Czechoslovak Mathematical Journal

Erich Müller-Pfeiffer

Über Verallgemeinerungen des Virialsatzes und Existenzfragen von Eigenwerten bei Schrödingeroperatoren

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 26 (1976), No. 3, 458–469

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101419

Czechoslovak Mathematical Journal, 26 (101) 1976, Praha

ÜBER VERALLGEMEINERUNGEN DES VIRIALSATZES UND EXISTENZFRAGEN VON EIGENWERTEN BEI SCHRÖDINGEROPERATOREN

E. MÜLLER-PFEIFFER, Erfurt

(Eingegangen am 9. Dezember 1974)

Unter gewissen Voraussetzungen über das (reelle) Potential $q(x)$ gilt für eine Eigenfunktion $u(x)$ des Schrödingeroperators

$$H = -\Delta + q(x)\,, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n\,, \quad n \geqq 2\,,$$

der Virialsatz

$$(1) \qquad 2(-\Delta u, u) = (rq_r u, u)\,, \quad r = |x|\,,$$

wobei $(\cdot, \cdot)$ das Skalarprodukt des Hilbertraumes $L_2(R^n)$ ist und q_r die radiale Ableitung von q bezeichnet. Einen Beweis dieses Satzes hat WEIDMANN [8] erbracht. Einen Virialsatz für allgemeinere Schrödingeroperatoren hat ALBEVERIO [1] bewiesen, und kürzlich hat KALF [3] den Satz (1) auf Potentiale ausgedehnt, die im Nullpunkt wie $1/r^2$ singulär sein können. Mit Hilfe solcher Virialsätze kann man die Nichtexistenz von Eigenwerten auf Intervallen nachweisen, die im wesentlichen Spektrum der Schrödingeroperatoren liegen. Im folgenden wird der Satz (1) dahingehend verallgemeinert, daß die Radialstreckung des R^n, die im Beweis von (1) grundlegend ist, durch allgemeinere Abbildungen des Raumes R^n auf sich ersetzt wird. Was die Nichtexistenz der Eigenwerte betrifft, so wird der Virialsatz (Satz 1) selbst nicht benötigt, so daß bei diesem Problem die Voraussetzung (II) über $q(x)$ wegfallen kann.

Wir setzen über die (reelle) Funktion $q(x)$ u. a. folgendes voraus:

(I) 1.) $q(x)$ ist im Raum R^n lokal integrierbar und in $R^n_+ = R^n \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar, $q \in C^1(R^n_+)$. Im Falle $n = 2$ sei darüberhinaus $q(x)$ in einer Umgebung des Nullpunktes hölderstetig.

2.) Für den Negativteil $q^-(x) \eqcirc \min(q(x), 0)$ gilt

$$\sup_{x \in R^n} \int_{|x-y| \leqq \varkappa} |q^-(y)|^{n/2}\, dy = o(1)\,, \quad \varkappa \to 0\,, \quad n \geqq 3\,,$$

bzw.

$$\sup_{x \in R^2} \int_{|x-y| \leqq 1} |q^-(y)|^{\alpha}\, dy < \infty \quad \text{für ein} \quad \alpha > 1\,.$$

Diese Voraussetzungen werden im folgenden noch ergänzt. Wenn die Voraussetzungen (I) erfüllt sind, ist die (symmetrische) Form

(2) $$H_0[u, v] = \sum_{j=1}^{n} \int u_{x_j} \bar{v}_{x_j}\, dx + \int q u \bar{v}\, dx\ ^{1})\,, \quad D[H_0] = C_0^\infty(R^n)\,,$$

halbbeschränkt nach unten [5]. Zudem erweist sich die Form (2) als abschließbar. Das letztere folgt daraus, daß zunächst die Form

(3) $$\hat{H}_0[u, v] = \sum_{j=1}^{n} \int u_{x_j} \bar{v}_{x_j}\, dx + \int q^- u \bar{v}\, dx\,, \quad D[\hat{H}_0] = C_0^\infty(R^n)\,,$$

nach [4, Th. 133, S. 320] abschießbar ist[2]) und daß dann die Addition der abschließbaren Form

$$\int q^+ u \bar{v}\, dx\,, \quad u, v \in C_0^\infty R^n)\,, \quad q^+ = q^+(x) = \max(q(x), 0)\,,$$

(vergl. [4, Beisp. 1.15, S. 315]) zu (3) die abschließbare Form (2) ergibt. Durch Abschließung von (2) entstehe die Form

(4) $$H[u, v] = \sum_{j=1}^{n} \int u_{x_j} \bar{v}_{x_j}\, dx + \int q u \bar{v}\, dx\,, \quad u, v \in D[H]\,,$$

wobei $D[H] \subseteq W_2^1(R^n)$ gilt. Der durch die Form (4) definierte Operator, der selbstadjungiert und halbbeschränkt nach unten ist, soll ebenfalls mit H bezeichnet werden. Ist $D(H)$ sein Definitionsbereich, so gilt

$$H[u, v] = (Hu, v)\,, \quad u \in D(H)\,, \quad v \in D[H]\,,$$

und H kann durch

$$Hu = -\Delta u + qu$$

dargestellt werden, wobei die Differentiation $-\Delta$ im Sinne der Theorie der Distri-

---

[1]) Wenn bei Integrationen kein Integrationsgebiet angegeben ist, ist über den Raum R^n zu integrieren.

[2]) Der Definitionsbereich der abgeschlossenen Form ist dann der Sobolevsche Raum $W_2^1(R^n)$ (vergl. [5]).

butionen zu verstehen ist. Ist λ ein Eigenwert von H und $u(x)$ eine zugehörige Eigenfunktion, so gilt

$$-\Delta u + qu = \lambda u \,, \tag{5}$$

und $u(x)$ erweist sich wegen (I_1) in R_n^+ als zweimal stetig differenzierbar, und somit ist (5) eine Differentialgleichung im klassischen Sinne. In den Fällen, wo zusätzlich $q(x)$ in einer Umgebung des Nullpunktes hölderstetig vorausgesetzt wird, ist dann $u(x) \in C^2(R^n)$.

Um den Satz 1 formulieren zu können, treffen wir noch folgende Vorbereitungen.

$$S = S(\tau) = (s_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$$

sei eine Diagonalmatrix, deren Elemente s_{jj} in folgender Weise von einem reelen Parameter τ abhängen sollen: In

$$s_{jj} = 1 + \sigma_j \tau \,, \quad j = 1, \dots, n \,, \quad 0 \leqq \tau \leqq \tau_0 \,, \quad |\sigma_j \tau_0| < 1 \,,$$

sind die σ_j reell. Es gilt also $\det S > 0$, $0 \leqq \tau \leqq \tau_0$, und

$$S(0) = E \,,$$

wenn E die Einheitsmatrix bezeichnet.

$$D = D(\tau) = (d_{jk})_{j,k=1,\dots,n} \,, \quad d_{jk} = d_{jk}(\tau) \,, \quad \det D = +1 \,,$$

sei eine orthogonale Matrix, deren Elemente d_{jk} stetig differenzierbare Funktionen des Parameters τ sind, und es gelte

$$D(0) = E \,.$$

Für die Matrix

$$A = A(\tau) = DS$$

gilt dann ebenfalls

$$A(0) = E \,.$$

Mit

$$\dot{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} A \bigg|_{\tau=0}$$

wird aus $\nabla q = \operatorname{grad} q$, $\dot{A}$ und $x = (x_1, \dots, x_n)$ das Matrizenprodukt $\nabla q \cdot \dot{A}x$ gebildet, welches eine skalare Funktion von x ist. Neben der Transformation A verwenden wir noch eine Translation, die durch den Vektor $\tau a = (\tau a_1, \dots, \tau a_n)$ beschrieben werden soll. Über die Funktion $\nabla q \cdot (\dot{A}x + a)$ wird nun folgendes vorausgesetzt:

(II) Es gibt Konstanten c_1, c_2, c_3, so daß für alle $x \in R_+^n$ die Abschätzung

$$|\nabla q \cdot (\dot{A}x + a)| \leqq \frac{c_1}{r^2} + c_2 + c_3 q^+ \,, \quad c_1 \begin{cases} = 0 \,, & n = 2 \,, \\ > 0 \,, & n \geqq 3 \,, \end{cases}$$

gilt.

Im Falle $a \neq 0$ sei $q(x)$ auch für $n \geqq 3$ in einer Umgebung des Nullpunktes hölderstetig.

Ist speziell $A = S$ mit $s_{jj} = 1 + \tau$, $j = 1, \ldots, n$, und $a = 0$, so ist $\dot{A} = E$, und es tritt die Vereinfachung

$$\nabla q \cdot \dot{A}x = rq_r$$

ein. Die Bedingung (II) läßt dann z. B. auch Potentiale zu, die sich für große r wie eine Potenz r^α verhalten.

Wir beweisen nun folgenden

Satz 1. *Sind A und a die oben betrachteten Transformationen und sind die Voraussetzungen (I) und (II) über $q(x)$ erfüllt, so gilt bezüglich einer beliebigen Eigenfunktion u von H die Beziehung*

$$2\int \sigma_i u_{x_i}^2 \,\mathrm{d}x = \int [\nabla q \cdot (\dot{A}x + a)]\, u^2 \,\mathrm{d}x\,. \tag{6}$$[3])

Spezialfälle: 1) *A ist eine orthogonale Matrix ($A = D$):*

$$\int [\nabla q \cdot (\dot{D}x + a)]\, u^2 \,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{7}$$

2) *A ist eine Diagonalmatrix ($A = S$) und $a = 0$:*

$$2\int \sigma_i u_{x_i}^2 \,\mathrm{d}x = \int \sigma_i x_i q_{x_i} u^2 \,\mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

3) *$A = DS$ mit $\sigma_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, und $a = 0$:*

$$\int [\nabla q \cdot (E + \dot{D})\, x]\, u^2 \,\mathrm{d}x = 2\int u_{x_i} u_{x_i} \,\mathrm{d}x = 2\int (\lambda - q)\, u^2 \,\mathrm{d}x\,. \tag{9}$$

Beweis. λ sei ein Eigenwert von H und $u(x)$ eine zugehörige Eigenfunktion, die als reell angenommen werden kann. Folgende Hilfsfunktionen werden im Beweis verwendet.

$$\varphi_1(\varrho) \begin{cases} = 0\,, & 0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}\,, \\ = 1\,, & \varrho \geqq 1\,, \\ \in C^\infty[0, \infty)\,, & \varphi_1'(\varrho) \geqq 0\,, \end{cases} \qquad \varphi_2(\varrho) \begin{cases} = 1\,, & 0 \leqq \varrho \leqq 2\,, \\ = 0\,, & 3 \leqq \varrho\,, \\ \in C^\infty[0, \infty)\,, & \varphi_2'(t) \leqq 0\,. \end{cases}$$

In den Fällen $n = 2$ und $a \neq 0$ setzen wir $\varphi_1(\varrho) \equiv 1$. Die Funktion

$$\varphi(x) = \varphi_1\left(\frac{|x|}{R_1}\right) \varphi_2\left(\frac{|x|}{R_2}\right), \quad 0 < R_1 < R_2\,,$$

gehört zu $C_0^\infty(R^n)$ für beliebige positive R_1, R_2.

[3]) Über Indizes, die in einem Ausdruck mehrfach auftreten, ist von jetzt ab von 1 bis n zu summieren.

Aus

$$H[u(x), u(Ax + \tau a)\,\varphi(x)] = (H\,u(x), u(Ax + \tau a)\,\varphi(x)) = \lambda(u(x), u(Ax + \tau a)\,\varphi(x))$$

folgt

$$(10) \qquad \lambda \int u(x)\,u(Ax + \tau a)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int u_{x_i}(x)\,u_{x_i}(Ax + \tau a)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \\ + \int u_{x_i}(x)\,u(Ax + \tau a)\,\varphi_{x_i}(x)\,\mathrm{d}x + \int q(x)\,u(x)\,u(Ax + \tau a)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.^{4})$$

Entsprechend folgt aus

$$H[u(x), u(A^{-1}(x - \tau a))\,\varphi(A^{-1}(x - \tau a))] = \\ = \lambda(u(x), u(A^{-1}(x - \tau a))\,\varphi(A^{-1}(x - \tau a)))\,,$$

wenn die Beziehungen

$$A^{-1}(x - \tau a) = \xi\,, \quad \mathrm{d}x = \prod_{j=1}^{n} s_{jj}\,\mathrm{d}\xi\,,$$

$$u_{x_j}(x) = u_{\xi_i}(A\xi + \tau a)\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\,, \quad u_{x_j}(A^{-1}(x - \tau a)) = u_{\xi_i}(\xi)\,\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$$

verwendet werden,

$$\lambda \int u(A\xi + \tau a)\,u(\xi)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\left(u_{\xi_i}(A\xi + \tau a)\,\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)\left(u_{\xi_k}(\xi)\,\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}\right)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ + \int\left(u_{\xi_i}(A\xi + \tau a)\,\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)\left(\varphi_{\xi_k}(\xi)\,\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}\right)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int q(A\xi + \tau a)\,u(A\xi + \tau a)\,u(\xi)\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Mit

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = (A^{-1}(A^{-1})')_{ik} = (S^{-2})_{ik}\ ^{5})$$

erhält man, nachdem noch ξ durch x ersetzt worden ist,

$$(11) \qquad \lambda \int u(x)\,u(Ax + \tau a)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int s_{ii}^{-2}\,u_{x_i}(x)\,u_{x_i}(Ax + \tau a)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \\ - \int s_{ii}^{-2}\,u(Ax + \tau a)\,(\varphi_{x_i}(x)\,u(x))_{x_i}\,\mathrm{d}x + \int q(Ax + \tau a)\,u(x)\,u(Ax + \tau a)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Wird nun die Gleichung (10) von der Gleichung (11) subtrahiert, die entstehende

[4]) $u_{x_i}(Ax + \tau a)$ bedeutet $[u(Ax + \tau a)]_{x_i}$.

[5]) $(A^{-1})'$ ist die transponierte Matrix von A^{-1}.

Gleichung mit τ^{-1} multipliziert und der Grenzübergang $\tau \to 0$ unter Beachtung von $u \in C^2(R^n_+)$ ausgeführt, so erhält man, indem man vor dem Grenzübergang noch

$$\pm \int s_{ii}^{-2}\, u(x)\,(\varphi_{x_i}(x)\, u(x))_{x_i}\, \mathrm{d}x \pm \int u(x)\,(\varphi_{x_i}(x)\, u(x))_{x_i}\, \mathrm{d}x$$

eingefügt hat,

$$\begin{aligned}(12) \qquad 0 = &\int [\nabla q \cdot (\dot{A}x + a)]\, u^2(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x - 2 \int \sigma_i\, u_{x_i}^2(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x - \\ &- \int [\nabla u \cdot (\dot{A}x + a)]\, (\varphi_{x_i}(x)\, u(x))_{x_i}\, \mathrm{d}x + \\ &+ 2 \int \sigma_i\, u(x)\, (\varphi_{x_i}(x)\, u(x))_{x_i}\, \mathrm{d}x - \int u_{x_i}(x)\, [\nabla u \cdot (\dot{A}x + a)]\, \varphi_{x_i}(x)\, \mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Im folgenden werden die Grenzübergänge $R_1 \to 0$ und $R_2 \to \infty$ ausgeführt. Aus der Voraussetzung (II) folgt die Abschätzung

$$\int |\nabla q \cdot (\dot{A}x + a)|\, u^2 \varphi\, \mathrm{d}x \leqq c_1 \int \frac{u^2}{r^2}\, \varphi\, \mathrm{d}x + c_2 \int u^2 \varphi\, \mathrm{d}x + c_3 \int q^+ u^2 \varphi\, \mathrm{d}x\,.$$

Mit Hilfe der Hardyschen Ungleichung

$$\int \frac{u^2}{r^2}\, \mathrm{d}x \leqq \frac{4}{(n-2)^2} \int u_{x_i} u_{x_i}\, \mathrm{d}x\,, \quad u \in W_2^1(R^n)\,, \quad n \geqq 3\,,$$

folgt im Falle $n \geqq 3$ die Konvergenz von

$$\int \frac{u^2}{r^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

Aus der Konvergenz von

$$\int q^- u^2\, \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int q u^2\, \mathrm{d}x \text{ [6])}$$

folgt die Konvergenz des Integrals

$$\int q^+ u^2\, \mathrm{d}x\,.$$

Es konvergiert also

$$\int [\nabla q \cdot (\dot{A}x + a)]\, u^2 \varphi\, \mathrm{d}x$$

---

[6]) Es gilt die Abschätzung (vergl. [5])

$$\left| \int q^- u^2\, \mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon \|\nabla u\|^2 + C_\varepsilon \|u\|^2\,, \quad \varepsilon > 0\,.$$

für $R_1 \to 0$, $R_2 \to \infty$ gegen

$$\int [\nabla q \cdot (\dot{A}x + a)]\, u^2 \, \mathrm{d}x \,.$$

Die Integrale in (12), in denen die Funktion $\varphi_{x_i}(x)$ im Integranden erscheint, konvergieren für $R_1 \to 0$, $R_2 \to \infty$ gegen Null. Wir prüfen diesen Sachverhalt im Falle $n \geqq 3$ und $a = 0$ für den Summanden

$$\int [\nabla u \cdot (\dot{A}x + a)]\, (\varphi_{x_i} u)_{x_i} \, \mathrm{d}x$$

nach[7]). Es gilt, wenn man

$$\varphi_{x_i} = \begin{cases} \dfrac{x_i \varphi_1'}{r R_1}, & \dfrac{R_1}{2} \leqq |x| \leqq R_1 \,, \\[2ex] \dfrac{x_i \varphi_2'}{r R_2}, & R_2 \leqq |x| \leqq 2R_2 \,, \\[2ex] 0\,, & \text{sonst}\,, \end{cases} \qquad \varphi_{x_i x_i} = \begin{cases} \dfrac{\varphi_1''}{R_1^2} + (n-1)\dfrac{\varphi_1'}{r R_1}, & \dfrac{R_1}{2} \leqq |x| \leqq R_1 \,, \\[2ex] \dfrac{\varphi_2''}{R_2^2} + (n-1)\dfrac{\varphi_2'}{r R_2}, & R_2 \leqq |x| \leqq 2R_2 \,, \\[2ex] 0\,, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

die Höldersche Ungleichung und die Eigenschaft $u \in W_2^1(R^n)$ berücksichtigt,

$$\left| \int (\nabla u \cdot \dot{A}x)\, (\varphi_{x_i} u)_{x_i} \, \mathrm{d}x \right| \leqq \left| \int (\nabla u \cdot \dot{A}x)\, \varphi_{x_i x_i} u \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int (\nabla u \cdot \dot{A}x)\, \varphi_{x_i} u_{x_i} \, \mathrm{d}x \right| \leqq$$

$$\leqq C \left(\int_{|x| \leqq R_1} |\nabla u| \frac{|u|}{r} \, \mathrm{d}x + \int_{R_2 \leqq |x| \leqq 2R_2} |\nabla u| \frac{|u|}{r} \, \mathrm{d}x + \right.$$

$$\left. + \int_{|x| \leqq R_1} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{R_2 \leqq |x| \leqq 2R_2} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right) \leqq$$

$$\leqq C \|\nabla u\|_{(|x| \leqq R_1)} \, \|r^{-1} u\|_{(R^n)} + \|\nabla u\|_{(|x| \geqq R_2)} \, \|r^{-1} u\|_{(R^n)} + \|\nabla u\|^2_{(|x| \leqq R_1)} +$$

$$+ \|\nabla u\|^2_{(|x| \geqq R_2)}) = o(1)\,, \quad R_1 \to 0\,, \quad R_2 \to \infty \,.$$

Die anderen Integrale in (12) werden analog abgeschätzt. Insgesamt ergibt der Grenzübergang $R_1 \to 0$, $R_2 \to \infty$ in allen Fällen

$$2 \int \sigma_i u_{x_i}^2 \, \mathrm{d}x = \int [\nabla q \cdot (\dot{A}x + a)]\, u^2 \, \mathrm{d}x \,.$$

Der Satz ist bewiesen.

---

[7]) Ein Fall $n = 2$ oder $a \neq 0$ ist einfacher zu behandeln, weil wegen $\varphi_1 \equiv 1$ nur für große $|x|$ abgeschätzt zu werden braucht.

Mit Hilfe der Gleichung (12) können leicht Potentiale beschrieben werden, für die der Schrödingeroperator H keine Eigenwerte besitzt. Es gilt diesbezüglich folgender

Satz 2. *$q(x)$ erfülle die Voraussetzung (I) und sei im Falle $a \neq 0$ im Nullpunkt hölderstetig.*

1) *Es sei $\sigma_i \geqq 0$, $i = 1, \ldots, n$, aber mindestens ein σ_i positiv. Wenn*

$$\nabla q \cdot (\dot{A}x + a) \leqq 0\,, \quad x \in R^n_+\,,$$

gilt, besitzt H keinen Eigenwert.

2) *Von den nicht negativen Zahlen σ_i. $i = 1, \ldots, n$, seien die Zahlen $\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_m}$, $3 \leqq m \leqq n$, positiv. H besitzt keinen Eigenwert, wenn*

$$\nabla q \cdot (\dot{A}x + a) \leqq \sigma_\mu \frac{(m-2)^2}{2\sqrt{(x_{i_1}^2 + \ldots + x_{i_m}^2)}}\,, \quad \sigma_\mu = \min(\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_m})\,,$$

gilt.

3) *Es sei $\sigma_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, und $a \neq 0$, H besitzt keinen Eigenwert, wenn die Bedingungen*

$$\nabla q \cdot (\dot{D}x + a) \leqq 0\,, \quad x \in R^n_+\,, \quad \nabla q \cdot (\dot{D}x + a) \not\equiv 0\,,$$

erfüllt sind.

4) *Es sei $\sigma_{\min} = \min\limits_{1 \leqq i \leqq n} \sigma_i > 0$ und $a = 0$, und es gelte für $x \in R^n_+$*

$$\frac{1}{2\sigma_{\min}} \nabla q \cdot \dot{A}x + q \leqq \lambda_0\,.$$

Dann besitzt H keinen Eigenwert λ, der größer als λ_0 ist.[8])

Beweis. 1) Im Beweis des Satzes 1 wurde gezeigt, daß aus der Gleichung (12) die Beziehung

$$(13) \quad 2\int \sigma_i u_{x_i}^2\, \mathrm{d}x = \int [\nabla q \cdot (\dot{A}x + a)]\, u^2 \varphi\, \mathrm{d}x + o(1)\,, \quad R_1 \to 0\,, \quad R_2 \to \infty\,,$$

folgt; die Voraussetzung (II) wird dabei nicht benötigt. σ_l sei positiv. Ist u_{x_l} nicht identisch Null, so enthält (13) wegen

$$\int [\nabla q \cdot (\dot{A}x + a)]\, u^2 \varphi\, \mathrm{d}x \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad R_1, R_2 > 0$$

einen Widerspruch. Aus $u_{x_l} \equiv 0$ folgt aber $u \equiv 0$, da $u \in L_2(R^n)$ ist.

---

[8]) Werden $\sigma_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, und $A = S$ gesetzt, so ist $\dot{A} = E$ und $\nabla q \cdot \dot{A}x = rq_r$, und man erhält ein bekanntes Resultat (vergl. [8], [3]).

2) Es gilt die Abschätzung

$$(14)\quad \int [\nabla q \cdot (\dot{A}x + a)]\, u^2 \varphi \, \mathrm{d}x + o(1) \geqq 2\sigma_\mu \sum_{\nu=1}^{m} \int u_{x_{i_\nu}}^2 \, \mathrm{d}x \geqq \sigma_\mu \frac{(m-2)^2}{2} \int \frac{u^2}{s^2} \, \mathrm{d}x \,,$$

$$s = (x_{i_1}^2 + \ldots + x_{i_m}^2)^{1/2} \,,$$

und damit auch

$$(15)\quad \int \left[\nabla q \cdot (\dot{A}x + a) - \sigma_\mu \frac{(m-2)^2}{2s^2} \right] u^2 \varphi \, \mathrm{d}x \geqq o(1) \,, \quad R_1 \to 0 \,, \quad R_2 \to \infty \,.$$

Existiert ein Punkt $\bar{x} \neq 0$, wo

$$(16)\quad \nabla q \cdot (\dot{A}x + a) < \sigma_\mu \frac{(m-2)^2}{2s^2}$$

gilt, so gibt es wegen der Stetigkeit der betrachteten Funktionen eine Umgebung

$$K_\eta(\bar{x}) = \{ y \mid |y - \bar{x}| \leqq \eta, \ \eta > 0 \}$$

von $\bar{x}$, wo die Ungleichung (16) ebenfalls gilt. Aus (15) folgt dann, daß die Funktion $u(x)$ in $K_\eta(\bar{x})$ identisch verschwindet. Nach einem Satz über die Eindeutigkeit der Fortsetzung von Lösungen elliptischer Differentialgleichungen (vergl. [2, S. 224]) muß $u(x)$ in ganz R_+^n identisch verschwinden.

Es liege jetzt der Fall

$$\nabla q \cdot (\dot{A}x + a) = \sigma_\mu \frac{(m-2)^2}{2s^2} \,, \quad x \in R_+^n \,,$$

vor. Dann folgt aus (14)

$$\sum_{\nu=1}^{m} \int u_{x_{i_\nu}}^2 \, \mathrm{d}x = \frac{(m-2)^2}{4} \int \frac{u^2}{s^2} \, \mathrm{d}x \,.$$

In

$$\sum_{\nu=1}^{m} \int u_{x_{i_\nu}}^2 \, \mathrm{d}x^{(m)} \geqq \frac{(m-2)^2}{4} \int \frac{u^2}{s^2} \, \mathrm{d}x^{(m)} \,, \quad \mathrm{d}x^{(m)} = \mathrm{d}x_{i_1} \ldots \mathrm{d}x_{i_m} \,,$$

wo über einen m-dimensionalen Teilraum $R^{(m)}$ von R^n integriert wird und die x_j mit $j \neq i_\nu$, $\nu = 1, \ldots, m$, als Parameter auftreten, muß daher für fast alle $y \in R^{(n-m)}$, $R^{(m)} \oplus R^{(n-m)} = R^n$, das Gleichheitszeichen stehen. Das bedeutet aber $u(x) \equiv 0$, da in der Hardyschen Ungleichung nur für die Nullfunktion das Gleichheitszeichen stehen kann.

3) In der Umgebung $K_\eta(\bar{x})$ von $\bar{x}$ sei $\nabla q \cdot (\dot{D}x + a) < 0$. Dann folgt aus (13), daß u in $K_\eta(\bar{x})$ identisch verschwindet. Nach dem erwähnten Fortsetzungssatz ist $u(x) \equiv 0$ in R^n.

4) Die Behauptung folgt aus der Abschätzung

$$2\sigma_{\min}\int(\lambda - q)\, u^2\, dx = 2\sigma_{\min}\int u_{x_i}u_{x_i}\, dx \leqq 2\int \sigma_i u_{x_i}^2\, dx = \int(\nabla q \cdot \dot{A}x)\, u^2\varphi\, dx + o(1),$$

die sich aus (13) ergibt.

Bemerkung. Im Falle $\nabla q \cdot (\dot{D}x + a) \equiv 0$ kann nicht immer auf die Nichtexistenz von Eigenwerten geschlossen werden. Ist z. B. $n = 3$ und

$$D = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau & 0 \\ \sin\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = (1, 0, 0),$$

so zeigen die (ortsgebundenen) Vektoren $\dot{D}x + a$ in Richtung der Tangenten der zur x_1, x_2-Ebene parallelen Kreise, deren Mittelpunkte auf der Geraden $(0, 1, x_3)$, $-\infty < x_3 < +\infty$, liegen. Für rotationssymmetrische Potentiale q mit der Symmetrieachse $(0, 1, x_3)$ ist dann $\nabla q \cdot (\dot{D}x + a) \equiv 0$. Man kann nun leicht Potentiale angeben, so daß Eigenwerte auftreten.

Beispiele. 1) Um den Satz 2 zu veranschaulichen, wählen wir $n = 3$. Es sei $a = 0$ und D die Drehung mit der x_3-Achse als Drehachse,

$$D = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau & 0 \\ \sin\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und S sei die Diagonalmatrix mit den Elementen $s_{ii} = e^{\sigma\tau}$, $\sigma > 0$, $i = 1, 2, 3$, in der Hauptdiagonalen. Dann ist

$$\dot{A} = \dot{D} + \sigma E = \begin{pmatrix} \sigma & -1 & 0 \\ 1 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \dot{A}x = \sigma x + (-x_2, x_1, 0),$$

und $\nabla q \cdot \dot{A}x/|\dot{A}x|$ ist die Ableitung von q in Richtung derjenigen Raumkurven (räumliche Spiralen), die bei der Drehstreckung A in sich übergehen[9]). Ist $q(x)$ auf diesen räumlichen Spiralen fallend (in Richtung wachsenden Abstandes vom Nullpunkt), so existiert nach Satz 2 kein Eigenwert für H.

$\sigma = 0$: Ist A die reine Drehung D, so sind die Bahnkurven der Abbildung A Kreise, deren Mittelpunkte auf der x_3-Achse liegen. Wenn im Sinne des Satzes 2

$$\nabla q \cdot \dot{D}x = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}\, q_t \leqq 0, \quad x \in R_+^n,$$

[9]) Die Darstellung $s_{ii} = 1 + \sigma\tau$ führt zum gleichen Ergebnis; A bildet aber dann nur für $\tau \to 0$ die räumlichen Spiralen auf sich ab.

vorausgesetzt ist, wobei q_t die Ableitung von q in Richtung der Bahnkreise ist, muß jetzt $q_t \equiv 0$ gelten. Auf die Nichtexistenz von Eigenwerten kann nicht mehr geschlossen werden, wie konkrete Beispiele zeigen. Die Beziehung (7) heißt im vorliegenden Fall

$$\int \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}\, q_t u^2 \, dx = 0 .$$

2) $a = 0$ und $A = S$ mit $\sigma_j = \sigma > 0, j = 1, \ldots, m$, und $\sigma_j = 0, j = m + 1, \ldots, n$. Jetzt gilt

$$\nabla q \cdot \dot{S} x = \sigma \varrho q_\varrho ,$$

wenn $\varrho = \sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_m^2)}$ gesetzt ist und q_ϱ die Ableitung in Richtung des Einheitsvektors $\varrho^{-1}(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ bezeichnet. Ist $q_\varrho \leqq 0$, $x \in R_+^n$, so existieren nach Satz 2 keine Eigenwerte für H. Im speziellen Fall $m = 1$, $q_{x_1} \equiv 0$ handelt es sich um translationsinvariante Potentiale. (Vergl. [6] für $m = n$.)

3) Es sei $n = 3$, $a = (0, 0, a_3) \neq 0$ und

$$D = \begin{pmatrix} \cos \tau & -\sin \tau & 0 \\ \sin \tau & \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Vektoren

$$\dot{D} x + a = (-x_2, x_1, a_3)$$

zeigen in Richtung von Schraubenlinien mit der x_3-Achse als Symmetrieachse. Wenn das Potential auf jeder dieser Schraubenlinien konstant ist, gilt offenbar $\nabla q \cdot (\dot{D} x + a) \equiv 0$. Es besteht die Vermutung, daß H mit einem solchen schraubungsinvarianten Potential keinen Eigenwert besitzt.

Zum Schluß soll noch ein Fall angegeben werden, in dem das Spektrum von H genauer beschrieben wird. Wir beweisen folgenden

Satz 3. *Das Potential erfülle folgende Bedingungen:*

1) *$q(x)$, $x \in R^n$, ist nach unten beschränkt.*
2) *$q(x)$ ist in R^n lokal hölderstetig.*
3) *Es existiert in R^n eine Richtung $h \in R^n$, $|h| = 1$, so daß die Richtungsableitung $q_h(x)$ in R^n existiert und stetig ist; im folgenden sei $h = (1, 0, \ldots, 0)$.*
4) *Es gilt $q_h \leqq 0$ für alle $x \in R^n$.*
5) *Die Konvergenz von $q(x)$ gegen*

$$\lim_{\tau \to \infty} q(x + \tau h) = \hat{q}(x)$$

sei gleichmäßig in dem Sinne, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $X_1(\varepsilon)$ existiert, so daß $|q(x) - \hat{q}(x)| < \varepsilon$ gilt für alle $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_1 > X_1(\varepsilon)$.

Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Zahl $\Lambda > -\infty$, so daß das Spektrum von H mit der Halbgeraden $[\Lambda, \infty)$ zusammenfällt, wo es rein stetig ist.

Beweis. 1) Wir zeigen zunächst, daß H keinen Eigenwert besitzt. (I_2) ist erfüllt, da q nach unten beschränkt ist. Die Voraussetzung 2) sichert, daß eine Eigenfunktion $u(x)$ zu $C^2(R^n)$ gehört. Anhand der Betrachtungen, die zur Gleichung (12) führten, überlegt man sich leicht, daß die Voraussetzung (I_1) durch die schwächere Voraussetzung 3) des Satzes 3 ersetzt werden kann; die Gleichung (12) bleibt gültig. Aus dem Satz 2 folgt dann, daß H keinen Eigenwert bestizt: In der Behauptung 3) setze man $D = E$ und $a = (1, 0, \ldots, 0)$. Im Falle $q_{x_i} \equiv 0$ wurde im Beispiel 2) darauf hingewiesen, daß H keinen Eigenwert besitzt.

2) Das Potential des Operators

$$\hat{H} = -\Delta + \hat{q}(x)$$

besitzt die Eigenschaft

$$\hat{q}(x) = \hat{q}(x + \tau h), \quad x \in R^n, \quad -\infty < \tau < +\infty,$$

so daß das Spektrum von $\hat{H}$ mit einer Halbgeraden $[\Lambda, \infty)$ zusammenfällt (vergl. [7]). $\hat{H}$ ist auf $C_0^\infty(R^n)$ wesentlich selbstadjungiert, so daß man für jeden Punkt $\lambda \in [\Lambda, \infty)$ eine Weylsche Folge $\{v_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$, $(v_\nu, v_{\nu'}) = \delta_{\nu\nu'}$, mit finiten Funktionen $v_\nu(x)$ bilden kann. Wegen der Translationsinvarianz von $\hat{q}(x)$ in Richtung x_1 können die Träger der $v_\nu(x)$ so gelegt werden, daß sie sich mit wachsendem ν aus dem Endlichen entfernen. Aus der Abschätzung

$$\|Hv_\nu - \lambda v_\nu\| \leqq \|\hat{H}v_\nu - \lambda v_\nu\| + \|(q - \hat{q})\, v_\nu\|,$$

in der die beiden Summanden auf der rechten Seite mit wachsendem ν gegen Null streben, folgt, daß $\{v_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ auch Weylsche Folge für λ bzgl. H ist. $[\Lambda, \infty)$ liegt also im Spektrum von H, und da für jedes $x \in R^n$ die Ungleichung $q(x) \geqq \hat{q}(x)$ gilt, fällt das Spektrum von H mit der Halbgeraden $[\Lambda, \infty)$ zusammen.

Literatur

[1] *S. Albeverio:* On the bound states in the continuum of N-body systems and the virial theorem, Ann. Physics *71* (1972), 167—276.

[2] *L. Hörmander:* Linear partial differential operators, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1963.

[3] *H. Kalf:* The quantum mechanical virial theorem and the absence of positive energy bound states of Schrödinger operators, Israel. J. Math. (im Druck).

[4] *T. Kato:* Perturbation theory of operators, Berlin—Heidelberg—New York 1966.

[5] *E. Müller-Pfeiffer:* Über die Lokalisierung des wesentlichen Spektrums des Schrödingeroperators, Math. Nachr. *46* (1970), 157—170.

[6] *F. Odeh:* Note on differential operators with a purely continuous spectrum, Proc. Amer. Math. Soc. *16* (1965), 363—366.

[7] *M. Schechter:* Spectra of partial differential operators, Amsterdam—London 1971.

[8] *J. Weidmann:* The virial theorem and its application to the spectral theory of Schrödinger operators, Bull. Amer. Math. Soc. *73* (1967), 452—456.

Anschrift des Verfassers: 69 Jena, Pfälzer Str. 51, DDR.