relation (31) on voit que dans ce cas l'immersion est *sphérique* (V_s^{n-2} est immergée dans une hypersphère de $\mathscr{M}_p^n$ centrée à l'origine.)

R e m a r q u e s. 1. $\boldsymbol{Y}$ étant un champ tangent quelconque sur V_s^{n-2} dans le cas général d'une connexion principale, $\mathscr{L}_{\boldsymbol{Y}}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle$ prend la forme simple

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{Y}}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 2\boldsymbol{Y} \lrcorner\, \psi \tag{33}$$

et dans le cas particulier où $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{T}$ il vient

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{T}}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle\,. \tag{34}$$

2. Le vecteur de courbure moyenne associé à l'immersion f étant

$$\boldsymbol{H} = \bar{k}\xi_1 + k\xi_n\,, \tag{35}$$

la variété V_s^{n-2} est *minimale* si et seulement si $\bar{k} = k = 0$. A l'aide de (21) on a dans ce cas

$$\operatorname{div}_\eta \boldsymbol{T} = n - 2 \tag{36}$$

et (27) entraîne

$$\Delta\psi = 0\,. \tag{37}$$

4. Nous allons mettre maintenant en évidence quelques propriétés concernant les champs $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{H}$ et

$$\boldsymbol{U} = \bar{k}\xi_1 - k\xi_n \in H_x(V_s^{n-2})\,. \tag{38}$$

On a visiblement

$$\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{H}\rangle = 0 \tag{39}$$

et à l'aide de (5) et (8) il vient

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{T} &= -\lambda_r \alpha^r \otimes \xi_r + x^r \alpha^r \otimes (k_r \xi_1 + \bar{k}_r \xi_n)\,, \\ \nabla \boldsymbol{N} &= \textstyle\sum (\lambda_r + 1)\,\lambda^r \otimes \xi_r - x^r \alpha^r \otimes (k_r \xi_1 + \bar{k}_r \xi_n)\,, \\ \nabla \boldsymbol{H} &= (\bar{k}\bar{k}_r + k k_r)\,\alpha^r \otimes \xi_r + (\mathrm{d}\bar{k} + \bar{k}\alpha_1^1) \otimes \xi_1 + (\mathrm{d}k - k\alpha_1^1) \otimes \xi_n\,, \\ \nabla \boldsymbol{U} &= (\bar{k}\bar{k}_r - k k_r)\,\alpha^r \otimes \xi_r + (\mathrm{d}\bar{k} + \bar{k}\alpha_1^1) \otimes \xi_1 - (\mathrm{d}k - k\alpha_1^1) \otimes \xi_n\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Dans le cas où l'immersion f est ombilicale, ces relations deviennent

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{T} &= -\lambda\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{n-2}\,\psi \otimes \tilde{\boldsymbol{X}}\,, \\ \nabla \boldsymbol{N} &= (\lambda + 1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{n-2}\,\psi \otimes \tilde{\boldsymbol{X}}\,, \\ \nabla \boldsymbol{H} &= (n-2)(a^2 + b^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\alpha_1^1 \otimes \boldsymbol{U}\,, \\ \nabla \boldsymbol{U} &= (n-2)(a^2 - b^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\alpha_1^1 \otimes \boldsymbol{H}\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Ainsi

(i) $\boldsymbol{N}$ *est quasi-parallèle* [3] *par rapport à* $\tilde{\boldsymbol{X}}$;
(ii) $\boldsymbol{H}$ resp. $\boldsymbol{U}$ *est quasi-parallèle par rapport à* $\boldsymbol{U}$ resp. $\boldsymbol{H}$;
(iii) $\boldsymbol{H}$ *et* $\boldsymbol{U}$ *sont parallèles dans le faisceau normal si et seulement si* $\alpha_1^1 = 0$. *Dans ce cas* $\{(n-2)(a^2+b^2)\}^{-1}\,\boldsymbol{H}$ *et* $\{-(n-2)(a^2-b^2)\}^{-1}\,\boldsymbol{U}$ *sont concourants.*
(iv) $\boldsymbol{T}$ *et* $\boldsymbol{N}$ *sont parallèles dans le faisceau normal si et seulement si* $\psi = 0$. *Dans ce cas* $\lambda^{-1}\boldsymbol{T}$ *et* $-(\lambda+1)^{-1}\,\boldsymbol{N}$ *sont concourants.*

Les propriétés (i) et (ii) sont dans ce cas évidentes car les vecteurs considérés sont de normes constantes.

5. Supposons maintenant que l'espace de Minkowski en jeu est de dimension paire $(n = 2m)$. On peut considérer alors sur V_s^{n-2} la 2-forme

$$\Omega = \alpha^2 \wedge \alpha^3 + \alpha^4 \wedge \alpha^5 + \ldots + \alpha^{n-2} \wedge \alpha^{n-1}\,, \tag{42}$$

qui étant visiblement de rang maximal définit une *structure presque symplectique.* Soit J l'isomorphisme $\bigcup T_x(\mathscr{M}_p^n) \to \bigcup T_x^*(\mathscr{M}_p^n) : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y} \lrcorner\, \Omega$, il est naturel de considérer le champ $\tilde{\boldsymbol{T}}$ et la forme $\tilde{\psi}$ définis par

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = J^{-1}(\psi)\,, \quad \tilde{\psi} = \boldsymbol{T} \lrcorner\, \Omega\,.$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{T}} &= -x^3\xi_2 + x^2\xi_3 - \ldots - x^{n-1}\xi_{n-2} + x^{n-2}\xi_{n-1}\,, \\ \tilde{\psi} &= x^2\alpha^3 - x^3\alpha^2 + \ldots + x^{n-2}\alpha^{n-1} - x^{n-1}\alpha^{n-2} \end{aligned} \tag{44}$$

et

$$\langle \boldsymbol{T}, \tilde{\boldsymbol{T}} \rangle = 0\,, \quad \langle \tilde{\psi} \wedge * \psi \rangle = 0\,, \tag{45}$$

ce qui montre que les champs $\boldsymbol{T}$ et $\tilde{\boldsymbol{T}}$ resp. les formes ψ et $\tilde{\psi}$ sont orthogonaux respectivement orthogonales.

De plus, on a

$$\Omega(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}') = -\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle\,, \quad \mathrm{d}\Omega(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}') = -\mathscr{L}_{\boldsymbol{T}}\psi\,, \quad \mathscr{L}_{\tilde{\boldsymbol{T}}}\psi = 0\,. \tag{46}$$

Dans le cas d'une immersion ombilicale la seconde relation (46) s'écrit

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{T}}\psi = -2\lambda\psi\,. \tag{47}$$

D'autre part si l'on introduit l'opérateur L^{m-2}, définit comme on sait [6] par $L^{m-2} : \Lambda^1(V_s^{n-2}) \to \Lambda^{n-3}(V_s^{n-2}) : \varphi \to L^{m-2}\varphi = \varphi \wedge \Omega^{m-2}/(m-2)!$, on obtient pour $\varphi = \psi$ resp. $\varphi = \tilde{\psi}$:

$$L^{m-2}\psi = * \tilde{\psi}\,, \quad L^{m-2}\tilde{\psi} = - * \psi\,. \tag{48}$$

Nous formulons le

Théorème. *Soit V_s^{n-2} une variété spatiale de codimension deux immergée dans un espace de Minkowski $\mathscr{M}^n$ de dimension paire $n = 2m$, muni d'une connexion principale et soient ψ et Ω resp. la 1-forme de position et la 2-forme presque symplectique définie par (42). Si $\tilde{\psi}$ et $\tilde{\boldsymbol{T}}$ sont resp. la forme duale de $\boldsymbol{T}$ resp. le champ dual de ψ par rapport à Ω, alors on a*

(i) *$\boldsymbol{T}$ et $\tilde{\boldsymbol{T}}$ de même que ψ et $\tilde{\psi}$ sont orthogonaux;*

(ii) *$\tilde{\boldsymbol{T}}$ est un automorphisme infinitésimal de ψ et si l'immersion est ombilicale $\boldsymbol{T}$ est une transformation infinitésimale conforme de ψ;*

(iii) ψ *et* $\tilde{\psi}$ *satisfont aux relations*

$$L^{m-2}\psi = {}_*\tilde{\psi}\,, \quad L^{m-2}\tilde{\psi} = -\,{}_*\psi\,.$$

Remarque. Dans le cas où $\mathscr{M}_p^n$ est un espace-temps de Minkowski ($n = 4$) on trouve

(49) $$\mathrm{d} \wedge \tilde{*}\, \psi = 0$$

ce qui exprime que la 1-*forme de position est* Ω-*harmonique* ($\tilde{*}$ indique l'adjointe symplectique [6]).

6. Dans ce qui suit nous allons démontrer quelques *formules intégrales* (qui sont du même type que celles données dans [1], [4], [5]) dans le cas où la variété spatiale V_s^{n-2} est compacte, orientée et sans bord.

Eu égard à (24) et (25) on trouve pour le *produit scalaire global de* ψ et $\Delta\psi$:

(50) $$\langle \psi, \Delta\psi \rangle = \langle \delta\psi, \delta\psi \rangle = \int \delta\psi \wedge {}_*\,\delta\psi = \int (\mathrm{div}_\eta\, \boldsymbol{T})^2\, \eta\,.$$

Si nous posons maintenant

(51) $$f = \tfrac{1}{2}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \; (\Rightarrow \mathrm{d}f = \psi)$$

et faisons usage de la formule générale

(52) $$\mathrm{d}\, {}_*\, \mathrm{d}f = \Delta f \eta\,,$$

on déduit à l'aide de (23)

(53) $$\mathrm{d}\, {}_*\, \psi = \tfrac{1}{2}\Delta \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle\, \eta$$

et moyennant la formule de Stokes on obtient

(54) $$\int \Delta \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle\, \eta = 0 \quad \text{ou} \quad \int \mathrm{div}_\eta\, \boldsymbol{T}\eta = 0\,.$$

Mais puisque

(55) $$\mathrm{div}_\eta\, \boldsymbol{T} = n - 2 - \langle \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{X}} \rangle\,,$$

la formule intégrale (54) permet d'écrire la formule du type de Minkowski suivante

(56) $$\int \{ n - 2 - \langle \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{X}} \rangle \}\, \eta = 0\,.$$

Cette formule est susceptible de certaines généralisations comme suit. Posons

(57) $$\det (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = c$$

où $c^2 = (-1)^{n-2}$ et considérons l'application connue $\mathscr{E} \to [\times]^{n-1}\mathscr{E}$ où $\mathscr{E}$ est l'espace des vecteurs ξ_A et $[\times]^{n-1}\mathscr{E}$ l'espace des $(n-1)$-vecteurs $[\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_{n-1}}]$ ($\times$, produit extérieur de vecteurs). Alors on a

$$(58) \qquad \begin{aligned} [\hat{\xi}_1 \xi_2 \ldots \xi_{n-1} \xi_n] &= (-1)^{n-1}\, c\xi_n\,, \\ [\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n-1} \hat{\xi}_n] &= c\xi_1\,, \\ [\xi_1 \xi_2 \ldots \hat{\xi}_r \ldots \xi_{n-1} \xi_n] &= (-1)^{n-r+1}\, c\xi_r \end{aligned}$$

($\wedge$ indique qu'on doit omettre ce vecteur) et

$$(59) \qquad \langle [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}], \boldsymbol{v} \rangle = \det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v})\,.$$

En notant par "[" "]" le produit extérieur mixte des formes et des vecteurs on déduit à l'aide de (58)

$$(60) \qquad ''['' \underbrace{\mathrm{d}\boldsymbol{x} \ldots \mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{n-3} \xi_1 \xi_n '']'' = (n-3)!\, {}_*\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

d'où

$$(61) \qquad \mathrm{d}\, {}_*\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (n-2)\, c\tilde{\boldsymbol{X}}\eta\,.$$

Cette relation nous permet avec les hypothèses faites plus haut d'écrire

$$(62) \qquad \int \tilde{\boldsymbol{X}}\eta = 0\,.$$

De plus, soit

$$(63) \qquad \boldsymbol{Y} = y^r \xi_r \in S_x(V_s^{n-2})$$

un champ tangent quelconque. A l'aide de la connexion on arrive à

$$(64) \qquad \nabla \boldsymbol{Y} = (\mathrm{d}y^s + y^r \alpha_r^s) \otimes \xi_s + a^r \alpha^r \otimes (k_r \xi_1 + \bar{k}_r \xi_r)$$

ce qui donne

$$(65) \qquad \langle \nabla Y, {}_*\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle = -\mathrm{div}_\eta\, Y\eta\,.$$

Mais (61) entraîne

$$(66) \qquad \langle \boldsymbol{Y}, \mathrm{d}\, {}_*\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle = 0$$

et alors

$$(67) \qquad \mathrm{d}\langle \boldsymbol{Y}, {}_*\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle = -\mathrm{div}_\eta\, \boldsymbol{Y}\eta$$

d'où moyennant la formule de Stokes,

$$\int \operatorname{div}_\eta Y\eta = 0 . \tag{68}$$

Cette formule constitue la première généralisation annoncée.

Par ailleurs, soit

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varrho\xi_1 + \frac{1}{\varrho}\xi_n\right), \quad \varrho \in \mathscr{D}(V_s^{n-2}) \tag{69}$$

un champ normal unitaire quelconque. Un calcul sans difficulté donne pour la seconde forme fondamentale correspondante

$$\varphi(e) = -\langle \mathrm{d}x, \nabla e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varrho\bar{k}_r + \frac{1}{\varrho}k_r\right)(\alpha^r)^2 \tag{70}$$

d'où

$$\operatorname{tr}\varphi(e) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varrho\bar{k} + \frac{1}{\varrho}k\right). \tag{71}$$

Si l'on introduit la fonction

$$\operatorname{tr}\varphi(e)\langle x, e\rangle , \tag{72}$$

il vient

$$\operatorname{tr}\varphi(e)\langle x, e\rangle = \frac{1}{2}\left\{n - 2 - \operatorname{div}_\eta \boldsymbol{T} + \varrho^2 x^n\bar{k} + \frac{1}{\varrho^2}x^1 k\right\}$$

et l'on arrive à

$$\int\{n - 2 - 2\operatorname{tr}\varphi(e)\langle x, e\rangle\}\,\eta + \int\left\{\varrho^2 x^n\bar{k} + \frac{1}{\varrho^2}x^1 k\right\}\eta = 0 . \tag{73}$$

Cette formule a pour conséquences les deux cas remarquables suivants.

a. Si ϱ satisfait à

$$\varrho^2 x^n\bar{k} + \frac{1}{\varrho^2}x^1 k = c(x^n k + x^1\bar{k}), \quad c \text{ constant}, \tag{74}$$

on a pour le vecteur e correspondant la formule

$$\int\{(1 + c)(n - 2) - 2\operatorname{tr}\varphi(e)\langle x, e\rangle\}\,\eta = 0 \tag{75}$$

dont (56) est un cas particulier.

b. Un 2-plan de Minkowski étant muni d'une structure parahermitienne [6] on peut considérer le vecteur normal

$$N_a = x^n \xi_1 + x^1 \xi_n$$

associé au vecteur normal N. On trouve après calcul que ce champ définit une section minimale si et seulement si

$$x^n \bar{k} + x^1 k = 0 \tag{76}$$

et dans ce cas les vecteurs $(1/\sqrt{2})(\xi_1 \pm \xi_n)$ vérifient

$$\int \{n - 2 - 2 \operatorname{tr} \varphi(e) \langle x, e \rangle\} \eta = 0 . \tag{77}$$

Considérons ensuite la $(n - 3)$-forme

$$\sigma = (-1)^r \langle x, \xi_r \rangle \alpha^2 \wedge \alpha^3 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}^r \wedge \ldots \wedge \alpha^{n-1} \tag{78}$$

globalement définie sur V_s^{n-2}. On en déduit dans le cas d'une connexion principale:

$$\mathrm{d}\sigma = -\operatorname{div}_\eta T\eta \tag{79}$$

et par conséquent, en vertu de (55)

$$\mathrm{d}(f\sigma) = \langle \nabla f, x \rangle \eta + f(n - 2 - \langle x, \tilde{X} \rangle) \eta \tag{80}$$

$f \in \mathscr{D}(V_s^{n-2})$ et ∇f est le gradient de f. Il vient donc

$$\int \langle \nabla f, x \rangle \eta + \int f(n - 2 - \langle x, \tilde{X} \rangle) \eta = 0 . \tag{81}$$

Finalement, soit $\boldsymbol{a}$ un vecteur constant. On a

$$_* \mathrm{d}\langle a, x \rangle = (-1)^r \langle a, \xi_r \rangle \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}^r \wedge \ldots \wedge \alpha^{n-1} \tag{82}$$

d'où

$$\mathrm{d}_* \mathrm{d}\langle a, x \rangle = \langle a, \tilde{X} \rangle \eta$$

et

$$\Delta \langle a, x \rangle = \langle a, \tilde{X} \rangle , \tag{83}$$

$\tilde{X}$ étant défini par (12) est le vecteur associé de $\boldsymbol{H}$. La formule de Stokes donne alors

$$\int \langle a, \tilde{X} \rangle \eta = 0 . \tag{84}$$

Bibliographie

[1] *Amur Kr.:* Vector forms and integral formulas for hypersurfaces in Euclidean spaces, J. Diff. Geom., *3*, 1969.

[2] *Cagnac F.:* Géométrie des hypersufaces isotropes, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, *261*, 1965.

[3] *Chen B. Y.:* Geometry of Submanifolds, M. Dekker, New York, 1963.

[4] *Chen B. Y., Yano K.:* Integral Formulas for Submanifolds and Their Applications, J. Diff. Geom., *5*, 1971.

[5] *Gardner R. B.:* An integral formula for immersions in Euclidean space, J. Diff. Geom., *3*, 1969.

[6] *Libermann P.:* Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, Ann. di Matem., *36*, 1954.

[7] *Obata M.:* The Gauss map of immersions of Riemannian manifolds in spaces of constant curvature, J. Diff. Geom., *2*, 1968.

[8] *Rosca R., Vanhecke L.:* Sous-variétés remarquables d'un espace pseudo-riemannien ou pseudo-euclidien, Verhandelingen Kon. Acad. Wet., Lett. en Schone Kunsten van België, Klasse der Wetenschappen, *XXXVIII*, 136, 1976.

[9] *Rosca R., Vanhecke L.:* Sur les variétés lorentziennes munies d'une connexion principale, Ann. Inst. H. Poincaré, *22*, 3, 1975.

[10] *Yano K., Chen B. Y.:* On the concurrent vector fields of immersed manifolds, Kōdai Math. Sem. Rep., *23*, 1971.

Adresse des auteurs: Katholieke Universiteit te Leuven, Departement Wiskunde, Celestijnenlaan 200B, B-3030 Heverlee, Belgique.