Czechoslovak Mathematical Journal

Myron K. Grammatikopoulos

О колеблемости ограниченных решений дифференциальных уравнений с возмущёнными аргументами

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 27 (1977), No. 2, 186–200

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101460`

Czechoslovak Mathematical Journal, 27 (102) 1977, Praha

О КОЛЕБЛЕМОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВОЗМУЩЁННЫМИ АРГУМЕНТАМИ

М. К. Грамматикопулос, Иоаннина

(Поступило в редакцию для 14. X. 1974 г.)

В настоящей работе изучается колебательный характер ограниченных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка ($n > 1$) вида:

$$(*)\qquad x^{(n)}(t) + \{\prod_{j=1}^{m_0} |x[\tau_{0j}(t)]|^{\varrho_j}\} f(t; [x]^2 \langle\tau_0(t)\rangle)\, \varphi([x]^2 \langle\tau_0(t)\rangle,$$
$$[x']^2 \langle\tau_1(t)\rangle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle\tau_{n-1}(t)\rangle) \prod_{j=1}^{2\lambda-1} \operatorname{sgn} x[\tau_{0j}(t)] = 0\,, \quad t > t_0$$

где λ — такое натуральное число, что $2\lambda - 1 \leqq m_0$, кроме того

$$(\forall j = 1, 2, \ldots, m_0)\ \varrho_j \geqq 0\,, \quad \sum_{j=1}^{m_0} \varrho_j = 1\,,$$

$$\tau_i(t) = (\tau_{i1}(t), \tau_{i2}(t), \ldots, \tau_{im_i}(t))\,,$$

$$h\langle\sigma(t)\rangle = (h[\sigma_1(t)], h[\sigma_2(t)], \ldots, h[\sigma_m(t)])\,, \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)\,,$$

В частном случае, при

$$(\forall i, j)\ \tau_{ij}(t) \equiv t$$

дифференциальное уравнение $(*)$ представляет особой обыкновенное дифференциальное уравние. В общем случае функции τ_{ij} вызывают возмущения (отклонения) в соответственных аргументах уравнения $(*)$ и по этой причине оно называется дифференциальным уравнением с *возмущёнными* (*отклоняющимися*) аргументами.

Относительно действительных функций τ_{ij} ($j = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n - 1$), f и φ предполагается, что:

(i) финкции τ_{ij} — непрерывны на полуинтервале $[t, \infty)$ и таковы, что

$$\lim_{t\to\infty} \tau_{ij}(t) = \infty ,$$

(ii) $\tau_{ij}(t) \leqq t \ (j = 1, 2, \ldots, m_i; \ i = 0, 1, \ldots, n - 1)$,

(iii) функция f — неотрицательна на множестве $[t_0, \infty) \times [0, \infty)^{m_0}$, а функция $\left(\prod_{k=1}^{m_0} y_{0j}^{\varrho_j/2}\right) f(t; \vec{y})$ непрерывна на том же множестве,

(iv) функция φ определена и непрерывна на множестве $[t_0, \infty) \times E_0$, где $E_0 \equiv [0, \infty)^{m_0} \times [0; \infty)^{m_1} \times \ldots \times [0, \infty)^{m_{n-1}}$, и такова, что

$$\forall(\vec{y}_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{n-1}) \in E \Rightarrow \varphi(\vec{y}_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{n-1}) > 0 .$$

В настоящей работе даются необходимые и достаточные условия колеблемости ограниченных решений уравнения (*), причём, достаточные условия достигаются методами, аналогичными методам, применяемым в работах [1] и [6], а необходимые условия истекают из сравнения уравнения (*) с дифференциальным уравнением

$$(**) \qquad y^{(n)}(t) + g(t) \left\{ \prod_{j=1}^{m_0} |y[\tau_{0j}(t)]|^{\alpha_j} \right\} \prod_{j=1}^{2\lambda - 1} \operatorname{sgn} y[\tau_{0j}(t)] = 0 \qquad t \geqq t_0$$

где функция g предполагается неотрицательной и непрерывной на полуинтервале $[t, \infty)$ и, кроме того:

$$(\forall j = 1, 2, \ldots, m_0) \ \alpha_j \geqq 0 , \quad \sum_{j=1}^{m_0} \alpha_j = \alpha > 0 .$$

Сравнение это достигается с помощью *принципа сравнения*, введённого в работе [7] и основанного на том факте, что уравнение (**) имеет известное асимптотическое и колебательное поведение (См., напр., [3], [4], [5] и [8]). Уравнение (**) представляет собой обобщение известного дифференциального уравнения Эмдена-Фаулера.

При $m_0 = 1$ трудности изучения асимптотического и колебательного поведения решений преодолены введением понятий суперлинейного и сублинейного дифференциального уравнения (См., напр., [1], [3] и др.). Здесь эти понятия усиливаются, во-первых, для дифференциального уравнения (**), а затем обобщается на случай дифференциального уравнения (*).

Определение 1. Уравнение (**) называется:

(a) τ_0-*искажённым суперлинейным*, если

$$\sum_{j=1}^{m_0} \alpha_j \geqq 1 ,$$

(b) τ_0-*искажённым сублинейным*, если

$$\sum_{j=1}^{m_0} \alpha_j \leqq 1 .$$

Определение 2. Уравнение $(*)$ называется:

(a) τ_0-*искажённым суперлинейным*, если при $t \geqq t_0$ функция $F(t; \vec{y}_0, \vec{y}_1, \ldots \ldots, \vec{y}_{n-1}) \equiv f(t; \vec{y}_0)\, \varphi(\vec{y}_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{n-1})$ является неубывающей относительно $(\vec{y}_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{n-1}) \in E$, где $E \equiv (0, \infty)^{m_0} \times (0, \infty)^{m_1} \times \ldots \times (0, \infty)^{m_{n-1}}$, т. е.

$$(\forall i = 0, 1, \ldots, n-1)\ \vec{y}_i \leqq \vec{z}_i \Rightarrow F(t; \vec{y}_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{n-1}) \leqq F(t; \vec{z}_0, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-1}) ,$$

(b) τ_0-*искажённым сублинейным*, если при $t \geqq t_0$ функция $F(t; \vec{y}_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{n-1})$ является невозрастающей относительно $(\vec{y}_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{n-1}) \in E_0$, т.е.

$$(\forall i = 0, 1, \ldots, n-1)\ \vec{y}_i \leqq \vec{z}_i \Rightarrow F(t; \vec{y}_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{n-1}) \geqq F(t; \vec{z}_0, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-1}) .$$

Примечание. Упорядоченность в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^m$ понимается в обычном её смысле, т. е.

$$\vec{y} \leqq \vec{z} \Leftrightarrow (\forall k = 1, 2, \ldots, m)\quad y_k \leqq z_k .$$

Кроме того, векторы $(1, 1, \ldots, 1)$ и $(0, 0, \ldots, 0)$ обозначаются кратко через $\boldsymbol{1}$ и $\boldsymbol{0}$, т. е.

$$\boldsymbol{1} = (1, 1, \ldots, 1) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0) .$$

Краткости ради в этих символах не обозначается размерноть m рассматриваемого пространства, ибо она очевидна в каждом рассматриваемом случае.

Предполагается, что имеются подходящие условия, обеспечивающие существование решений уравнения $(*)$ при всех больших t, и здесь термин „решение уравнения $(*)$“ будет применяться только для таких решений.

Колебательный характер решений понимается в обычном его смысле, т. е. решение x уравнения $(*)$ называется *колеблющимся* тогда и только тогда, если не имеет последнего нуля, т. е. для любого t_1 с $x(t_1) = 0$ существует такое t_2, что $t_2 > t_1$ и $x(t_2) = 0$. В противном случае решение x называется *неколеблющимся* и, следовательно, сохраняет постоянный знак при всех больших t.

Ниже применяются следующие леммы, которые даны соответственно в работах [8], [2] и [7]:

Лемма 1 (Принцип сравнения). *Пусть даны дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами:*

(E) $$x^{(n)}(t) + F(t, x\langle\tau_0(t)\rangle, x'\langle\tau_1(t)\rangle, \ldots, x^{(n-1)}\langle\tau_{n-1}(t)\rangle) = 0 ,$$

(E_g) $$y^{(n)}(t) + g(t)\, G(t, y\langle\sigma_0(t)\rangle, y'\langle\sigma_1(t)\rangle, \ldots, y^{(n-1)}\langle\sigma_{n-1}(t)\rangle) = 0 ,$$

где функция g принадлежит определённому классу функций $\mathcal{G}$, и пусть g_z — функция, определяемая по формуле

$$g_z(t) = \frac{F(t, z\langle\tau_0(t)\rangle, z'\langle\tau_1(t)\rangle \ldots z^{(n-1)}\langle\tau_{n-1}(t)\rangle)}{G(t, z\langle\tau_0(t)\rangle, z'\langle\tau_1(t)\rangle, \ldots, z^{(n-1)}\langle\tau_{n-1}(t)\rangle)}.$$

Пусть, более того, P — предложная функция с областью определения некоторый класс функций $\mathcal{E}$ и:

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{E} : x - \text{решение уравнения (E)}\},$$

$$\mathcal{S}_g = \{x \in \mathcal{E} : x - \text{решение уравнения } (\mathrm{E}_g)\}.$$

Если имеют место предложения

$$(\forall g \in \mathcal{G})\,(\forall y \in \mathcal{S}_g)\; P(y)$$

и

$$(\forall x \in \mathcal{S}) \sim P(x) \Rightarrow g_x \in \mathcal{G},$$

тогда имеет место также и предложение

$$(\forall x \in \mathcal{S})\; P(x).$$

Лемма 2 (Адаптация). *Если $u(t)$ — абсолютно непрерывная, знакопостоянная функция со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно на полуинтервале $[a, \infty)$ и*

$$u(t)\, u^{(n)}(t) \leqq 0$$

то найдётся такое число l, $0 \leqq l < n$, $n + l$ — нечётное число, что при $t \in \in [a, \infty)$ будем иметь:

$$u(t)\, u^{(k)}(t) \geqq 0 \;(k = 0, 1, \ldots, l),$$

$$(-1)^{n+k-1}\, u(t)\, u^{(k)}(t) \geqq 0 \;(k = l+1, l+2, \ldots, n-1).$$

Лемма 3. *Если функция $u(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1 и при любом $k = 0, 1, \ldots, n-2$*

$$\lim_{t\to\infty} u^{(k)}(t) = c, \quad c \in \mathbf{R},$$

то

$$\lim_{t\to\infty} u^{(k+1)}(t) = 0.$$

Теорема 1. *Пусть удовлетворяются условия* (i) ÷ (iv). *Если уравнение* (*) — *τ_0-искажённое суперлинейное или же τ_0-искажённое сублинейное, то условие*

$$(\mathrm{C}_1) \qquad \int^{\infty} t^{n-1} f(t; \mu^2 \,.\, \mathbf{1})\, \mathrm{d}t = \infty \quad \text{при любом} \quad \mu \neq 0$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы все ограниченные решения уравнения $(*)$ *были:*

(a) *при чётном* n *колеблющимися;*

(b) *при нечётном* n *или колеблющимися или стремящимися монотонно к нулю при* $t \to \infty$ *совместно со своими производными до* $(n-1)$*-го порядка включительно.*

Вышеприведённая теорема колеблемости формулируется в виде следующей теоремы неколеблемости:

Теорема 2. *Пусть удовлетворяются условия* (i) ÷ (iv). *Если уравнение* $(*)$ — τ_0*-искажённое суперлинейное или же* τ_0*-искажённое сублинейное, то условие*

$$(C_2) \qquad \int^{\infty} t^{n-1} f(t; \mu^2 . \mathbf{1})\,\mathrm{d}t < \infty \quad \text{при некотором} \quad \mu \neq 0$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы:

(a) *при чётном* n *уравнение* $(*)$ *имело ограниченное неколеблющееся решение;*

(b) *при нечётном* n *уравнение* $(*)$ *имело ограниченное неколеблющееся решение* x *с пределом*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \neq 0 .$$

Доказательство. I. *Условие* (C_2) *является необходимым.* Предположим противное, т. е. что выполняется условие (C_1) и пусть w — ограниченное неколеблющееся решение уравнения $(*)$ с пределом $\lim_{t\to\infty} w(t) \neq 0$. Так как для любого решения x уравнения $(*)$ и $-x$ является также решением этого уравнения, то без ограничения общности предположим, что $w(t) > 0$ при $t \geqq t_0$. Более того, в силу (i), существует такое $t_1 \geqq t_0$, что при $t \geqq t_1$ будем иметь

$$(1) \qquad \tau_{0j}(t) \geqq \max\{t_0, 0\} \quad (j = 1, 2, \ldots, m_0) .$$

Из уравнения $(*)$, в силу (1), условий (iii), (iv) и предположения, что решение $w(t)$ при $t \geqq t_0$ положительно, получим

$$(2) \qquad w^{(n)}(t) \leqq 0 \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 .$$

Заметим, что $w^{(n)}(t)$ не может быть равной тождественно нулю при всех больших t. В противном случае решение $w(t)$ при всех больших t совпало бы с некоторым многочленом и, в силу ограниченности, было бы постоянной величиной, т. е. при всех больших t имело бы место: $w(t) = \mu_0 \neq 0$ (поскольку по предположению $\lim_{t\to\infty} w(t) \neq 0$). Таким образом, при всех больших t мы имели бы

$$-w^{(n)}(t) = \left\{ \prod_{j=1}^{m_0} w^{\varrho_j}[\tau_{0j}(t)] \right\} f(t; [w]^2 \langle \tau_0(t) \rangle)\, \varphi([w]^2 \langle \tau_0(t) \rangle, [w']^2 \langle \tau_1(t) \rangle, \ldots$$
$$\ldots, [w^{(n-1)}]^2 \langle \tau_{n-1}(t) \rangle) = \mu_0 f(t; \mu_0^2 . \mathbf{1})\, \varphi(\mu_0^2 . \mathbf{1}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$$

и, следовательно

$$-\mu_0 w^{(n)}(t) = \mu_0^2 f(t; \mu_0^2 \cdot \mathbf{1})\, \varphi(\mu_0^2 \cdot \mathbf{1}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})\,.$$

Отсюда видно, что $w^{(n)}(t)$ не равна тождественно нулю при всех больших t, так как, в силу (C_1), то же имеет место и для функции $f(t; \mu_0^2 \cdot \mathbf{1})$.

В силу леммы 2, легко заключить, что существует целое число l, $0 \leqq l < n$, $n + l$ – нечётное число, такое, что при $t \geqq t_1$ будем иметь:

$$w^{(k)}(t) \geqq 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, l)\,,$$

$$(-1)^{n+k-1}\, w^{(k)}(t) \geqq 0 \quad (k = l + 1, l + 2, \ldots, n - 1)\,.$$

Покажем, что $l = 0$ или $l = 1$. Пусть $l > 1$. Тогда, в силу формулы Тейлора, будем иметь

$$(3) \qquad w(t) \geqq w(T) + \frac{w'(T)}{1!}(t - T) + \ldots + \frac{w^{(l-1)}(T)}{(l-1)!}(t - T)^{l-1} \quad \text{при} \quad t \geqq T\,,$$

где T подбирается так, чтобы было: $w^{(l-1)}(T) > 0$. (Такой выбор T возможен, поскольку доказано, что $w^{(n)}(t)$ не равна тождественно нулю при всех больших t.) Неравенство (3) противоречит, очевидно, ограниченности решения w.

Так как, в силу леммы 2, $n + l$ – нечётное число, то приходим к выводу, что при n чётном $l = 1$ и, следовательно, при $t \geqq t_1$ имеем

$$w'(t) \geqq 0$$

а при n нечётном $l = 0$ и, следовательно, при $t \geqq t_1$ имеем

$$w'(t) \leqq 0\,.$$

Положим теперь $c = \lim\limits_{t \to \infty} w(t)$ в случае, когда w – возрастающая функция (т. е. n – чётное), и $c = 2 \lim\limits_{t \to \infty} w(t)$ в случае, когда w – убывающая функция (т. е. n – нечётное). Легко проверить тогда, что имеет место оценка

$$(4) \qquad \frac{c}{2} \leqq w[\tau_{0j}(t)] \leqq c \quad (j = 1, 2, \ldots, m_0) \quad \text{при} \quad t \geqq t_2\,,$$

где $t_2 \geqq t_1$ подбирается подходящим образом.

Так как решение w сходится к действительному числу, то, в силу леммы 3, заключаем, что

$$\lim_{t \to \infty} w^{(k)}(t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n - 1)$$

а, в силу этого, существует такое $t_3 \geqq t_2$, что при $t \geqq t_3$ будем иметь

$$(5) \qquad \left|w^{(k)}(t)\right| \leqq c \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Различим теперь следующие два случая:

1. *Уравнение* (*) *является* τ_0*-искажённым суперлинейным.* В этом случае рассмотрим соответственно уравнение (*) и

$$(6) \qquad y^{(n)}(t) + g(t)\, y^{\alpha}(t) = 0$$

где $\alpha = \mu/\nu$ и μ, ν — нечётные числа, вместо уравнений (E) и (E_g) леммы 1.

Пусть $\mathscr{E}$ — класс всех непрерывных ограниченных функций x, определённых на некотором полуинтервале вида $[t_x, \infty)$, а P — предложная функция

$$P(x) : x \text{ — колеблющаяся функция или же } \lim_{t\to\infty} x(t) = 0\,.$$

Более того, пусть $\mathscr{G}$ — класс всех неотрицательных функций g, определённых на полуинтервале вида $[t_g, \infty)$ и удовлетворяющих условию

$$(7) \qquad \int^{\infty} t^{n-1}\, g(t)\, \mathrm{d}t = \infty\,.$$

Как известно (См. [4]), при условии (7) все решения уравнения (6) или колеблются или же стремятся к нулю при $t \to \infty$, т. е. имеет место предложение

$$(\forall g \in \mathscr{G})\,(\forall y \in \mathscr{S}_g)\, P(y)\,.$$

Заметим, что для любого ограниченного решения x уравнения (*), для которого имеет место $\sim P(x)$, т. е. x является неколеблющимся и $\lim_{t\to\infty} x(t) \neq 0$, соответствующая ему функция g_x принадлежит классу $\mathscr{G}$. Действительно, принимая во внимание (4) при $w = x$ и лемму 3, заключаем, что

$$(8) \qquad g_x(t) = \frac{1}{x^{\alpha}(t)} \left\{ \prod_{j=1}^{m_0} x^{\varrho_j}[\tau_{0j}(t)] \right\} f(t; [x]^2 \langle \tau_0(t) \rangle)\, \varphi([x]^2 \langle \tau_0(t) \rangle\,,$$
$$[x']^2 \langle \tau_1(t) \rangle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle \tau_{n-1}(t) \rangle) \geqq \frac{1}{2c^{\alpha-1}} f\left(t; \frac{c^2}{4} \cdot \mathbf{1}\right) \varphi\left(\frac{c^2}{4} \cdot \mathbf{1}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}\right)$$
$$\text{при} \quad t \geqq t_2$$

и, следовательно, в силу (C_1), получим

$$\int^{\infty} t^{n-1}\, g_x(t)\, \mathrm{d}t = \infty\,,$$

т. е.

$$(\forall x \in \mathscr{S}) \sim P(x) \Rightarrow g_x \in \mathscr{G}\,.$$

В силу леммы 1, получим, что

$$(\forall x \in \mathscr{S})\ P(x)\,,$$

т. е. любое ограниченное решение x уравнения $(*)$ или колеблется или же $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, что противоречит (a) и (b) теоремы.

2. *Уравнение* $(*)$ *является* τ_0*-искаженным сублинейным.* В этом случае доказательство совпадает полностью с доказательством случая 1 с той разницей, что вместо (8), в силу (4) и (5) при $w = x$, будем иметь

$$\begin{aligned} g_x(t) &= \frac{\{\prod\limits_{j=1}^{m_0} x^{\varrho_j}[\tau_{0j}(t)]\}\, f(t;\, [x]^2 \langle\tau_0(t)\rangle)\, \varphi([x]^2 \langle\tau_0(t)\rangle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle\tau_{n-1}(t)\rangle)}{x^\alpha(t)} \\ &\geqq \frac{1}{2c^{\alpha-1}}\, f(t;\, c^2 \,.\, \mathbf{1})\, \varphi(c^2 \,.\, \mathbf{1},\, c^2 \,.\, \mathbf{1}, \ldots, c^2 \,.\, \mathbf{1})\,. \end{aligned}$$

II. *Условие* (C_2) *является достаточным.* Достаточно доказать, что существует решение x дифференциального уравнения $(*)$ с пределом $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = c_0$, где $c_0 \neq 0$ подбирается подходящим образом. Доказательство проводится по методу, применённому в работе [8] и основывается на применении теоремы постоянной точки А. Тихонова (См. [10]):

Теорема постоянной точки (Адаптация). *Пусть Y — пространстео Фреше, а X — выпуклое замкнутое его подмножество. Если S — непрерывное отображение X в себя, и замыкание $\overline{SX}$ — компактное подмножестео X, то существует хотя бы одна постоянная точка $x \in X$ отображения S, т. е. такая точка $x \in X$, что $x = Sx$.*

Различим снова два случая:

1. *Уравнение* $(*)$ *является* τ_0*-искажённым суперлинейным.* Без ограничения общности предположим, что μ в условии (C_2) — положительное, и подберём c_0 так, чтобы было $0 < c_0 < \mu$. Положим $\delta \equiv \mu - c_0$ и, в силу (C_2), подберём T настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\mu\varphi(\mu^2 \,.\, \mathbf{1},\, \delta^2 \,.\, \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 \,.\, \mathbf{1}) \int_T^\infty (s - T)^{n-1} f(s;\, \mu^2 \,.\, \mathbf{1})\, \mathrm{d}s \leqq \delta\,. \tag{9}$$

При $T_0 = \min\limits_{i,j} \{\min\limits_{t \geqq T} \tau_{ij}(t)\}$ пусть Y — векторное пространство всех непрерывных действительных функций, определённых на полуинтервале $[T_0, \infty)$, которые постоянны на сегменте $[T_0, T]$ и имеют непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно на полуинтервале $[T, \infty)$.

Введём в пространство Y последовательность семинормов p_ν:

$$p_\nu(y) = \sup_{t \in [T, T+\nu]} \left|y^{(n-1)}(t)\right| + \sum_{k=0}^{n-2} \left|y^{(k)}(T)\right|, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

и с её помощью тотальную паранорму p по формуле:

$$p(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{p_\nu(x)}{1 + p_\nu(x)} \quad \text{(комбинация Фреше́)}$$

которая превращает Y в пространство Фреше́.

Пусть X – множество всех $x \in Y$, удовлетворяющих условиям:

(A) $\left|x(t) - c_0\right| \leqq \delta$, если $t \geqq T_0$

и

(B) $\left|x^{(k)}(t)\right| \leqq \delta$, если $t \geqq T$ $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$.

Множество X, очевидно, *непустое* и легко проверить, что оно *выпуклое* множество. Более того, множество X – *замкнуто*. Действительно, рассмотрим произвольную последовательность (y_μ) из X с

$$p\text{-}\lim y_\mu = x\,.$$

Тогда при любом натуральном μ будут иметь место оценки:

$$\left|y_\mu(t) - c_0\right| \leqq \delta\,, \quad \text{если} \quad t \geqq T_0 \tag{10}$$

и

$$\left|y_\mu^{(k)}(t)\right| \leqq \delta\,, \quad \text{если} \quad t \geqq T\ (k = 1, 2, \ldots, n - 1)\,. \tag{11}$$

Заметим, что по определению p, последовательност $(y_\mu^{(n-1)})$ сходится равномерно к функции $x^{(n-1)}$ на любом сегменте $[T, T + \nu]$. Следовательно, применив теорему дифференцирования предельной функции, равномерно сходящейся последовательности функций, легко заключить, что последовательность $(y_\mu^{(n-2)})$ также сходится равномерно к функции $x^{(n-2)}$ на том же сегменте. Следуя по аналогии, заключим окончательно, что последовательность $(y_\mu^{(k)})$ сходится равномерно к функции $x^{(k)}$ на сегменте $[T, T + \nu]$ при любом $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. Из этого факта, в силу того, что ν – произвольное натуральное число, заключаем, что

$$\lim y_\mu^{(k)}(t) = x^{(k)}(t)$$

при любом $t \geqq T$. В силу (10) и (11), легко теперь заключить, что для предельной функции x имеют место условия (A) и (B), т. е. $x \in X$.

Элементы множества X — положительные функции, как это видно из условия (A) и выбора δ. Следовательно, отображение $S : X \to Y$ может быть определено по формуле:

$$
(12) \qquad y(t) = (Sx)(t) = \begin{cases} c_0 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \displaystyle\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \{ \prod_{j=1}^{m_0} x^{\varrho_j}[\hat{\tau}_{0j}(s)]\} \times \\ \times f(s; [x]^2 \langle \hat{\tau}_0(s) \rangle)\, \varphi([x]^2 \langle \hat{\tau}_0(s) \rangle, \\ [x']^2 \langle \hat{\tau}_1(s) \rangle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle \hat{\tau}_{n-1}(s) \rangle)\, \mathrm{d}s\,, \\ \text{если} \quad t \geqq T, \\ c_0 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \displaystyle\int_T^\infty (s-T)^{n-1} \{ \prod_{j=1}^{m_0} x^{\varrho_j}[\hat{\tau}_{0j}(s)]\} \times \\ \times f(s; [x]^2 \langle \hat{\tau}_0(s) \rangle)\, \varphi([x]^2 \langle \hat{\tau}_0(s) \rangle, \\ [x']^2 \langle \hat{\tau}_1(s) \rangle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle \hat{\tau}_{n-1}(s) \rangle)\, \mathrm{d}s\,, \\ \text{если} \quad T_0 \leqq t \leqq T, \end{cases}
$$

где $\hat{\tau}_i = (\hat{\tau}_{i1}, \hat{\tau}_{i2}, \ldots, \hat{\tau}_{im_i})$ и

$$
\hat{\tau}_{ij}(t) = \begin{cases} \tau_{ij}(t)\,, & \text{если} \quad \tau_{ij}(t) \geqq T\,, \\ T\,, & \text{если} \quad \tau_{ij}(t) < T\,. \end{cases}
$$

Заметим, что при $t \geqq T$ имеет место неравенство

$$
(13) \qquad \begin{aligned} &\Big|\{ \prod_{j=1}^{m_0} y^{\varrho_j}[\hat{\tau}_{0j}(t)]\}\, f(t; [x]^2 \langle \hat{\tau}_0(t) \rangle)\, \varphi([x]^2 \langle \hat{\tau}_0(t) \rangle, \ldots \\ &\qquad \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle \hat{\tau}_{n-1}(t) \rangle)\Big| \leqq \\ &\leqq (c_0 + \delta)\, f(t; (c_0 + \delta)^2 \,.\, \mathbf{1}) \times \\ &\times \varphi((c_0 + \delta)^2 \,.\, \mathbf{1},\ \delta^2 \,.\, \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 \,.\, \mathbf{1}) = \\ &= \mu\, f(t; \mu^2 \,.\, \mathbf{1})\, \varphi(\mu^2 \,.\, \mathbf{1},\ \delta^2 \,.\, \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 \,.\, \mathbf{1}) \end{aligned}
$$

и, в силу (C_2), легко заключить, что отображение S определено на всём множестве X, т. е. $S : X \mapsto Y$. Более того, отображение S удовлетворяет условиям теоремы постоянной точки Тихонова, т. е.

(a) $SX \subseteq X$.

Действительно, при $y = Sx$, $x \in X$, и при любом $t \geqq T$, в силу (9) и (13), будем иметь

$$|y(t) - c_0| \leqq \frac{1}{(n-1)!} \left| \int_t^\infty (s-t)^{n-1} \left\{ \prod_{j=1}^{m_0} x^{\varrho_j}[\hat{\tau}_{0j}(s)] \right\} f(s; [x]^2 \langle \hat{\tau}_0(s) \rangle) \times \right.$$

$$\times \varphi([x]^2 \langle \hat{\tau}_0(s) \rangle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle \hat{\tau}_{n-1}(s) \rangle) \, \mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq \frac{c_0 + \delta}{(n-1)!} \int_t^\infty (s-t)^{n-1} f(s; (c_0 + \delta)^2 \, . \, \mathbf{1}) \, \varphi((c_0 + \delta)^2 \, . \, \mathbf{1}, \, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}) \, \mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq \frac{\mu}{(n-1)!} \varphi(\mu^2 \, . \, \mathbf{1}, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}) \int_T^\infty (s-T)^{n-1} f(s; \mu^2 \, . \, \mathbf{1}) \, \mathrm{d}s \leqq \delta \, ,$$

$$|y^{(k)}(t)| \leqq \frac{(n-1)(n-2) \ldots (n-k)}{(n-1)!} \int_t^\infty (s-t)^{n-1-k} \left\{ \prod_{j=1}^{m_0} x^{\varrho_j}[\hat{\tau}_{0j}(s)] \right\} \times$$

$$\times f(s; [x]^2 \langle \hat{\tau}_0(s) \rangle) \, \varphi([x]^2 \langle \hat{\tau}_0(s) \rangle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle \hat{\tau}_{n-1}(s) \rangle) \, \mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq \frac{c_0 + \delta}{(n-1-k)!} \int_t^\infty (s-t)^{n-1-k} f(s; (c_0 + \delta)^2 \, . \, \mathbf{1}) \times$$

$$\times \varphi((c_0 + \delta)^2 \, . \, \mathbf{1}, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}) \, \mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq \frac{\mu}{(n-1-k)!} \varphi(\mu^2 \, . \, \mathbf{1}, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}) \int_T^\infty (s-T)^{n-1-k} f(s; \mu^2 \, . \, \mathbf{1}) \, \mathrm{d}s \leqq \delta$$

$$\text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \, .$$

(b) $\overline{SX}$ – *компактное подмножество* X.

Пусть $y \in SX$, а t_1, t_2 принадлежат $[T, \infty)$. Возьмём $x \in X$ с $y = Sx$, тогда будем иметь

$$|y^{(n-1)}(t_1) - y^{(n-1)}(t_2)| \leqq \left| \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \prod_{j=1}^{m_0} x^{\varrho_j}[\hat{\tau}_{0j}(s)] \right\} f(s; [x]^2 \langle \hat{\tau}_0(s) \rangle) \times \right.$$

$$\left. \times \varphi([x]^2 \langle \hat{\tau}_0(s) \rangle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle \hat{\tau}_{n-1}(s) \rangle) \, \mathrm{d}s \right| \leqq$$

$$\leqq (c_0 + \delta) \, \varphi((c_0 + \delta)^2 \, . \, \mathbf{1}, \, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}) \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s; (c_0 + \delta)^2 \, . \, \mathbf{1}) \, \mathrm{d}s \right| =$$

$$= \mu \varphi(\mu^2 \, . \, \mathbf{1}, \, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 \, . \, \mathbf{1}) \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s; \mu^2 \, . \, \mathbf{1}) \, \mathrm{d}s \right| .$$

Последнее неравенство выражает тот факт, что производные $(n-1)$-го порядка функций $y \in SX$ – равностепенно непрерывны в каждой точке полуинтервала $[T, \infty)$. Так как, в силу (B), производные $(n-1)$-го порядка функций из X – равномерно ограничены, то по теореме Арцела-Асколи для любой последовательности (y_ν) из SX существует такая подпоследовательность (z_ν) последовательности (y_ν), что подпоследовательность $(z_\nu^{(n-1)})$ сходится равномерно на каждом компактном подинтервале полуинтервала $[T, \infty)$. Далее, в силу условий (A) и (B), последовательности $(z_\nu^{(k)}(T))$ $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$ – ограничены и, следовательно, существует такая подпоследовательность (w_ν) последовательности (z_ν), что каждая из последовательностей $(w_\nu^{(k)}(T))$ $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$ является сходящейся. Теперь легко заключить, что последовательность (w_ν) является p-фундаментальной, и следовательно, в силу полноты пространства Y, существует такая функция $u \in Y$, что

$$p\text{-}\lim w_\nu = u\,.$$

Таким образом, показано, что для любой последовательности из SX существует подпоследовательность её, сходящаяся в SX. Из этого факта легко заключить, что множество $\overline{SX}$ обладает свойством Больцано-Вейерштрасса.

(c) *Отображение S – непрерывно.*

Пусть $x \in X$ и (u_ν) – произвольная последовательность из X с

$$p\text{-}\lim u_\nu = x\,.$$

Если положить $y = Sx$ и $v_\nu = Su_\nu$, то при $t \geqq T$ будем иметь

$$y(t) = c_0 + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\,\{\prod_{j=1}^{m_0} x^{\varrho_j}[\tau_{0j}(s)]\}\, f(s;\, [x]^2\,\langle \tau_0(s)\rangle) \times$$
$$\times\ \varphi([x]^2\,\langle \tau_0(s)\langle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2\,\langle \tau_{n-1}(s)\rangle\rangle\, ds$$

и

$$v_\nu(t) = c_0 + \frac{(-1)^{(n-1)}}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\,\{\prod_{j=1}^{m_0} u_\nu^{\varrho_j}[\tau_{0j}(s)]\}\, f(s;\, [u_\nu]^2\,\langle \tau_0(s)\rangle) \times$$
$$\times\ \varphi([u_\nu]^2\,\langle \tau_0(s)\rangle, \ldots, [u_\gamma^{(n-1)}]^2 \langle \tau_{n-1}(s)\rangle\, ds\,.$$

Так как для функций u_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, в силу (13), имеем

$$|(s-t)^{n-1}\{\prod_{j=1}^{m_0} u_\nu^{\varrho_j}[\tau_{0j}(s)]\}\, f(s;\, [u_\nu]^2\,\langle \tau_0(s)\rangle)\, \varphi([u_\nu]^2\,\langle \tau_0(s)\rangle, \ldots$$
$$\ldots, [u_\nu^{(n-1)}]^2\,\langle \tau_{n-1}(s)\rangle)| \leqq \mu\varphi(\mu^2\,.\,\mathbf{1},\, \delta_1\,.\,\mathbf{1}, \ldots, \delta^2\,.\,\mathbf{1})\,(s-t)^{n-1}\, f(s;\, \mu^2\,.\,\mathbf{1})$$

а, в силу (9), имеет место оценка

$$\mu\varphi(\mu^2 . \mathbf{1},\ \delta^2 . \mathbf{1},\ \ldots,\ \delta^2 . \mathbf{1}) \int_t^\infty (s - t)^{n-1} f(s; \mu^2 . \mathbf{1})\, ds \leqq$$

$$\leqq \mu\varphi(\mu^2 . \mathbf{1}, \delta^2 . \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 . \mathbf{1}) \int_t^{t+1} (s - t)^{n-1} f(s; \mu^2 . \mathbf{1})\, ds +$$

$$+ \mu\varphi(\mu^2 . \mathbf{1}, \delta^2 . \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 . \mathbf{1}) \int_{t+1}^\infty (s - t)^{n-1} f(s; \mu^2 . \mathbf{1})\, ds \leqq$$

$$\leqq \mu\varphi(\mu^2 . \mathbf{1}, \delta^2 . \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 . \mathbf{1}) \int_t^{t+1} f(s; \mu^2 . \mathbf{1})\, ds +$$

$$+ \mu\varphi(\mu^2 . \mathbf{1}, \delta^2 . \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 . \mathbf{1}) \int_{t+1}^\infty (s - T)^{n-1} f(s; \mu^2 . \mathbf{1})\, ds \leqq$$

$$\leqq \mu\varphi(\mu^2 . \mathbf{1}, \delta^2 . \mathbf{1}, \ldots, \delta^2 . \mathbf{1}) \int_t^{t+1} f(s; \mu^2 . \mathbf{1})\, ds + \delta \leqq \infty\,,$$

то можем воспользоваться теоремой сходимости Лебега, а тогда

$$\lim_\nu v_\nu(t) = c_0 + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \lim_\nu \int_t^\infty (s - t)^{n-1} \{ \prod_{j=1}^{m_0} u_\nu^{\varrho_j}[\hat{\tau}_{0j}(s)]\} \times$$

$$\times f(s; [u_\nu]^2 \langle\hat{\tau}_0(s)\rangle)\, \varphi([u_\nu]^2 \langle\hat{\tau}_0(s)\rangle, \ldots, [u_\nu^{(n-1)}]^2 \langle\hat{\tau}_{n-1}(s)\rangle)\, ds =$$

$$= c_0 + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_t^\infty (s - t)^{n-1} \{ \prod_{j=1}^{m_0} x^{\varrho_j}[\hat{\tau}_{0j}(s)]\} f(s; [x]^2 \langle\hat{\tau}_0(s)\rangle) \times$$

$$\times\ \varphi([x]^2 \langle\hat{\tau}_0(s)\rangle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle\hat{\tau}_{n-1}(s)\rangle)\, ds\,.$$

Следовательно, при любом $t \geqq T$ имеем

$$\lim_\nu v_\nu(t) = y(t)\,.$$

Для доказательства непрерывности S, достаточно убедиться, что

$$p\text{-}\lim v_\nu = y\,.$$

Рассмотрим с этой целью произвольную подпоследовательность $(z_\mu)_{\mu\in M}$ последовательности (v_ν). В силу того, что множество $\overline{SX}$ – компактно, существует подпоследовательность $(w_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ последовательности $(z_\mu)_{\mu\in M}$ и элемент $\psi \in \overline{SX}$ такие, что

$$p\text{-}\lim_{\lambda\in\Lambda} w_\lambda = \psi\,.$$

Но, как уже было показано в (b), из p-сходимости следует обычная сходимость. Следовательно, нетрудно заключить, что

$$\psi = y\,.$$

Таким образом

$$p\text{-}\lim w_\lambda = y$$

и, следовательно

$$p\text{-}\lim v_\nu = y\,.$$

После всего сказанного, применив теорему постоянной точки, придём к выводу, что существует $x \in X$ с $x = Sx$, которое и является искомым решением дифференциального уравнения (*), ибо, в силу (13) и (9)

$$|x(t) - c_0| = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^\infty (s-t)^{n-1} \left\{ \prod_{j=1}^{m_0} x^{\varrho_j}[\tau_{0j}(s)] \right\} f(s; [x]^2 \langle \tau_0(s) \rangle) \times$$
$$\times \varphi([x]^2 \langle \tau_0(s) \rangle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle \tau_{n-1}(s) \rangle) \, \mathrm{d}s \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty\,.$$

2. *Уравнение* (*) *является* τ_0 — *искажённым сублинейным.* Без ограничения общности полагаем снова, что в условии (C_2) $\mu > 0$ и подбираем $c_0 > \mu$ и $T \geqq t_0$ так, чтобы при любом $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $\delta \equiv c_0 - \mu$ удовлетворяло неравенство

$$(14) \qquad (2c_0 - \mu)\, \varphi(\mu^2 \,.\, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) \int_T^\infty (s - T)^{n-1-k} f(s; \mu^2 \,.\, \mathbf{1}) \, \mathrm{d}s \leqq \delta\,.$$

Как и в случае 1, рассмотрим соответственное пространство Y и непустое выпуклое подмножество его X. Легко убедиться, что элементы X неотрицательные функции и, следовательно, отображение S может быть определено по формуле (12). Далее, в силу (C_2) и сублинейности уравнения (*), при $t \geqq T$ и $x \in X$ получим

$$\left| \left\{ \prod_{j=1}^{m_0} x^{\varrho_j}[\hat{\tau}_{0j}(t)] \right\} f(t; [x]^2 \langle \hat{\tau}_0(t) \rangle)\, \varphi([x]^2 \langle \hat{\tau}_0(t) \rangle, \ldots, [x^{(n-1)}]^2 \langle \hat{\tau}_{n-1}(t) \rangle) \right| \leqq$$
$$\leqq (2c_0 - \mu)\, \varphi(\mu^2 \,.\, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})\, f(t; \mu^2 \,.\, \mathbf{1})\,.$$

Применяя это неравенство вместо (13) и следуя шаг за шагом доказательству случая 1, придём к выводу, что существует решение x дифференциального уравнения (*) с пределом

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = c_0 \neq 0\,.$$

Теорема доказана польностью.

Считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность профессорам В. А. Стайкосу и Я. Г. Сфикасу за их полезные советы, данные при чтении настоящей работы, а также Рефери за внимательный просмотр работы и сделанные замечания.

Литература:

[1] *C. V. Coffman* and *J. S. W. Wong:* Oscillation and nonoscillation theorems for second order ordinary differential equations, Funkcial. Ekvac. *15* (1972), 119—130.

[2] *И. Т. Кигурадзе:* К вопросу колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений, Дифференциальные уравнения *1* (1965), 995—1006.

[3] *T. Kusano* and *H. Onose:* Oscillation theorems for delay equations of arbitrary order, Hiroshima Math. J. *2* (1972), 263—270.

[4] *I. Ličko* et *M. Švec:* Le caractère oscillatoire des solutions de l'equation $y^{(n)} + f(t)\,y^{\alpha} = 0$, $n > 1$, Чехословацкий математический журнал *4* (1963), 481—491.

[5] *Y. G. Sficas* and *V. A. Staikos:* The effect of retarded actions on nonlinear oscillations, Proc. Amer. Math. Soc. *46* (1974), 259—264.

[6] *V. A. Staikos* and *Y. K. Sficas:* Criteria for asymptotic and oscillatory character of functional differential equations of arbitrary order, Boll. U.M.J. *6* (1972), 185—192.

[7] *V. A. Staikos* and *Y. G. Sficas:* Oscillatory and asymptotic behavior of functional differential equations, J. Differential Equations *12* (1972), 426—437.

[8] *V. A. Staikos* and *Y. G. Sficas:* Some results on oscillatory and asymptotic behavior of differential equations with deviating arguments, Proceedings of Caratheodory Symposium, Athens, September 3—7, 1973, 546—553.

[9] *A. Tychonov:* Ein Fixpunktzatz, Math. Ann. *111* (1935), 767—776.

[10] *В. М. Шевело, Н. В. Варех:* Про деякі властивості розв'язкив диффеpенціальних рівнянь із запізненням, Украинский математический журнал *24* (1972), 807—813.

Адрес автора: Математический факультет Иоаннинского Университета, Иоаннина, Греция.