Czechoslovak Mathematical Journal, 25 (100) 1975, Praha

HOMOMORPHISMEN PROJEKTIVER RÄUME MIT HOMOMORPHISMUS

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 13. Mai 1974)

Alle Homomorphismen projektiver Räume wurden in der Arbeit [4] des Autors durch verallgemeinerte Abbildungen der Vektorräume beschrieben. In [5] definiert der Autor projektive Räume $\mathscr{P}(M)$, $\mathscr{P}(N)$ mit Homomorphismus mit Hilfe freier Moduln M, N über den Stellenringen R, Q und beschreibt hierbei alle projektiven Abbildungen der Räume $\mathscr{P}(M)$, $\mathscr{P}(N)$ durch teilweise semilineare Abbildungen der Moduln M, N.

In der vorliegenden Arbeit werden alle Homomorphismen projektiver Räume mit Homomorphismus algebraisch dargestellt. In der Definition 7 wird eine verallgemeinerte semilineare Abbildung freier Moduln M, N über den Stellenringen R, Q bezüglich gewissen Moduls W eingeführt und in der Definition 8 wird einen Homomorphismus des projektiven Raumes $\mathscr{P}(M)$ mit Homomorphismus in einen projektiven Raum $\mathscr{P}(N)$ mit Homomorphismus definiert. Es wird folgendes Theorem bewiesen: Jede verallgemeinerte semilineare Abbildung der Moduln M, N induziert einen Homomorphismus des Raumes $\mathscr{P}(M)$ in $\mathscr{P}(N)$ und ein jeder solcher Homomorphismus wird durch gewisse verallgemeinerte semilineare Abbildung der Moduln M, N induziert. Dieses Theorem ist die Verallgemeinerung der Ergebnisse aus [4] und [5].

Satz 1. *Ist R ein assoziativer Ring mit Einselement, so sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) *Im Ring R besteht ein einziges maximales Rechtsideal.*

(2) *Die Elemente von R, zu denen keine inversen Elemente (sog. nichtinvertierbare Elemente) bestehen, erzeugen ein von R verschiedenes Ideal.*

Beweis. Siehe [1], Kapitel 3, § 3.7.

Definition 1. Ein Ring R, der die Bedingungen (1), (2) aus Satz 1 erfüllt, heisst ein *Stellenring.*

Bemerkung 1. Das maximale Rechtsideal R_0 eines Stellenringes R ist zweiseitig und bildet die Menge aller nichtinvertierbaren Elemente aus R. Der Restklassenring R/R_0 ist ein Körper. Im weiteren werde $R^* = R \setminus R_0$ bezeichnet. Dann stellt R^* eine multiplikative Gruppe dar.

Definition 2. Es seien R ein Stellenring und R_0 ein maximales Ideal in R. Ein Unterring $\bar{R}$ von R heisst *total* in R, wenn gilt:

(1) $R_0 \subset \bar{R}$.

(2) Für jedes Element $\varrho \in R \setminus \bar{R}$ ist $\varrho^{-1} \in \bar{R}$.

Satz 2. *Ist $\bar{R}$ ein totaler Unterring im Stellenring R, so ist $\bar{R}_0 = R_0 \cup \{\alpha \in \bar{R} \cap \cap R^* \mid \alpha^{-1} \notin \bar{R}\}$ ein Ideal in $\bar{R}$.*

Beweis. 1. Schreiben wir $\bar{R}^* = \bar{R} \setminus \bar{R}_0$. Dann ist $\bar{R}^*$ die Menge aller nichtinvertierbaren Elemente von $\bar{R}$ und daher eine multiplikative Gruppe.

2. Zunächst beweisen wir, dass $\alpha\beta \in \bar{R}_0$ $\forall \alpha \in \bar{R}$ $\forall \beta \in \bar{R}_0$.

a) Es sei $\alpha \in \bar{R}_0$. Liegt wenigstens eins der Elemente α, β in R_0, dann ist auch $\alpha\beta \in \in R_0$, denn R_0 ist ein Ideal in R. Nehmen wir an, dass $\alpha, \beta \in \bar{R}_0 \setminus R_0$. Dann $\alpha, \beta \in R^*$. Es sei dabei $\alpha\beta \in \bar{R}^*$. Setzt man $\gamma = (\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$, dann ist $\gamma \in \bar{R}^*$. So folgt $\gamma\alpha = \beta^{-1} \in \bar{R}$ im Widerspruch zur Annahme $\beta \in \bar{R}_0$.

b) Es sei $\alpha \in \bar{R}^*$. Setzen wir $\gamma = \alpha\beta$ und nehmen wir an, dass $\gamma \in \bar{R}^*$. Dann ergibt sich $\alpha^{-1}\gamma = \beta \in \bar{R}^*$, also ebenfalls ein Widerspruch.

3. Ähnlich wie im Falle 2 können wir beweisen, dass $\beta\alpha \in \bar{R}_0$, $\forall \alpha \in \bar{R}_0$ $\forall \beta \in \bar{R}$.

4. Wir beweisen, dass $\alpha + \beta \in \bar{R}_0$ $\forall \alpha, \beta \in \bar{R}_0$ gilt. Wenn $\alpha, \beta \in R_0$, dann $\alpha + \beta \in \in R_0$. Es seien $\alpha \in \bar{R}_0 \setminus R_0$, $\beta \in R_0$. Dann $\alpha^{-1}\beta \in R_0$ und $1 + \alpha^{-1}\beta \in \bar{R}$. Es gilt $\alpha + \beta = \alpha(1 + \alpha^{-1}\beta)$ und nach 3 dann $\alpha + \beta \in \bar{R}_0$. Es seien $\alpha, \beta \in \bar{R}_0 \setminus R_0$. Dann entweder $\alpha^{-1}\beta \in \bar{R}$ oder $\beta^{-1}\alpha \in \bar{R}$. Wenn etwa $\alpha^{-1}\beta \in \bar{R}$, dann $\alpha + \beta = \alpha(1 + + \alpha^{-1}\beta) \in \bar{R}_0$.

Bemerkung 2. $\bar{R}_0$ aus Satz 2 ist die Menge nichtinvertierbarer Elemente aus $\bar{R}$. Nach Sätzen 1, 2 und Definition 1 stellt $\bar{R}$ einen Stellenring dar. Nach Bemerkung 1 ist $\bar{R}_0$ ein maximales Ideal in $\bar{R}$ und $\bar{R}/\bar{R}_0$ ist ein Körper. Ist R ein Körper, so ist $\bar{R}$ ein totaler Ring in R im Sinne von [6], § 2, Definition 1.

Es liege ein freir unitärer Modul M über einem Stellenring R vor. Es besteht eine Basis $\mathscr{B} = (x_\nu)_{\nu \in J}$ des Moduls M. Im folgenden werde angenommen, dass card $J \geqq 3$. Jedes Element $x \in M$ lässt sich eindeutig in der Form $x = \sum_{\nu \in J} \alpha_\nu x_\nu$, $\alpha_\nu \in R$ schreiben, wo $\alpha_\nu \neq 0$ bloss für endlich viele Indizes ν gilt. Bezeichnen wir mit M_0 die Menge von Elementen $u = \sum_{\nu \in J} \beta_\nu x_\nu$, für die $\beta_\nu \in R_0$ $\forall \nu \in J$ gilt. M_0 ist ein Untermodul von M. Weiter setzen wir $M^* = M \setminus M_0$.

Bemerkung 3. Einen durch ein Element $x \in M$ erzeugten Untermodul aus M bezeichnen wir mit Rx. Der Untermodul M_0 ist von der Wahl der Basis $\mathscr{B}$ abhängig. Im weiteren wird vorausgesetzt, dass im Modul M eine feste Basis $\mathscr{B}$ gewählt ist und M_0, M^* mit Hilfe dieser Basis definiert werden. Aus der Definition von M_0, M^* ergeben sich folgende Beziehungen:

(1) $\alpha x \in M_0 \quad \forall \alpha \in R_0 \ \forall x \in M$

$\alpha x \in M_0, \ x \in M^* \Rightarrow \alpha \in R_0$

$\alpha x \in M_0, \ \alpha \in R^* \ \Rightarrow x \in M_0$

(2) *Es gilt* $\varrho x = 0 \Leftrightarrow \varrho = 0$ *für* $x \in M^*$, $\varrho \in R$ ([5], Satz 2).

Setzen wir $R' = R/R_0$, $M' = M/M_0$ und $\bar{\varrho} \in R'$, $\bar{x} \in M'$ für $\varrho \in R$, $x \in M$. Wegen der Operation $\bar{\varrho}\bar{x} = \overline{\varrho x} \ \forall \bar{\varrho} \in R' \ \forall x \in M'$ ist M' ein Vektorraum über dem Körper R'. M' heisst dann ein dem Modul M zugeordneter Vektorraum (Siehe [5]).

Definition 3. Eine Menge $S \subset M$ ist *R-abhängig*, wenn eine endliche Untermenge $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset S$ und Elemente $\varrho_1, \ldots, \varrho_n \in R$ bestehen, von denen mindestens eins in R^* liegt derart, dass $\sum_{i=1}^{n} \varrho_i a_i \in M_0$. Anderenfalls ist die Menge S *R-unabhängig*.

Nach Sätzen 3 und 4 aus [5] ergeben sich folgende Behauptungen:

(3) *Es gebe* $a = \varrho_1 x + \varrho_2 y$, *wo* x, y *R-unabhängig sind. Die Elemente* a, x *und* a, y *sind dann und nur dann R-unabhängig, wenn* $\varrho_1, \varrho_2 \in R^*$.

(4) *Sind die Elemente* x, y *und* y, z *R-abhängig, dann sind auch* x, z *R-abhängig. Sind die Elemente* x, y *R-unabhängig,* x, z *R-abhängig und* $z \in M^*$, *dann sind* y, z *R-unabhängig.*

Bemerkung 4. Die Basis $\mathscr{B}$ des Moduls M ist eine R-unabhängige Menge. Ist M ein Vektorraum über dem Körper R, so ist die R-Abhängigkeit linear.

Definition 4. Jeder Untermodul $X = Rx$, $x \in M^*$ heisst ein *Punkt*. Punkte Rx, Ry sind *R-verschieden* genau dann, wenn die Elemente x, y R-unabhängig sind. Anderenfalls sind die Punkte Rx, Ry *R-identisch*. Jeder Untermodul $p = Rx + Ry$, wo Rx, Ry R-verschiedene Punkte sind, heisst eine *Gerade*. Punkte Rx, Ry, Rz sind genau dann *R-nichtkolinear*, wenn die Elemente x, y, z R-unabhängig sind. Sonst sind Rx, Ry, Rz *R-kolinear*. Die Geraden p, q sind *R-verschieden*, wenn es Punkte $X, Y \subset p$, $Z \subset q$ gibt, die R-nichtkolinear sind. Sonst sind die Geraden p, q *R-identisch*.

Definition 5. Ein *projektiver Raum* $\mathscr{P}(M)$ *mit Homomorphismus* ist die Menge $\mathscr{B}(M)$ aller Punkte und die Menge aller Geraden aus Definition 4, wobei die Inzidenz als Inklusion definiert wird.

Definition 6. Ein projektiver Raum $\mathscr{P}(M')$, wo M' ein dem M zugeordneter Vektorraum ist, heisst dem $\mathscr{P}(M)$ *zugeordneter projektiver Raum.*

Aus Definition 4 und (4) erhalten wir

(5) *Sind die Punkte Rx, Ry und zugleich Ra, Ry R-identisch, so sind Rx, Ra R-identisch. Sind die Punkte Rx, Ry R-verschieden und Rx, Rz R-identisch, so sind Ry, Rz R-verschieden.*

(6) *Sind die Punkte Ra, Rb, Rc R-nichtkolinear, Ra, Rb, Ru R-kolinear und Ra, Ru R-verschieden, so sind Ra, Rc, Ru R-nichtkolinear.*

Beweis. Die Elemente a, b, u sind R-abhängig und nach Definition 3 gibt es daher Elemente $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in R$ von denen mindestens eins in R^* liegt derart, dass $\xi_1 a + \xi_2 b + \xi_3 u = m$, $m \in M_0$ ist. Nehmen wir an, dass $\xi_3 \in R_0$. Somit $\xi_1 a + \xi_2 b = m - \xi_3 u \in M_0$. Mindestens eins der Elemente ξ_1, ξ_2 liegt in R^* und Elemente a, b sind R-abhängig im Widerspruch zur Annahme, dass Ra, Rb, Rc R-nichtkolinear sind. Somit gilt $\xi_3 \in R^*$ und $u = \xi_3^{-1} m - \xi_3^{-1}\xi_1 a - \xi_3^{-1}\xi_2 b = m' - \gamma_1 a - \gamma_2 b$, wo $m' = \xi_3^{-1} m \in M_0$, $\gamma_1 = \xi_3^{-1}\xi_1$, $\gamma_2 = \xi_3^{-1}\xi_2$. Nehmen wir weiter an, dass die Elemente a, c, u R-abhängig sind. Dann gibt es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, von denen mindestens eins in R^* liegt derart, dass $\alpha_1 a + \alpha_2 c + \alpha_3 u = n$, $n \in M_0$. Aus der R-Unabhängigkeit der Elemente a, u folgt wieder, dass $\alpha_2 \in R^*$ ist. Weiter gilt $n = \alpha_1 a + \alpha_2 c + \alpha_3(m' - \gamma_1 a - \gamma_2 b)$ folglich $(\alpha_1 - \alpha_3\gamma_1) a - \alpha_3\gamma_2 b + \alpha_2 c \in M_0$. Man hat somit einen Widerspruch, denn die Elemente a, b, c sind R-unabhängig. Die Elemente a, c, u sind also R-unabhängig und Punkte Ra, Rb, Rc R-nichtkolinear.

(7) *Sind die Punkte Ra, Rb, Rc bzw. Ra, Rb, Ru R-kolinear und Ra, Rb R-verschieden, so sind Ra, Rc, Ru R-kolinear.*

Beweis. Nehmen wir an, dass die Punkte Ra, Rc, Ru R-nichtkolinear sind. Da Ra, Rb, Rc R-kolinear und Ra, Rb R-verschieden sind, gilt laut (6), dass Ra, Rb, Ru R-nichtkolinear sind, woraus sofort ein Widerspruch folgt.

(8) *Sind die Punkte Ra, Rb, Rc R-kolinear, Ra, Rb und Ra, Rc R-verschieden, so sind die Geraden $Ra + Rb$, $Ra + Rc$ R-identisch.*

Beweis. Wir wollen beweisen, dass drei beliebige Punkte Rx, Ry, Ru, wo $Rx, Ry \subset Ra + Rb$, $Ru \subset Ra + Rc$, R-kolinear sind.

a) Die Punkte Ra, Rc, Ru und Ra, Rb, Rc sind R-kolinear und Ra, Rc R-verschieden. Laut (7) sind Ra, Rb, Ru R-kolinear.

b) Die Punkte Ra, Rb, Rx sind R-kolinear und nach a) sind Ra, Rb, Ru R-kolinear. Dabei sind Ra, Rb R-verschieden. Laut (7) sind die Punkte Ra, Rx, Ru R-kolinear sowie auch Rb, Rx, Ru.

c) Nehmen wir an, dass die Punkte Ra, Rx R-verschieden sind. Die Punkte Ra, Rx, Ry sind R-kolinear und nach b) sind Ra, Rx, Ru R-kolinear. Laut (7) sind Rx, Ry, Ru R-kolinear.

d) Es seien die Punkte Ra, Rx R-identisch. Dann sind laut (5) Rb, Rx R-verschieden. Die Punkte Rb, Rx, Ry sind R-kolinear und nach b) sind Rb, Rx, Ru R-kolinear. Laut (7) sind Ry, Rx, Ru R-kolinear.

(9) *Die Punkte Ra, Rb, Rc seien R-nichtkolinear, Ra, Ru R-verschieden und $Ru \subset Ra + Rb$. Dann sind Ra, Rc, Ru R-nichtkolinear und Ru, Rv R-verschieden für jeden beliebigen Punkt $Rv \subset Ra + Rc$.*

Beweis. a) Die Punkte Ra, Rc, Ru sind R-nichtkolinear laut (6).

b) Nehmen wir an, die Punkte Ru, Rv sind R-identisch. Laut (5) sind Ra, Rv R-verschieden und Ra, Ru, Rv R-kolinear. Da Ra, Rb, Ru R-kolinear und Ra, Ru R-verschieden sind, sind laut (7) Ra, Rb, Rv R-kolinear. Weiter sind Ra, Rc, Rv R-kolinear und Ra, Rv R-verschieden. Laut (7) sind Ra, Rb, Rc R-kolinear, was einen Widerspruch enthält.

Die Beweise der nachstehenden Sätze 3 und 4 wurden in [5] durchgeführt (Sätze 8, 9 und 12).

Satz 3. *Die Punkte Rx, Ry seien R-verschieden. Dann geht durch diese eine einzige Gerade und es gilt $Rx \cap Ry = 0$.*

Satz 4. *Für alle R-unabhängige Elemente $x, y, z \in M$ gilt*:

(a) $R(y - z) = (Ry + Rz) \cap [R(x - y) + R(x - z)]$.

(b) $R(x - y - z) = [R(x - y) + Rz] \cap [R(x - z) + Ry]$.

(c) $R(y + z) = (Ry + Rz) \cap [R(x - y - z) + Rx]$.

Gegeben sei ein weiterer freier Modul N über dem Stellenring Q, dessen maximales Ideal wir mit Q_0 bezeichnen und $Q^* = Q \setminus Q_0$. Definieren wir den Untermodul N_0 mit Hilfe einer gewissen Basis von Modul N und $N^* = N \setminus N_0$ sowie M_0, M^* für den Modul M. Bezeichnen wir mit $\mathscr{P}(N)$ den entsprechenden projektiven Raum mit Homomorphismus, mit N' den zum Modul N zugeordneten Vektorraum über dem Körper $Q' = Q/Q_0$ und mit $\mathscr{P}(N')$ den zu $\mathscr{P}(N)$ zugeordneten projektiven Raum.

Definition 7. M, N seien freie Moduln über den Stellenringen R, Q und $\bar{R}$ ein totaler Unterring in R mit dem maximalen Ideal $\bar{R}_0$, $\bar{R}^* = \bar{R} \setminus \bar{R}_0$ und $W \subset M$ ein Modul über $\bar{R}$ derart, dass $M_0 \subset W$. Ein Paar (φ, σ) der Abbildungen $\varphi : \bar{R} \to Q$, $\sigma : W \to N$ heisst verallgemeinerte semilineare Abbildung der Moduln M, N im bezug auf den Modul W, wenn es gilt:

(1) $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma \ \forall a, b \in W$

(2) $(\varrho a)^\sigma = \varrho^\varphi a^\sigma \ \forall \varrho \in \bar{R} \ \forall a \in W$

(3) $\varrho^\varphi \in Q_0 \Leftrightarrow \varrho \in \bar{R}_0, \ a^\sigma \in N_0 \ \forall a \in M_0$

(4) In jedem Untermodul $Ra \subset M$, $a \in M^*$ gibt es ein Element $b \in W$ derart, dass $b^\sigma \in N^*$.

(5) In jedem Untermodul $Ra + Rb$, wo a, b R-unabhängig sind, gibt es Elemente $u, v \in W$ derart, dass u^σ, v^σ Q-unabhängig sind.

(6) Es bestehen Elemente $x, y, z \in W$ derart, dass $x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma$ Q-unabhängig sind.

Setzen wir $W^* = \{u \in W \mid u^\sigma \in N^*\}$, $W_0 = \{u \in W \mid u^\sigma \in N_0\}$. Dann ist $W = W^* \cup W_0$ und nach (3) aus der Definition 7 gilt $W^* \subset M^*$.

(10) W_0 is ein Untermodul von W: Aus $a, b \in W_0$ folgt $a^\sigma, b^\sigma \in N_0$, $a^\sigma + b^\sigma = (a + b)^\sigma \in N_0$ und daraus $a + b \in W_0$. Wenn $a \in W_0$, $\varrho \in \bar{R}$, dann gilt $a^\sigma \in N_0$, $(\varrho a)^\sigma = \varrho^\varphi a^\sigma \in N_0$ und daraus $\varrho a \in W_0$.

(11) Aus der Definition 7 und nach (1) ergibt sich $\varrho u \in W_0$ $\forall \varrho \in \bar{R}_0$ $\forall u \in W$; $u \in W^*$, $\varrho \in \bar{R}^* \Rightarrow \varrho u \in W^*$.

(12) Es gilt $\varrho u \in W^*$, $u \in W^*$, $\varrho \in R \Rightarrow \varrho \in \bar{R}^*$: Nehmen wir an, dass $\varrho \notin \bar{R}$. Dann ist $\varrho^{-1} \in \bar{R}_0$ und es gilt $u^\sigma = (\varrho^{-1}\varrho u)^\sigma = [\varrho^{-1}(\varrho u)]^\sigma = (\varrho^{-1})^\varphi (\varrho u)^\sigma \in N_0$ denn $(\varrho^{-1})^\varphi \in Q_0$, was jedoch zum Widerspruch führt. Somit ist $\varrho \in \bar{R}$ und wegen $\varrho^\varphi u^\sigma \in N^*$ gilt $\varrho \in \bar{R}^*$.

Satz 5. *Es sei (φ, σ) eine verallgemeinerte halblineare Abbildung der Moduln M, N in bezug auf den Modul W und es gebe $a, b, c \in W$. Sind die Elemente a^σ, b^σ, c^σ Q-unabhängig, dann sind a, b, c R-unabhängig.*

Beweis. Da die Elemente $a^\sigma, b^\sigma, c^\sigma$ Q-unabhängig sind, gilt $a^\sigma, b^\sigma, c^\sigma \in N^*$ und folglich $a, b, c \in W^*$. Nehmen wir an, dass a, b, c R-abhängig sind. Nach Definition 3 existieren Elemente $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in R$ derart, dass $\xi_1 a + \xi_2 b + \xi_3 c = m$, $m \in M_0$, wo etwa $\xi_1 \in R^*$ ist. Dann ist $a + \xi_1^{-1}\xi_2 b + \xi_1^{-1}\xi_3 c = \xi_1^{-1} m$. Setzen wir $\xi_1^{-1}\xi_2 = \varrho_2$, $\alpha_1^{-1}\xi_3 = \varrho_3$, $\xi_1^{-1} m = m' \in M_0$.

a) Es seien $\varrho_2, \varrho_3 \in \bar{R}$. Dann $\varrho_2 b, \varrho_3 c \in W$. Nach den Voraussetzungen (1), (2), (3) aus Definition 7 folgt $a^\sigma + \varrho_2^\varphi b^\sigma + \varrho_3^\varphi c^\sigma \in N_0$. Nach Definition 3 sind die Elemente $a^\sigma, b^\sigma, c^\sigma$ Q-abhängig, was ein Widerspruch ist.

b) Es seien $\varrho_2 \in \bar{R}$, $\varrho_3 \notin \bar{R}$. Dann $\varrho_3^{-1} \in \bar{R}_0 \cap R^*$. So folgt $\varrho_3^{-1} a + \varrho_3^{-1}\varrho_2 b + c = \varrho_3^{-1} m'$ und $(\varrho_3^{-1})^\varphi a^\sigma + (\varrho_3^{-1}\varrho_2)^\varphi b^\sigma + c^\sigma \in N_0$ also ebenfalls ein Widerspruch zur Annahme.

c) Es seien $\varrho_2, \varrho_3 \notin \bar{R}$. Sodann gilt entweder $\varrho_2^{-1}\varrho_3 \in \bar{R} \cap R^*$ oder $\varrho_3^{-1}\varrho_2 \in \bar{R} \cap R^*$. Nun werde angenommen, dass $\varrho_2^{-1}\varrho_3 \in \bar{R} \cap R^*$ gilt. Hieraus $\varrho_2^{-1} a + b + \varrho_2^{-1}\varrho_3 c = \varrho_2^{-1} m'$. Wegen $\varrho_2^{-1} \in \bar{R}$ gilt $(\varrho_2^{-1})^\varphi a^\sigma + b^\sigma + (\varrho_2^{-1}\varrho_3)^\varphi c^\sigma \in N_0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Satz 6. *Die Abbildung $\varphi : \bar{R} \to Q$ aus Definition 7 ist ein Homomorphismus des Ringes $\bar{R}$ in Q.*

Beweis. Wählen wir ein beliebiges Element $a \in W^*$. Nach den Voraussetzungen (1), (2) aus Definition 7 ergibt sich für beliebige $\alpha, \beta \in \bar{R}$: $[(\alpha + \beta)\, a]^\sigma = (\alpha + \beta)^\varphi a^\sigma = (\alpha a + \beta a)^\sigma = (\alpha a)^\sigma + (\beta a)^\sigma = \alpha^\varphi a^\sigma + \beta^\varphi a^\sigma = (\alpha^\varphi + \beta^\varphi)\, a^\sigma$. Nach (2) gilt dann $(\alpha + \beta)^\varphi = \alpha^\varphi + \beta^\varphi$. Analog hierzu $[(\alpha\beta)\, a]^\sigma = (\alpha\beta)^\varphi a^\sigma = [\alpha(\beta a)]^\sigma = \alpha^\varphi(\beta a)^\sigma = \alpha^\varphi \beta^\varphi a^\sigma$ und daraus $(\alpha\beta)^\varphi = \alpha^\varphi \beta^\varphi$.

Bemerkung 5. Schreiben wir $W^\sigma = \{v \in N \mid \exists u \in W, u^\sigma = v\}$, $\bar{R}^\varphi = \{\xi \in Q \mid \exists \varrho \in \bar{R}, \varrho^\varphi = \xi\}$. Nach Satz 6 ist $\bar{R}^\varphi$ ein Ring. $\bar{R}^\varphi$ ist ein Stellenring, dessen maximales Ideal ist $\bar{R}_0^\varphi$ und $\bar{R}_0^\varphi \subset Q_0$. W^σ ist dann ein Modul über dem Stellenring $\bar{R}^\varphi$. Ist Q ein Körper, so $Q_0 = 0$, $\bar{R}_0^\varphi = 0$ und $\bar{R}^\varphi$ ist ein Körper. W^σ ist dann ein Vektorraum.

Bemerkung 6. Sind M, N Vektorräume, so ist das Paar (φ, σ) aus Definition 7 eine verallgemeinerte semilineare Abbildung der Vektorräume M, N in bezug auf den Modul W aus [4], Definition 2. Die teilweise semilineare Abbildung der Moduln M, N aus [5], Definition 5, stellt auch einen Spezialfall der verallgemeinerten semilinearen Abbildung der Moduln M, N in bezug auf W dar.

Bemerkung 7. Betrachten wir einen zum Modul M zugeordneten Vektorraum M' und $W, \bar{R}, \bar{R}_0$ seien aus Definition 7. Setzen wir $W' = W/M_0$, $\mathscr{R} = \bar{R}/\bar{R}_0$. Danach $W' \subset M'$ und $\mathscr{R} \subset R'$. $\mathscr{R}$ ist ein totaler Ring im Körper R' und $\mathscr{R}_0 = \bar{R}_0/R_0$ ein maximales Ideal in $\mathscr{R}$. Wegen der Operation $\bar{\varrho}\bar{a} = \overline{\varrho a}$ $\forall \bar{\varrho} \in \mathscr{R}$ $\forall a \in W'$ ist W' ein Modul über dem Ring $\mathscr{R}$. Es sei (φ, σ) eine verallgemeinerte semilineare Abbildung der Moduln M, N in bezug auf W. Wenn $\bar{x}^{\bar{\sigma}} = \overline{x^\sigma}$ $\forall x \in W'$ und $\bar{\varrho}^{\bar{\varphi}} = \varrho^\varphi$ $\forall \bar{\varrho} \in \mathscr{R}$ gesetzt wird, so ist $(\bar{\varphi}, \bar{\sigma})$ eine verallgemeinerte semilineare Abbildung der Vektorräume M', N' in bezug auf den Modul W' im Sinne von [4]. Jeder verallgemeinerten semilinearen Abbildung (φ, σ) der Moduln M, N in bezug auf W lässt sich also eine verallgemeinerte semilineare Abbildung $(\bar{\varphi}, \bar{\sigma})$ der Vektorräume M', N' in bezug auf Modul W' zuordnen.

Definition 8. Seien M, N freie Moduln über den Stellenringen R, Q und $\mathscr{P}(M), \mathscr{P}(N)$ projektive Räume mit Homomorphismus laut Definition 5. Eine Abbildung $\varkappa$ der Punktmenge $\mathscr{B}(M)$ aus $\mathscr{P}(M)$ in die Punktmenge $\mathscr{B}(N)$ aus $\mathscr{P}(N)$ heisst der Homomorphismus des projektiven Raumes $\mathscr{P}(M)$ mit Homomorphismus in $\mathscr{P}(N)$, wenn es gilt:

(1) Auf jeder Geraden in $\mathscr{P}(M)$ liegen die Punkte A, B, C derart, dass die Punkte $A^\varkappa, B^\varkappa, C^\varkappa$ untereinander Q-verschieden sind.

(2) Liegen die Punkte A, B, C auf einer Gerade in $\mathscr{P}(M)$, so liegen auch die Punkte $A^\varkappa, B^\varkappa, C^\varkappa$ auf einer Gerade in $\mathscr{P}(N)$.

(3) Es gebe $A, B, C \in \mathscr{B}(M)$. Wenn die Punkte $A^\varkappa, B^\varkappa, C^\varkappa$ Q-nichtkolinear sind, dann sind die Punkte A, B, C R-nichtkolinear.

(4) Es bestehen solche Punkte $A, B, C \in \mathscr{B}(M)$, dass die Punkte $A^\varkappa, B^\varkappa, C^\varkappa$ Q-nichtkolinear sind.

Bemerkung 8. Es sei $\mathscr{P}(M')$ ein zu $\mathscr{P}(M)$ zugeordneter projektiven Raum. Dann ist die Abbildung $\varkappa : Rx \to R'\bar{x}$, $Rx \in \mathscr{B}(M)$ ein Homomorphismus $\mathscr{P}(M)$ auf $\mathscr{P}(M')$. Die Punkte Rx, Ry sind genau dann R-verschiedenen, wenn $(Rx)^\varkappa \neq (Ry)^\varkappa$. Wenn $\mathscr{B}$ die Basis von M ist und card $J = n$, dann ist $\mathscr{P}(M)$ ein projektiver Raum mit Homomorphismus endlicher Dimension bzw. eine Desarguessche projektive Ebene mit Homomorphismus aus [2], [3].

Satz 7. *Jede verallgemeinerte semilineare Abbildung (φ, σ) der Moduln M, N in bezug auf den Modul W induziert einen Homomorphismus $\varkappa : \mathscr{P}(M) \to \mathscr{P}(N)$ durch die Vorschrift $(Rx)^\varkappa = Qx^\sigma$ $\forall x \in W^*$.*

Beweis. 1. Wir beweisen, dass $\varkappa$ die Abbildung $\mathscr{B}(M)$ in $\mathscr{B}(N)$ ist: Wählen wir einen beliebigen Punkt $X = Ra$. Gemäss (4) aus Definition 7 besteht $x \in Ra \cap W^*$. Es gilt $x = \alpha a$ und nach (1) ist $\alpha \in R^*$, d. h. $a = \alpha^{-1}x$. Daher gilt $Ra = Rx = X$. Es sei $y \in Rx$ und $y \in W^*$. So ergibt sich wieder $y = \varrho x$, $\varrho \in R^*$. Wegen $x, y \in W^*$ erhalten wir nach (12) $\varrho \in \bar{R}^*$. Nach (2) aus Definition 7 folgt $y^\sigma = (\varrho x)^\sigma = \varrho^\varphi x^\sigma$ und $y^\sigma \in N^*$, $\varrho^\varphi \in Q^*$. Danach ergibt sich $Qx^\sigma = Qy^\sigma$ und $(Rx)^\varkappa = (Ry)^\varkappa = X^\varkappa$.

2. Wir beweisen die Gültigkeit von (1) aus Definition 8: Es liege eine beliebige Gerade $p = Ra + Rb$ in $\mathscr{P}(M)$ vor. Laut (5) aus Definition 7 gibt es derartige Elemente $u, v \in W \cap p$, wo u^σ, v^σ Q-unabhängig sind. Nach Satz 5 sind u, v R-unabhängig und nach Satz 3 gilt $p = Ru + Rv$. Nach (3) sind $u^\sigma + v^\sigma, u^\sigma$ und $u^\sigma + v^\sigma, v^\sigma$ Q-unabhängig und folglich $u^\sigma + v^\sigma \in N^*$. Nach (1) aus Definition 7 gilt $(u + v)^\sigma = u^\sigma + v^\sigma$ und somit $u + v \in W^*$. Die Punkte $Ru, Rv, R(u + v)$ liegen auf der Geraden p und $(Ru)^\varkappa = Ru^\sigma$, $(Rv)^\varkappa = Rv^\sigma$, $[R(u + v)]^\varkappa = Q(u + v)^\sigma = Q(u^\sigma + v^\sigma)$ sind miteinander Q-verschieden.

3. Wir beweisen die Eigenschaft (2) aus Definition 8: Die Punkte Rx, Ry, Ru mögen auf der Geraden p liegen.

a) Zunächst werde vorausgesetzt, dass die Punkte $(Rx)^\varkappa = Qx^\sigma$, $(Ry)^\varkappa = Qy^\sigma$, $(Ru)^\varkappa = Qu^\sigma$ miteinander Q-verschieden sind. Dann sind die Elemente x^σ, y^σ bzw. x^σ, u^σ bzw. y^σ, u^σ Q-unabhängig. Nach Satz 5 sind die Elemente x, y bzw. x, u bzw. y, u Q-unabhängig und die Punkte Rx, Ry, Ru miteinander R-verschieden. Es gilt $Ru \subset Rx + Ry$ und es existieren daher $\alpha, \beta \in R$ derart, dass $u = \alpha x + \beta y$. Nach (3) ist $\alpha, \beta \in R^*$ und folglich $\alpha^{-1}u = x + \alpha^{-1}\beta y$. Es gebe $\alpha^{-1}\beta \in \bar{R}$. Da x^σ, y^σ Q-unabhängig sind, folgt $(\alpha^{-1}u)^\sigma \in N^*$ und $\alpha^{-1}u \in W^*$. Nach (12) ist $\alpha^{-1} \in \bar{R}^*$ und nach (3) aus Definition 7 ist $(\alpha^{-1})^\varphi \in Q^*$. Hierbei $(\alpha^{-1}u)^\sigma = (\alpha^{-1})^\varphi u^\sigma$. Somit gilt $Qu^\sigma = [Q(\alpha^{-1})^\varphi]\, u^\sigma = Q(\alpha^{-1})^\varphi u^\sigma = Q(\alpha^{-1}u)^\sigma \subset Qx^\sigma + Qy^\sigma$ und $(Ru)^\varkappa \subset$ $\subset (Rx)^\varkappa + (Ry)^\varkappa$. Es werde vorausgesetzt, dass $\alpha^{-1}\beta \notin \bar{R}$ gilt. Dann ist $\beta^{-1}\alpha \in \bar{R}$. Betrachten wir das Element $\beta^{-1}u = \beta^{-1}\alpha x + y$ und ganz ähnlich wie im vorigen Falle beweisen wir, dass $(Ru)^\varkappa \subset (Rx)^\varkappa + (Ry)^\varkappa$.

b) Es werde vorausgesetzt, dass z. B. $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa$ Q-identische und $(Rx)^\varkappa, (Ru)^\varkappa$ Q-verschiedene Punkte sind. Nach Fall 2 existiert auf der Geraden p ein Punkt Rz

derart, dass $(Rx)^\varkappa, (Ru)^\varkappa, (Rz)^\varkappa$ miteinander Q-verschieden sind. Nach (5) sind auch $(Ry)^\varkappa, (Ru)^\varkappa, (Rz)^\varkappa$ Q-verschieden. Nach a) gilt dann $(Rx)^\varkappa \subset (Ru)^\varkappa + (Rz)^\varkappa$ und $(Ry)^\varkappa \subset (Ru)^\varkappa + (Rz)^\varkappa$. Die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ru)^\varkappa$ liegen auf der Geraden $(Ru)^\varkappa + (Rz)^\varkappa$.

c) Nehmen wir an, dass die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ru)^\varkappa$ Q-identisch sind. Wählen wir solche Punkte Rv, Rz auf der Geraden p, dass $(Rx)^\varkappa, (Rv)^\varkappa, (Rz)^\varkappa$ miteinander Q-verschieden sind. Ähnlich wie in b) beweisen wir, dass $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ru)^\varkappa$ auf der Geraden $(Rv)^\varkappa + (Rz)^\varkappa$ liegen.

4. Gegeben seien die Punkte Rx, Ry, Rz derart, dass $(Rx)^\varkappa = Qx^\sigma$, $(Ry)^\varkappa = Qy^\sigma$, $(Rz)^\varkappa = Qz^\sigma$ Q-nichtkolinear sind. Dann sind $x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma$ Q-unabhängig. Nach Satz 5 sind x, y, z R-unabhängig und Rx, Ry, Rz R-nichtkolinear.

5. Die Forderung (4) aus Definition 8 ist infolge der Forderung (6) aus Definition 7 erfüllt.

Theorem. *Jeder Homomorphismus $\varkappa$ des projektiven Raumes $\mathscr{P}(M)$ mit Homomorphismus in den projektiven Raum $\mathscr{P}(N)$ mit Homomorphismus ist, im Sinne des Satzes 7, durch die verallgemeinerte semilineare Abbildung der Moduln M, N in bezug auf einen gewissen Modul W induziert.*

Da der Beweis des Theorems umfangreich ist, beweisen wir zuerst die Gültigkeit einer ganzen Reihe von Sätzen, von denen sich dann die Behauptung des Theorems ergibt. Im weiteren wird vorausgesetzt, dass $\varkappa$ ein Homomorphismus $\mathscr{P}(M)$ in $\mathscr{P}(N)$ ist.

Satz 8. *Es seien die Elemente $u, v, w \in M$ R-unabhängig und die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa, (Rw)^\varkappa$ Q-nichtkolinear. Wenn die Punkte $[R(u - w)]^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ Q-verschieden sind, so sind auch $(Rw)^\varkappa$, $[R(u - v - w)]^\varkappa$ Q-verschieden.*

Beweis. Setzen wir $q = u - v - w$ und nehmen wir an, dass die Punkte $(Rw)^\varkappa$, $(Rq)^\varkappa$ Q-identisch sind. Da die Punkte $(Rw)^\varkappa, (Rv)^\varkappa$ Q-verschieden sind, sind nach (5) $(Rv)^\varkappa, (Rq)^\varkappa$ Q-verschieden. Da $(Rv)^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$, $(Rq)^\varkappa$ Q-kolinear sind, sind nach (8) die Geraden $(Rv)^\varkappa + (Rw)^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa + (Rq)^\varkappa$ Q-idetisch. Aus Satz 4 folgt $R(u - w) \subset Rq + Rv$ und nach Definition 8 ist $[R(u - w)]^\varkappa \subset (Rq)^\varkappa + (Rv)^\varkappa$. Da die Punkte $[R(u - w)]^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ Q-verschieden sind, sind nach (9) $(Rv)^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ $[R(u - w)]^\varkappa$ Q-nichtkolinear, woraus sich ein Widerspruch ergibt, denn die Geraden $(Rv)^\varkappa + (Rw)^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa + (Rq)^\varkappa$ sind Q-identisch. Die Punkte $(Rw)^\varkappa, (Rq)^\varkappa$ sind also Q-verschieden.

Satz 9. *Es seien die Elemente $u, v, w \in M$ R-unabhängig, die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa, (Rw)^\varkappa$ Q-nichtkolinear und $[R(u - v)]^\varkappa$, $(Ru)^\varkappa$ Q-verschieden.*

1. *Wenn die Punkte $[R(u - w)]^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ Q-verschieden sind, so sind $[R(v - w)]^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ bzw. $[R(v + w)]^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ Q-verschieden.*

2. *Wenn die Punkte* $[R(u-w)]^\varkappa$, $(Ru)^\varkappa$ *Q-identisch sind, so sind auch* $[R(v-w)]^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa$ *bzw.* $[R(v+w)]^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa$ *Q-identisch.*

Beweis. 1. a) Seien die Punkte $[R(u-w)]^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ Q-verschieden und werde vorausgesetzt, dass $[R(v-w)]^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ Q-identisch sind. Nach (5) sind $[R(u-w)]^\varkappa$, $[R(v-w)]^\varkappa$ Q-verschieden. Die Punkte $(Rw)^\varkappa$, $[R(u-w)]^\varkappa$, $[R(v-w)]^\varkappa$ sind Q-kolinear und nach (8) sind die Geraden $[R(u-w)]^\varkappa + (Rw)^\varkappa$, $[R(u-w)]^\varkappa + [R(v-w)]^\varkappa$ Q-identisch. Wegen $Ru \subset R(u-w) + Rw$ gilt $(Ru)^\varkappa \subset [R(u-w)]^\varkappa + (Rw)^\varkappa$. Auf Grund des Satzes 4 gilt $R(u-v) \subset R(u-w) + R(v-w)$ und daher $[R(u-v)]^\varkappa \subset [R(u-w)]^\varkappa + [R(v-w)]^\varkappa$. Da $(Ru)^\varkappa$, $[R(u-v)]^\varkappa$ Q-verschieden sind, sind nach (9) $(Ru)^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$, $[R(u-v)]^\varkappa$ Q-nichtkolinear. Dies ist jedoch ein Widerspruch, denn die Geraden sind $[R(u-w)]^\varkappa + (Rw)^\varkappa$, $[R(u-w)]^\varkappa + [R(v-w)]^\varkappa$ Q-identisch. Die Punkte $[R(v-w)]^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ sind also Q-verschieden.

b) Nun werde vorausgesetzt, dass die Punkte $(Rw)^\varkappa$, $[R(v+w)]^\varkappa$ Q-identisch sind. Nach Satz 8 sind $(Rw)^\varkappa$, $(Rq)^\varkappa$ Q-verschieden und nach (5) sind dann $(Rq)^\varkappa$, $[R(v+w)]^\varkappa$ Q-verschieden. Nach (8) sind die Geraden $(Rq)^\varkappa + (Rw)^\varkappa$, $(Rq)^\varkappa + [R(v+w)]^\varkappa$ Q-identisch. Auf Grund des Satzes 4 und der Definition 8 gilt $[R(u-v)]^\varkappa \subset (Rq)^\varkappa + (Rw)^\varkappa$, $(Ru)^\varkappa \subset (Rq)^\varkappa + [R(v+w)]^\varkappa$. Nach a) sind die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$, $[R(u-v)]^\varkappa$ Q-nichtkolinear, also ebenfalls ein Widerspruch. Die Punkte $(Rw)^\varkappa$, $[R(v+w)]^\varkappa$ sind mithin Q-verschieden.

2. a) Die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $[R(u-w)]^\varkappa$ sind Q-identisch, $(Ru)^\varkappa$, $[R(u-v)]^\varkappa$ Q-verschieden; die Punkte $[R(u-v)]^\varkappa$, $[R(u-w)]^\varkappa$ sind daher Q-verschieden. Die Geraden $[R(u-v)]^\varkappa + (Ru)^\varkappa$, $[R(u-v)]^\varkappa + [R(u-w)]^\varkappa$ sind Q-identisch. Wegen $Rv \subset Ru + R(u-v)$ gilt $(Rv)^\varkappa \subset (Ru)^\varkappa + [R(u-v)]^\varkappa$. Nach Satz 4 gilt sinngemäss $[R(v-w)]^\varkappa \subset [R(u-v)]^\varkappa + [R(v-w)]^\varkappa$. Wenn die Punkte $(Rv)^\varkappa$, $[R(v-w)]^\varkappa$ Q-verschieden sind, so sind nach (9) $(Ru)^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa$, $[R(v-w)]^\varkappa$ Q-nichtkolinear, was einen Widerspruch enthält.

b) Da die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $[R(u-v)]^\varkappa$ Q-verschieden sind, erhält man durch Zeichenwechsel im Satz 8, dass $(Ru)^\varkappa$, $(Rq)^\varkappa$ Q-verschieden sind. Da die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $[R(u-w)]^\varkappa$ Q-identisch sind, sind $(Rq)^\varkappa$, $[R(u-w)]^\varkappa$ Q-verschieden und nach (8) sind die Geraden $(Rq)^\varkappa + (Ru)^\varkappa$, $(Rq)^\varkappa + [R(u-w)]^\varkappa$ Q-identisch. Nach Satz 4 gilt $(Rv)^\varkappa \subset [R(u-w)]^\varkappa + (Rq)^\varkappa$, $[R(v+w)]^\varkappa \subset (Rq)^\varkappa + (Ru)^\varkappa$. Auf völlig analogem Wege wie oben im Fall a) lässt sich beweisen, dass die Punkte $(Rv)^\varkappa$, $[R(v+w)]^\varkappa$ Q-identisch sind.

Bemerkung 9. Wenn die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ Q-nichtkolinear und $(Rv)^\varkappa$, $[R(u-v)]^\varkappa$ als auch $(Ru)^\varkappa$, $[R(u-w)]^\varkappa$ Q-verschieden sind, dann sind $[R(v-w)]^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa$ als auch $[R(v+w)]^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa$ Q-verschieden. Diese Behauptung erhält man aus der Aussage 1 des Satzes 9 durch Vertauschung der Elemente v, w. Somit gilt: Sind $(Ru)^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa$, $[R(u-v)]^\varkappa$ als auch $(Ru)^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$, $[R(u-w)]^\varkappa$ voneinander Q-verschieden, so sind auch $(Rv)^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$, $[R(v - w)]^\varkappa$ als auch $(Rv)^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$, $[R(v + w)]^\varkappa$ miteinander Q-verschieden.

Satz 10. *Es seien die Punkte $(Ru)^\varkappa, (Rv)^\varkappa, (Rw)^\varkappa$ Q-nichtkolinear und $(Ru)^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa$, $[R(u - v)]^\varkappa$ miteinander Q-verschieden.*

1. *Wenn die Punkte $(Rw)^\varkappa$, $[R(u - w)]^\varkappa$ Q-verschieden sind, so sind auch $(Rw)^\varkappa$, $[R(u + w)]^\varkappa$ Q-verschieden.*

2. *Wenn die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $[R(u - w)]^\varkappa$ Q-identisch sind, so sind auch $(Ru)^\varkappa$, $[R(u + w)]^\varkappa$ Q-identisch.*

Beweis. 1. Da die Voraussetzungen des Teiles 1 von Satz 9 befriedigt sind, sind die Punkte $(Rw)^\varkappa$, $[R(v - w)]^\varkappa$ Q-verschieden. Das besagt, dass $(Rv)^\varkappa$, $[R(u - v)]^\varkappa$ und $(Rw)^\varkappa$, $[R(v - w)]^\varkappa$ Q-verschieden sind. Wenn wir im Satz 9 u und v miteinander verwechseln, erhalten wir, dass die Punkte $(Rw)^\varkappa$, $[R(u - v)]^\varkappa$ und $(Rw)^\varkappa$, $[R(u + w)]^\varkappa$ Q-verschieden sind.

2. Den Beweis führen wir ganz analog, wie im Teil 1.

Satz 11. *Es seien die Elemente $u, v, w \in M$ R-unabhängig und die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa, (Rw)^\varkappa$ Q-nichtkolinear.*

1. *Wenn die Punkte $[R(u - v)]^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa$ und $[R(u - w)]^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ Q-verschieden sind, so sind auch $[R(u - v - w)]^\varkappa$, $[R(v + w)]^\varkappa$ Q-verschieden.*

2. *Wenn die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $[R(u - v)]^\varkappa$ Q-verschieden sind, so sind auch $[R(u - v - w)]^\varkappa$, $(Ru)^\varkappa$ Q-verschieden.*

Beweis. 1. Setzen wir $q = u - v - w$. Nach Satz 8 sind die Punkte $(Rw)^\varkappa$, $(Rq)^\varkappa$ Q-verschieden. Nun werde vorausgesetzt, dass $(Rq)^\varkappa$, $[R(v + w)]^\varkappa$ Q-identisch sind. Dann sind die Geraden $(Rw)^\varkappa + (Rq)^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa + [R(v + w)]^\varkappa$ Q-identisch. Offenbar gilt $(Rv)^\varkappa \subset (Rw)^\varkappa + [R(v + w)]^\varkappa$ und aus Satz 4 folgt $[R(u - v)]^\varkappa \subset (Rw)^\varkappa + (Rq)^\varkappa$. Da die Punkte $(Rv)^\varkappa$, $[R(u - v)]^\varkappa$ Q-verschieden sind, sind nach (9) $(Rv)^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$, $[R(u - v)]^\varkappa$ Q-nichtkolinear, was einen Widerspruch enthält. Die Punkte $(Rq)^\varkappa$, $[R(v + w)]^\varkappa$ sind also Q-verschieden.

2. Es werde vorausgesetzt, dass die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $(Rq)^\varkappa$ Q-identisch sind. Nach der Voraussetzung sind $(Ru)^\varkappa$, $[R(u - v)]^\varkappa$ Q-verschieden. Folglich sind $(Rq)^\varkappa$, $[R(u - v)]^\varkappa$ Q-verschieden und nach (8) sind die Geraden $[R(u - v)]^\varkappa + (Ru)^\varkappa$, $[R(u - v)]^\varkappa + (Rq)^\varkappa$ Q-identisch. Offensichtlich ist $(Rv)^\varkappa \subset [R(u - v)]^\varkappa + (Ru)^\varkappa$ und nach Satz 4 gilt $(Rw)^\varkappa \subset [R(u - v)]^\varkappa + (Rq)^\varkappa$. Die Punkte $(Ru)^\varkappa$, $(Rv)^\varkappa$, $(Rw)^\varkappa$ sind Q-nichtkolinear im Widerspruch dazu, dass die Geraden $[R(u - v)]^\varkappa + (Ru)^\varkappa$, $[R(u - v)]^\varkappa + (Rq)^\varkappa$ Q-identisch sind.

Nach der Voraussetzung (4) aus Definition 8 existieren Punkte $X, Y, Z \in \mathscr{B}(M)$ derart, dass $X^\varkappa, Y^\varkappa, Z^\varkappa$ Q-nichtkolinear sind. Sodann sind die Punkte X, Y, Z R-nichtkolinear. Nach (1) aus Definition 8 gibt es einen Punkt $U \in X + Y$ derart, dass die Punkte $X^\varkappa, Y^\varkappa, U^\varkappa$ miteinander Q-verschieden sind und nach (2) liegen

$X^\varkappa$, $Y^\varkappa$, $U^\varkappa$ auf der Geraden in $\mathscr{P}(N)$. Setzen wir $X = Rx$, $Y = Ry'$, $U = Ru'$. Dann $x, y', u' \in M^*$ und es geben $\xi_1, \xi_2 \in R$ derart, dass $u' = \xi_1 x + \xi_2 y'$. Da die Elementepaare x, u; y, u; x, u R-unabhängig sind, gilt nach (3) $\xi_1 . \xi_2 \in R^*$. Danach erhalten wir $\xi_1^{-1} u' = x + \xi_1^{-1}\xi_2 y'$. Wird $u = \xi_1^{-1}u'$, $y = -\xi_1^{-1}\xi_2 y'$ gesetzt, so folgt $Y = Ry$, $U = Ru = R(x - y)$. Nach der Voraussetzung sind dabei $(Rx)^\varkappa$, $(Ry)^\varkappa$, $[R(x - y)]^\varkappa$ miteinander Q-verschieden. Ähnlich gibt es einen Punkt V auf der Geraden $X + Z$ derart, dass $X^\varkappa$, $Z^\varkappa$, $V^\varkappa$ Q-verschieden sind und es gibt ein Element $z \in M^*$, wo $Rz = Z$, $R(x - z) = V$. Die Punkte $(Rx)^\varkappa$, $(Rz)^\varkappa$, $[R(x - z)]^\varkappa$ sind dann miteinander Q-verschieden. Nach Satz 9 und Bemerkung 9 sind auch $(Ry)^\varkappa$, $(Rz)^\varkappa$, $[R(y - z)]^\varkappa$ miteinander Q-verschieden. Im weiteren werden die Punkte X, Y, Z und Elemente $x, y, z \in M^*$ fest gewählt.

Definition 9. Die Teilmengen W, W^*, W' in M seien durch die folgende Vorschriften definiert:

1. $M_0 \subset W$.

2. Es sei $u \in M^*$.

a) Wenn $(Ru)^\varkappa$, $(Rx)^\varkappa$ Q-verschieden sind, dann gilt:

$u \in W \Leftrightarrow [R(x - u)]^\varkappa$, $(Ru)^\varkappa$ Q-verschieden sind.

$u \in W^* \Leftrightarrow [R(x - u)]^\varkappa$, $(Ru)^\varkappa$, $(Rx)^\varkappa$ miteinander Q-verschieden sind.

$u \in W' \Leftrightarrow [R(x - u)]^\varkappa$, $(Rx)^\varkappa$ Q-identisch sind.

b) Wenn $(Ru)^\varkappa$, $(Rx)^\varkappa$ Q-identisch sind, dann gilt:

$u \in W \Leftrightarrow [R(y - u)]^\varkappa$, $(Ru)^\varkappa$ Q-verschieden sind.

$u \in W^* \Leftrightarrow [R(y - u)]^\varkappa$, $(Ru)^\varkappa$, $(Ry)^\varkappa$ miteinander Q-verschieden sind.

$u \in W' \Leftrightarrow [R(y - u)]^\varkappa$, $(Ry)^\varkappa$ Q-identisch sind.

Setzen wit $W_0 = M_0 \cup W'$, dann gilt $W = W^* \cup W_0$ und $W \cap M^* = W^* \cup W'$. Natürlich ist $x, y, z \in W^*$.

Satz 12. *Es sei ein beliebiger Punkt $A \in \mathscr{B}(M)$ vorgelegt. Dann existiert ein Element $a \in W^*$ mit $A = Ra$.*

Beweis. Entweder $A^\varkappa, X^\varkappa$ oder $A^\varkappa$, $Y^\varkappa$ sind Q-verschieden. Nehmen wir an, dass $A^\varkappa, X^\varkappa$ Q-verschieden sind. Dann sind A, X R-verschieden. Wählen wir einen Punkt $U \subset A + X$, wo $A^\varkappa, X^\varkappa, U^\varkappa$ miteinander Q-verschiden sind. Dann existieren Elemente $a, u \in M^*$, wobei $A = Ra$, $U = Ru = R(x - a)$. Da $(Rx)^\varkappa$, $(Ra)^\varkappa$, $[R(x - a)]^\varkappa$ miteinander Q-verschieden sind, gilt nach Definition 9 $a \in W^*$.

Satz 13. *W aus Definition 9 ist eine Untergruppe der additiven Gruppe von M.*

Beweis. 1. Wir beweisen zunächst, dass $-a \in W$ $\forall a \in W$. Wenn $a \in M_0$, dann $-a \in M_0$, denn M_0 ist ein Untermodul in M. Es sei weiter vorausgesetzt, dass $a \in$

$\in M^* \cap W$. Der Punkt $(Ra)^\varkappa$ ist Q-nichtkolinear mit mindestens einem Punktepaar $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa$ bzw. $(Rx)^\varkappa, (Rz)^\varkappa$ bzw. $(Ry)^\varkappa, (Rz)^\varkappa$. Nehmen wir an, dass etwa $(Rx)^\varkappa$, $(Ry)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-nichtkolinear sind. Die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, [R(x - y)]^\varkappa$ sind miteinander Q-verschieden. Wegen $a \in W$ sind $[R(x - a)]^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-verschieden. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes 10 erfüllt, wo $u = x, v = y, w = a$. Auf Grund dieses Satzes sind dann die Punkte $(Ra)^\varkappa, [R(x + a)]^\varkappa$ Q-verschieden. Wegen $(Ra)^\varkappa = [R(-a)]^\varkappa$ folgt $-a \in W$ laut Definition 9.

2. Nun wollen wir beweisen, dass $a + b \in W \quad \forall a, b \in W$.

a) Es seien $a, b \in M_0$. So folgt $a + b \in M_0$.

b) Es seien $a \in M^* \cap W$, $b \in M_0$. Setzen wir voraus, dass etwa die Punkte $(Ra)^\varkappa$, $(Rx)^\varkappa$ Q-verschieden sind. Wegen $a \in W$ sind $(Ra)^\varkappa, [R(x - a)]^\varkappa$ Q-verschieden. Die Elemente $a, a + b$ sind R-abhängig und $a + b \in M^*$. Folglich sind die Punkte Ra, $R(a + b)$ R-identisch und $(Ra)^\varkappa, [R(a + b)]^\varkappa$ Q-identisch. Entsprechend sind die Elemente $x - a$, $x - a - b$ R-abhängig, Punkte $R(x - a)$, $R(x - (a + b))$ R-identisch und $[R(x - a)]^\varkappa, [R(x - (a + b))]^\varkappa$ Q-identisch. Aus der Voraussetzung, dass die Punkte $[R(x - a)]^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-verschieden sind, folgt dann nach (5), dass $[R(a + b)]^\varkappa, [R(x - (a + b))]^\varkappa$ Q-verschieden sind. Dies bedeutet, dass $a + b \in W$.

c) Es seien $a, b \in M^* \cap W$.

α) Setzen wir voraus, dass die Punkte $(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa$ Q-verschieden sind. Mindestens eins der Tripel $(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa, (Rx)^\varkappa$; $(Ra)^\varkappa (Rb)^\varkappa, (Ry)^\varkappa$; $(\mathrm{R}a)^\varkappa, (Rb)^\varkappa, (Rz)^\varkappa$ wird durch die Q-nichtkolinearen Punkte erzeugt. Setzen wir voraus, dass $(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa, (Rx)^\varkappa$ Q-nichtkolinear sind. Wegen $a, b \in W$ sind die Punkte $(Ra)^\varkappa, [R(x - a)]^\varkappa$ und $(Rb)^\varkappa, [R(x - b)]^\varkappa$ Q-verschieden. Nach Satz 11 sind dann $[R(x - (a + b))]^\varkappa$, $[R(a + b)]^\varkappa$ Q-verschieden und dies bedeutet, dass $a + b \in W$.

β) Nun werde vorausgesetzt, dass die Punkte $(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa$ Q-identisch sind. Es seien die Punkte $(Ra)^\varkappa, (Rx)^\varkappa$ Q-verschieden. Dann sind $[R(x - a)]^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ und auch $[R(x - a)]^\varkappa, (Rb)^\varkappa$ Q-verschieden. Nach den Fällen 1, 2. cα) ist $x - a \in W \cap M^*$ und zugleich $(x - a) - b \in W \cap M^*$. Wenn die Punkte $(Rx)^\varkappa, [R(x - (a + b))]^\varkappa$ Q-identisch sind, dann $a + b \in W'$. Wenn diese Punkte Q-verschieden sind, dann gilt $[x - (a + b)] - x = -(a + b) \in W$ und hieraus $a + b \in W$.

Satz 14. *W_0 aus Definition 9 ist eine Untergruppe der Gruppe W.*

Beweis. 1. Wir beweisen, dass $-a \in W_0 \ \forall a \in W_0$. Wenn $a \in M_0$, so $-a \in M_0$. Setzen wir also voraus, dass $a \in W'$, wobei z. B. die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-nichtkolinear sind. Die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, [R(x - y)]^\varkappa$ sind miteinander Q-verschieden und $(Rx)^\varkappa, [R(x - a)]^\varkappa$ Q-identisch, denn $a \in W_0$. Nach Satz 10 sind die Punkte $(Rx)^\varkappa, [R(x + a)]^\varkappa$ Q-identisch und daher $-a \in W_0$.

2. Jetzt beweisen wir, dass $a + b \in W_0 \ \forall a, b \in W_0$.

a) Wenn $a, b \in M_0$, so $a + b \in M_0$.

b) Es seien $a \in W'$, $b \in M_0$. Nehmen wir z. B. an, dass $(Rx)^\varkappa$, $(Ra)^\varkappa$ Q-verschieden sind. Wegen $a \in W'$ sind $(Rx)^\varkappa$, $[R(x - a)]^\varkappa$ Q-identisch. Die Elemente $x - a$, $x - (a + b)$ sind R-abhängig und die Punkte $R(x - a)$, $R(x - (a + b))$ R-identisch. Daher sind $[R(x - a)]^\varkappa$, $[R(x - (a + b))]^\varkappa$ Q-identisch, nach (5) sind $(Rx)^\varkappa$, $[R(x - (a + b))]^\varkappa$ Q-identisch, woraus $a + b \in W'$ folgt.

c) Es seien $(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa$ Q-verschieden und $a \in W^*$, $b \in W \cap M^*$. Hieraus folgt $a + b \in W^*$: Mindestens einer der Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Rz)^\varkappa$ ist Q-nichtkolinear mit $(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa$. Setzen wir voraus, das die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa$ Q-nichtkolinear sind. Nach Satz 13 gilt $a + b \in W$. Da $(Rx)^\varkappa$, $[R(x - a)]^\varkappa$ Q-verschieden sind, gilt nach Satz 11, dass $[R(x - (a + b))]^\varkappa$, $(Rx)^\varkappa$ Q-verschieden sind. Danach $a + b \in W^*$.

d) Es gilt $a + b \in W^*$ $\forall a \in W^*$ $\forall b \in W'$: Mindestens einer der Punkte $(Rx)^\varkappa$, $(Ry)^\varkappa, (Rz)^\varkappa$ ist mit den Punkten $(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa$ Q-verschieden. Nehmen wir an, dass die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ und $(Rx)^\varkappa, (Rb)^\varkappa$ Q-verschieden sind. Nach der Voraussetzung sind $(Rx)^\varkappa$, $[R(x - a)]^\varkappa$ Q-verschieden und $(Rx)^\varkappa$, $[R(x - b)]^\varkappa$ Q-identisch. Nach 1 gilt $-b \in W'$, folglich $(Rx)^\varkappa$, $[R(x + b)]^\varkappa$ sind Q-identisch. Nach (5) sind die Punkte $[R(x - a)]^\varkappa$, $[R(x + b)]^\varkappa$ Q-verschieden. Es gilt $a - x \in W$ und nach Fall c) ist $x + b \in W^*$. Nach c) folgt weiter $(x + b) + (a - x) = a + b \in W^*$.

e) Es gilt $a + b \in W_0$ $\forall a, b \in W'$: Es sei $c = a + b \in W^*$, so folgt $a = c - b$, mit $-b \in W'$. Nach d) gilt $a \in W^*$, was aber einen Widerspruch ergibt. Demnach gilt $a + b \in W_0$.

Setzen wir $\bar{R} = \{\varrho \in R \mid \varrho y \in W_0\}$, $\bar{R}_0 = \{\varrho \in R \mid \varrho y \in W_0\}$ und $\bar{R}^* = \bar{R} \setminus \bar{R}_0$. Falls $\varrho \in R_0$, so $\varrho y \in M_0$ und es gilt daher $R_0 \subset \bar{R}_0$. Weiter gilt $\varrho \in \bar{R}_0 \cap R^* \Leftrightarrow \varrho y \in W'$.

Satz 15. *Es gilt*: 1. $\varrho a \in W$ $\forall \varrho \in \bar{R}$ $\forall a \in W$.

2. $\varrho a \in W_0$ $\forall \varrho \in \bar{R}$ $\forall a \in W_0$.

3. $\varrho a \in W_0$ $\forall \varrho \in \bar{R}_0$ $\forall a \in W$.

Beweis. Wenn $\varrho \in R_0$, dann ist $\varrho a \in M_0$ $\forall a \in W$ und daher $\varrho a \in W_0$. Wenn $a \in M_0$, dann ist $\varrho a \in M_0$ $\forall \varrho \in \bar{R}$ und daher $\varrho a \in W_0$. Im weiteren wird vorausgesetzt, dass $\varrho \in \bar{R} \setminus R_0$, $a \in W \cap M^*$ gilt.

1. Es seien $\varrho \in \bar{R} \setminus R_0$, $a \in W \cap M^*$. Wegen $\varrho \in R^*$ gibt es ein $\varrho^{-1} \in R$ und es gilt $R\varrho = R$.

a) Setzen wir voraus, dass die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-nichtkolinear sind. Die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa$, $[R(x - y)]^\varkappa$ sind miteinander Q-verschieden, $[R(x - a)]^\varkappa$, $(Ra)^\varkappa$ Q-verschieden und wegen $\varrho \in \bar{R}$ gilt, dass $[R(x - \varrho y)]^\varkappa$, $(R\varrho y)^\varkappa = (Ry)^\varkappa$ Q-verschieden sind. Setzen wir im Satz 9 $u = x$, $v = y$, $w = a$, so ergibt sich, dass die Punkte $(Ra)^\varkappa$, $[R(y - a)]^\varkappa$ Q-verschieden sind. Setzen wir im Satz 9 weiter $u = y$, $v = \varrho^{-1}x$, $w = a$. Somit sind die Punkte $[R(\varrho^{-1}x - a)]^\varkappa = [R(x - \varrho a)]^\varkappa$, $(Ra)^\varkappa = (R\varrho a)^\varkappa$ Q-verschieden. Dies besagt jedoch, dass $\varrho a \in W$.

b) Setzen wir voraus, dass die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-kolinear sind. Die Punkte $(Ra)^\varkappa, (Ry)^\varkappa$ seien zunächst Q-verschieden. Sodann sind $(Ry)^\varkappa, (Rz)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$

Q-nichtkolinear; der Beweis verläuft ganz analog zum Teil a), bloss der Punkt $(Rx)^\varkappa$ wird durch $(Rz)^\varkappa$ ersetzt. Wenn $(Ra)^\varkappa, (Ry)^\varkappa$ Q-identisch sind, sind die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Rz)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-nichtkolinear. Nach dem Teil a) gilt $\varrho z \in W$; der Beweis wird ähnlich geführt wie in a), bloss der Punkt $(Ry)^\varkappa$ wird durch $(Rz)^\varkappa$ ersetzt.

2. Es seien $\varrho \in \bar{R} \setminus R_0$, $a \in W'$.

a) Setzen wir voraus, dass die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-nichtkolinear sind. Die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa$, $[R(x - y)]^\varkappa$ sind miteinander Q-verschieden, $(Rx)^\varkappa$, $[R(x - a)]^\varkappa$ Q-identisch und $(Ry)^\varkappa = (R\varrho y)^\varkappa$, $[R(x - \varrho y)]^\varkappa$ Q-verschieden. Nach Satz 9 sind $(Ry)^\varkappa$, $[R(y - a)]^\varkappa$ Q-identisch. Setzen wir im Satz 9 $u = y$, $v = \varrho^{-1}x$, $w = a$, so erhält man, dass die Punkte $[R(\varrho^{-1}x - a)]^\varkappa = [R(x - \varrho a)]^\varkappa, (R\varrho^{-1}x)^\varkappa = (Rx)^\varkappa$ Q-identisch sind. Dies bedeutet, dass $\varrho a \in W_0$.

b) Sind die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-kolinear, dann geht man ähnlich wie beim Fall 1b, vor.

3. Es seien $\varrho \in \bar{R}_0 \setminus R_0$, $a \in W \cap M^*$.

a) Setzen wir voraus, dass die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-nichtkolinear sind. Die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa$, $[R(x - y)]^\varkappa$ sind miteinander Q-verschieden, $(Ra)^\varkappa$, $[R(x - a)]^\varkappa$ Q-verschieden und $(Rx)^\varkappa$, $[R(x - \varrho y)]^\varkappa$ Q-identisch. Nach Satz 9 sind $(Ra)^\varkappa$, $[R(a + y)]^\varkappa$ Q-verschieden. Setzen wir $q = \varrho^{-1}x - a - y$ und sei vorausgesetzt, dass die Punkte $(Rq)^\varkappa, (Rx)^\varkappa$ Q-verschieden sind. Dann sind $(Rq)^\varkappa$, $[R(x - \varrho y)]^\varkappa = [R(\varrho^{-1}x - y)]^\varkappa$ Q-verschieden und nach (8) sind die Geraden $(Rq)^\varkappa + (Rx)^\varkappa$, $(Rq)^\varkappa + [R(\varrho^{-1}x - y)]^\varkappa$ Q-identisch. Auf Grund des Satzes 4 gilt $(Ra)^\varkappa \subset (Rq)^\varkappa + [R(\varrho^{-1}x - y)]^\varkappa$, $[R(a + y)]^\varkappa \subset (Rq)^\varkappa + (Rx)^\varkappa$. Nach (9) sind die Punkte $(Ra)^\varkappa, (Rx)^\varkappa$, $[R(a + y)]^\varkappa$ Q-nichtkolinear, was jedoch ein Widerspruch ist. Die Punkte $(Rq)^\varkappa, (Rx)^\varkappa$ sind somit Q-identisch. Die Geraden $(Ry)^\varkappa + (Rq)^\varkappa$, $(Ry)^\varkappa + (Rx)^\varkappa$ sind Q-identisch und nach Satz 4 gilt $[R(\varrho^{-1}x - a)]^\varkappa \subset (Rq)^\varkappa + (Ry)^\varkappa$. Die Punkte $(Rx)^\varkappa$, $[R(\varrho^{-1}x - a)]^\varkappa$ sind Q-identisch, denn anderenfalls wären $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa$, $[R(\varrho^{-1}x - a)]^\varkappa$ Q-nichtkolinear, also ein Widerspruch. Somit gilt $\varrho a \in W_0$.

b) Sind die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-kolinear, dann geht man analog wie im Fall 1b) vor.

Satz 16. *$\bar{R}$ ist ein totaler Unterring in R, $\bar{R}_0$ ist die Menge nichtinvertierbarer Elemente in $\bar{R}$.*

Beweis. 1. $\bar{R}$ ist ein Ring: Es gebe beliebige $\varrho_1, \varrho_2 \in \bar{R}$. Sodann $\varrho_1 y, \varrho_2 y \in W$ und nach Satz 13 gilt $\varrho_1 y + \varrho_2 y = (\varrho_1 + \varrho_2)\, y \in W$, so dass $\varrho_1 + \varrho_2 \in \bar{R}$. Nach Satz 15 ist $\varrho_2(\varrho_1 y) = (\varrho_2 \varrho_1)\, y \in W$ und $\varrho_2 \varrho_1 \in \bar{R}$.

2. Nach Definition von $\bar{R}$ gilt $R_0 \subset \bar{R}$. Es sei $\varrho \in R \setminus \bar{R}$. Dann $\varrho y \notin W$ und aus Satz 15 folgt auch $\varrho x \notin W$. Nach Definition 9 sind daher die Punkte $[R(y - \varrho x)]^\varkappa = [R(x - \varrho^{-1}y)]^\varkappa, (Rx)^\varkappa$ Q-identisch. Dies besagt jedoch, dass $\varrho^{-1}y \in W'$, $\varrho^{-1} \in \bar{R}_0$.

Es gebe $\xi \in \bar{R}_0 \setminus R_0$. Dann $\xi y \in W'$ und nach Satz 15 auch $\xi x \in W'$. Folglich sind die Punkte $[R(y - \xi x)]^\varkappa = [R(x - \xi^{-1} y)]^\varkappa$, $(Ry)^\varkappa = (R\xi^{-1} y)^\varkappa$ Q-identisch. Hieraus ergibt sich $\xi^{-1} y \notin W$, also $\xi^{-1} \notin \bar{R}$.

Bemerkung 10. Auf Grund der Sätze 1, 2 und 16 ist $\bar{R}_0$ ein maximales Ideal im Ringe $\bar{R}$. Nach Satz 15 gilt $\varrho u \in W$ $\forall \varrho \in \bar{R}$ $\forall u \in W$. Im Hinblick auf diese äussere Operation ist W ein Modul über dem Ringe $\bar{R}$ und W_0 ein Untermodul in W.

Satz 17. *Es gebe Punkte $Ra, Rb \in \mathscr{B}(M)$ derart, dass $(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa$, $[R(a - b)]^\varkappa$ Q-verschieden sind und setzen wir $(Ra)^\varkappa = Qa'$. Es existiert ein einziges Element $b' = h(a, a', b) \in N^*$, wo $(Rb)^\varkappa = Qb'$, $[R(a - b)]^\varkappa = Q(a' - b')$.*

Beweis. Die Punkte $(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa$ sind Q-verschieden und nach Definition 8 sind daher Ra, Rb R-verschieden. Somit ist $a - b \in M^*$. Es gilt $R(a - b) \subset Ra + Rb$ und nach Definition 8 ergibt sich $[R(a - b)]^\varkappa \subset (Ra)^\varkappa + (Rb)^\varkappa$. Setzen wir $[R(a - b)]^\varkappa = Qt'$, $(Rb)^\varkappa = Qz'$. Dann existieren Elemente $\alpha, \beta \in Q$ mit $t' = \alpha a' + \beta z'$. Nach den Voraussetzungen sind die Elemente a', z'; a', t'; z', t' Q-unabhängig und nach (3) ist $\alpha, \beta \in Q^*$. Setzen wir $b' = -\alpha^{-1}\beta z'$, dann $b' \in N^*$ und $(Rb)^\varkappa = Qb'$. Es gilt weiter $[R(a - b)]^\varkappa = Qt' = Q\alpha^{-1}t' = Q(a' - b')$. Somit ist die Existenz von b' bewiesen.

Es liegt ein Element $b'' \in N^*$ vor mit $(Rb)^\varkappa = Qb''$, $[R(a - b)]^\varkappa = Q(a' - b'')$. Dann erhalten wir $Qb' = Qb''$, $Q(a' - b'') = Q(a' - b')$. Es bestehen $\varrho_1, \varrho_2 \in Q^*$ mit $b' = \varrho_1 b''$, $a' - b' = \varrho_2 a' - \varrho_2 b''$. Hieraus erhält man $(1 - \varrho_2)\, a' = (\varrho_1 - \varrho_2)\, b''$. Nach Satz 3 folgt $(1 - \varrho_2)\, a' = (\varrho_1 - \varrho_2)\, b'' = 0$ und nach (2) schliesslich $\varrho_2 = 1$, $\varrho_1 = \varrho_2$. Hieraus ergibt sich $\varrho_1 = 1$ und $b' = b''$.

Bemerkung 11. Aus dem vorstehenden Beweis folgt: Die Beziehung $b' = h(a, a', b)$ gilt genau dann, wenn $a' = h(b, b', a)$.

Satz 18. *Es gebe Punkte $Ra, Rb, Rc \in \mathscr{B}(M)$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *$(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa, (Rc)^\varkappa$ sind Q-nichtkolinear.*

b) *$(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa, [R(a - b)]^\varkappa$ sind miteinander Q-verschiden.*

c) *$(Ra)^\varkappa, (Rc)^\varkappa, [R(a - c)]^\varkappa$ sind miteinander Q-verschieden.*

Setzen wir $(Ra)^\varkappa = Qa'$ und $b' = h(a, a', b)$, $c' = h(a, a', c)$. Sodann existiert ein Element $h(b, b', c) \in N^*$ und es gilt $c' = h(b, b', c)$.

Beweis. Nach Bemerkung 9 sind die Punkte $(Rb)^\varkappa, (Rc)^\varkappa$, $[R(b - c)]^\varkappa$ miteinander Q-verschieden und nach Satz 17 existiert $h(b, b', c)$. Dabei gilt $(Ra)^\varkappa = Qa'$, $(Rb)^\varkappa = Qb'$, $(Rc)^\varkappa = Qc'$, $[R(a - b)]^\varkappa = Q(a' - b')$, $[R(a - c)]^\varkappa = Q(a' - c')$. Nach a) sind die Elemente a', b', c' Q-unabhängig. Nach Definition 8 sind a, b, c R-unabhängig. Auf Grund des Satzes 4 gilt $R(b - c) = (Rb + Rc) \cap [R(a - b) +$

$+ R(a - c)]$. Die Punkte $[R(a - b)]^{\times}$, $[R(a - c)]^{\times}$ und $(Rb)^{\times}$, $(Rc)^{\times}$ sind Q-verschieden, die Geraden $(Rb)^{\times} + (Rc)^{\times}$, $[R(a - b)]^{\times} + [R(a - c)]^{\times}$ Q-verschieden und nach Definition 8 ergibt sich $[R(b - c)]^{\times} = [(Rb)^{\times} + (Rc)^{\times}] \cap [(R(a - b))^{\times} + (R(a - c))^{\times}] = (Qb' + Qc') \cap [Q(a' - b') + Q(a' - c')] = Q(b' - c')$. Also aus Satz 17 folgt $c' = h(b, b', c)$.

Satz 19. *Es seien $a, b \in W^*$, $a + b \in W^*$ und es gelte*:

1. *Sind $(Ra)^{\times}, (Rb)^{\times}$ Q-verschieden, so sind $(Rx)^{\times}, (Ra)^{\times}, (Rb)^{\times}$ Q-nichtkolinear.*
2. *Sind $(Ra)^{\times}, (Rb)^{\times}$ Q-identisch, so sind $(Rx)^{\times}, (Ra)^{\times}$ Q-verschieden.*

Wenn $(Rx)^{\times} = Qx'$ gesetzt wird, so erhält man $h(x, x', a + b) = h(x, x', a) + h(x, x', b)$.

Beweis. Wegen $a, b \in W^*$ sind die Punkte $(Rx)^{\times}$, $[R(x - a)]^{\times}$, $(Ra)^{\times}$ sowie $(Rx)^{\times}$, $[R(x - b)]^{\times}$, $(Rb)^{\times}$ miteinander Q-verschieden. Nach Satz 17 lässt sich setzen $a' = h(x, x', a)$, $b' = h(x, x', b)$. Dann $(Ra)^{\times} = Qa'$, $(Rb)^{\times} = Qb'$, $[R(x - a)]^{\times} = Q(x' - a')$, $[R(x - b)]^{\times} = Q(x' - b')$. Die Elemente x', a', b' sind Q-unabhängig und x, a, b R-unabhängig. Nach Satz 4 ist $R(x - a - b) = [R(x - a) + Rb] \cap [R(x - b) + Ra]$. Dann $[R(x - (a + b))]^{\times} = [(R(x - a))^{\times} + (Rb)^{\times}] \cap [(R(x - b))^{\times} + (Ra)^{\times}] = [Q(x' - a') + Qb'] \cap [Q(x' - b') + Qa'] = Q(x' - a' - b')$. Unter weiterer Anwendung des Satzes 4 erhalten wir $R(a + b) = (Ra + Rb) \cap [R(x - (a + b)) + Rx]$. Wegen $a + b \in W^*$ gilt, dass $[R(x - (a + b))]^{\times}$, $(Rx)^{\times}$ Q-verschieden sind. So erhält man $[R(a + b)]^{\times} = [(Ra)^{\times} + (Rb)^{\times}] \cap [(R(x - (a + b)))^{\times} + (Rx)^{\times}] = (Qa' + Qb') \cap [Q(x' - a' - b') + Qx'] = Q(a' + b')$. Es gilt somit $(Rx)^{\times} = Qx'$, $[R(a + b)]^{\times} = Q(a' + b')$, $[R(x - (a + b))]^{\times} = Q(x' - (a' + b'))$ und mithin ist $a' + b' = h(x, x', a + b) = h(x, x', a) + h(x, x', b)$.

2. Entweder die Punkte $(Rx)^{\times}, (Ry)^{\times}, (Ra)^{\times}$ oder $(Rx)^{\times}, (Rz)^{\times}, (Ra)^{\times}$ sind Q-nichtkolinear. Setzen wir voraus, dass $(Rx)^{\times}, (Ry)^{\times}, (Ra)^{\times}$ Q-nichtkolinear sind. Dann $a + y \in W^*$ und nach dem Fall 1 ist $h(x, x', a + y) = h(x, x', a) + h(x, x', y)$. Da die Punkte $(Ra)^{\times}, (Rb)^{\times}$ Q-identisch sind, sind $(Rx)^{\times}, (Rb)^{\times}$, $[R(y + a)]^{\times}$ Q-nichtkolinear. Daraus $(a + y) + b \in W^*$ und nach Fall 1 ist $h(x, x', b) + h(x, x', a + y) = h(x, x', a + b + y)$. Die Punkte $(Rx)^{\times}, (Ry)^{\times}$, $[R(a + b)]^{\times}$ sind Q-nichtkolinear und nach dem Fall 1 ist $h(x, x', a + b) + h(x, x', y) = h(x, x', a + b + y) = h(x, x', b) + h(x, x', a + y) = h(x, x', a) + h(x, x', y) + h(x, x', b)$. Hieraus $h(x, x', a + b) = h(x, x', a) + h(x, x', b)$.

Bemerkung 12. Wenn der Punkt $(Ry)^{\times}$ bzw. $(Rz)^{\times}$ die im Satz 19 auf den Punkt $(Rx)^{\times}$ gelegten Forderungen erfüllt, so wird ganz analog bewiesen, dass $h(y, y', a + b) = h(y, y', a) + h(y, y', b)$ bzw. $h(z, z', a + b) = h(z, z', a) + h(z, z', b)$.

Im weiteren werde vorausgesetzt, dass $(Rx)^{\times} = Qx'$. Nach Satz 17 setzen wir $y' = h(x, x', y)$ und $z' = h(x, x', z)$. Nach Bemerkung 11 gilt $x' = h(y, y', x) =$

$= h(z, z', x)$. Auf Grund des Satzes 18 folgt dann $z' = h(y, y', z)$ und $y' = h(z, z', y)$. Es liege ein beliebiges $a \in W^*$ vor und werde vorausgesetzt, dass die Punkte $(Rx)^\varkappa$, $(Ra)^\varkappa$ Q-verschieden sind. Dann sind entweder $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ oder $(Rx)^\varkappa, (Rz)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-nichtkolinear, sagen wir etwa $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$. Die Punkte $(Rx)^\varkappa$, $[R(x - a)]^\varkappa$, $(Ra)^\varkappa$ sowie $(Rx)^\varkappa$, $[R(x - y)]^\varkappa$, $(Ry)^\varkappa$ sind miteinander Q-verschieden und nach Satz 18 gilt $a' = h(x, x', a) = h(y, y', a)$. Setzen wir voraus, dass die Punkte $(Rx)^\varkappa$, $(Ra)^\varkappa$ Q-identisch sind. Dann sind $(Ry)^\varkappa, (Rz)^\varkappa, (Ra)^\varkappa$ Q-nichtkolinear. Nach Satz 18 gilt dann $a' = h(y, y', a) = h(z, z', a)$. Für beliebiges Element $a \in W^*$ existieren also mindestens zwei Elemente aus $h(x, x', a)$, $h(y, y', a)$, $h(z, z', a)$, die sich gleich sind. Bezeichnen wir dieses Element mit $a^{\sigma'}$. Dadurch ist die Abbildung σ' der Menge W^* in N^* definiert. Dabei gilt nach Satz 17

$$(13) \qquad (Ru)^\varkappa = Qu^{\sigma'} \ \forall u \in W^* .$$

Nach Satz 19 gilt dann

$$(14) \qquad (u + v)^{\sigma'} = u^{\sigma'} + v^{\sigma'} \quad \text{für jede} \quad u, v \in W^* \quad \text{mit} \quad u + v \in W^* .$$

Es seien $a \in W^*$, $\varrho \in \bar{R}^*$. Dann $\varrho a \in W^*$ und es gilt $(Ra)^\varkappa = Qa^{\sigma'} = [R(\varrho a)]^\varkappa = Q(\varrho u)^{\sigma'}$. Es existiert ein Element $g(\varrho, u) \in Q^*$, wobei $(\varrho u)^{\sigma'} = g(\varrho, u)\, u^{\sigma'}$ ist. Für ein beliebiges $\varrho \in \bar{R}^*$ und $a, b \in W^*$, $a + b \in W^*$ gilt $g(\varrho, a) = g(\varrho, b)$: Es werde zunächst vorausgesetzt, dass die Punkte $(Ra)^\varkappa = Qa^{\sigma'}$, $(Rb)^\varkappa = Qb^{\sigma'}$ Q-verschieden sind. Dann sind Ra, Rb R-verschieden und es gilt $g(\varrho, a + b)\, a^{\sigma'} + g(\varrho, a + b)\, b^{\sigma'} = g(\varrho, a + b)(a^{\sigma'} + b^{\sigma'}) = g(\varrho, a + b)(a + b)^{\sigma'} = [\varrho(a + b)]^{\sigma'} = (\varrho a + \varrho b)^{\sigma'} = (\varrho a)^{\sigma'} + (\varrho b)^{\sigma'} = g(\varrho, a)\, a^{\sigma'} + g(\varrho, b)\, b^{\sigma'}$. Da die Elemente $a^{\sigma'}, b^{\sigma'}$ Q-unabhängig sind, gilt nach Satz 3 und (2) $g(\varrho, a + b) = g(\varrho, a) = g(\varrho, b)$.

Seien nun die Punkte $(Ra)^\varkappa, (Rb)^\varkappa$ Q-identisch. Es existiert ein Punkt, etwa $(Rx)^\varkappa$, wo $(Ra)^\varkappa, (Rx)^\varkappa$ Q-verschieden sind. Dann sind auch $(Rb)^\varkappa, (Rx)^\varkappa$ Q-verschieden und $x + u$, $x + v \in W^*$. Nach dem Vorangehenden erhält man $g(\varrho, a) = g(\varrho, x) = g(\varrho, b)$. Für jedes $\varrho \in \bar{R}^*$ werde $\varrho^{\varphi'} = g(\varrho, a)$, $a \in W^*$ geschrieben. Dann ist φ' die Abbildung von $\bar{R}^*$ in Q^* und es gilt

$$(15) \qquad (\varrho a)^{\sigma'} = \varrho^{\varphi'} a^{\sigma'} \ \forall \varrho \in \bar{R}^* \ \forall a \in W^* .$$

Bemerkung 13. Wenn $a \in W_0$ ist, dann existieren $u, v \in W^*$, wo $a = u + v$. Hierfür genügt es ein beliebiges Element $u \in W^*$ zu wählen und $v = a - u$ zu setzen. Danach $v \in W^*$ und $a = u + v$. Analog gibt es für beliebiges $\varrho \in \bar{R}_0$ solche $\xi, \eta \in \bar{R}^*$, wo $\varrho = \xi + \eta$.

Satz 20. *Setzen wir $a^\sigma = a^{\sigma'}$ $\forall a \in W^*$. Falls $a \in W_0$, wählen wir beliebige Elemente $u, v \in W^*$ mit $a = u + v$ und setzen wir $a^\sigma = u^{\sigma'} + v^{\sigma'}$. Dann ist σ ein Homomorphismus der Gruppe W in N.*

Beweis. 1. Für ein beliebiges Element $a \in W^*$ gilt $(-a)^\sigma = -a^\sigma$: Wählen wir ein Element $b \in W^*$ so, dass $a + b \in W^*$. Nach 14 gilt dann $[(a + b) + (-a)]^\sigma = = (a + b)^\sigma + (-a)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma + (-a)^\sigma = b^\sigma$ und daraus $(-a)^\sigma = -a^\sigma$.

2. σ ist eine Abbildung: Es sei $a \in W_0$ und $a = u + v = p + q$, wo $p, q, u, v \in W^*$. Setzen wir voraus, dass u, p R-unabhängig sind. Dann $u - p \in W^*$ und es gilt nach (14) $q^\sigma = [v + (u - p)]^\sigma = v^\sigma + (u + (-p))^\sigma = v^\sigma + u^\sigma + (-p)^\sigma = u^\sigma + v^\sigma - p^\sigma$. Hieraus folgt $u^\sigma + v^\sigma = p^\sigma + q^\sigma = a^\sigma$. Nun seien u, p R-abhängig. Es existiert ein Element $w \in W^*$, das R-unabhängig mit u ist. Desgleichen sind p, w R-unabhängig. Setzen wir $a = w + w'$. Nach dem Vorangehenden gilt dann $u^\sigma + v^\sigma = w^\sigma + (w')^\sigma$, $w^\sigma + (w')^\sigma = p^\sigma + q^\sigma$ und hieraus $u^\sigma + v^\sigma = p^\sigma + q^\sigma$.

3. σ ist ein Homomorphismus der Gruppe W in N:

a) Nach (14) ist $(u + v)^\sigma = u^\sigma + v^\sigma$ für jede solche $u, v \in W^*$, wo $u + v \in W^*$.

b) Es seien $u, v \in W^*$, $a = u + v \in W_0$. Nach 2 ist dann $a^\sigma = (u + v)^\sigma = u^\sigma + v^\sigma$.

c) Es seien $u \in W^*$, $v \in W_0$. Wählen wir ein Element $a \in W^*$, welches R-unabhängig mit u ist. Hiernach $a + u \in W^*$. Wird $b = v - a$ gesetzt, so $v = a + b$, $b \in W^*$. Nach 2 gilt $v^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$ und zugleich $(u + v)^\sigma = [b + (a + u)]^\sigma$. Nach a), b) gilt$(u + v)^\sigma = b^\sigma + (a + u)^\sigma = b^\sigma + a^\sigma + u^\sigma = u^\sigma + v^\sigma$.

d) Es seien $u, v \in W_0$ und werde $u = a + b$, $a, b \in W^*$ gesetzet. Nach 2 erhält man $u^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$ und $(u + v)^\sigma = [a + (b + v)]^\sigma$ mit $b + v \in W^*$. Nach a), b) folgt $[a + (b + v)]^\sigma = a^\sigma + (b + v)^\sigma$. Nach c) folgt $(b + v)^\sigma = b^\sigma + v^\sigma$ und hieraus schliesslich $(u + v)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma + v^\sigma = u^\sigma + v^\sigma$.

Satz 21. *Setzen wir $\varrho^\varphi = \varrho^{\varphi'}$ $\forall \varrho \in \bar{R}^*$. Wenn $\varrho \in \bar{R}_0$, so wählen wir beliebige $\xi_1, \xi_2 \in \bar{R}^*$ so, dass $\varrho = \xi_1 + \xi_2$ ist und werde $\varrho^\varphi = \xi_1^{\varphi'} + \xi_2^{\varphi'}$ gesetzt. Sodann ist φ eine Abbildung des Ringes $\bar{R}$ in Q und es gilt $(\varrho u)^\sigma = \varrho^\varphi u^\sigma$ $\forall \varrho \in \bar{R}$ $\forall u \in W$.*

Beweis. 1. φ ist eine Abbildung: Es sei $\varrho \in \bar{R}_0$ und $\varrho = \xi_1 + \xi_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, wo $\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi_2 \in \bar{R}^*$. Wählen wir ein beliebiges $u \in W^*$. Nach Satz 20 und (15) erhalten wir $(\varrho u)^\sigma = [(\xi_1 + \xi_2) u]^\sigma = (\xi_1 u + \xi_2 u)^\sigma = (\xi_1 u)^\sigma + (\xi_2 u)^\sigma = \xi_1^\varphi u^\sigma + + \xi_2^\varphi u^\sigma = (\xi_1^\varphi + \xi_2^\varphi) u^\sigma = [(\alpha_1 + \alpha_2) u]^\sigma = \alpha_1^\varphi u^\sigma + \alpha_2^\varphi u^\sigma = (\alpha_1^\varphi + \alpha_2^\varphi) u^\sigma$. Wegen $u^\sigma \in N^*$ gilt nach (2) $\alpha_1^\varphi + \alpha_2^\varphi = \xi_1^\varphi + \xi_2^\varphi = \varrho^\varphi$.

2. Es gilt $(\varrho u)^\sigma = \varrho^\varphi u^\sigma$ $\forall \varrho \in \bar{R}$ $\forall u \in W$:

a) Wenn $\varrho \in \bar{R}^*$, $u \in W^*$, so gilt nach (15) $(\varrho a)^\sigma = \varrho^\varphi a^\sigma$.

b) Es seien $\varrho \in \bar{R}_0$, $u \in W^*$ und werde $\varrho = \xi_1 + \xi_2$; $\xi_1, \xi_2 \in \bar{R}^*$ gesetzt. Dann gilt $\varrho^\varphi = \xi_1^\varphi + \xi_2^\varphi$ und $(\varrho u)^\sigma = [(\xi_1 + \xi_2) u]^\sigma = (\xi_1^\varphi + \xi_2^\varphi) u^\sigma = \varrho^\varphi u^\sigma$.

c) Es seien $\varrho \in \bar{R}$, $u \in W_0$ und werde $u = a + b$; $a, b \in W^*$ gesetzt. Dann gilt $(\varrho u)^\sigma = [\varrho(a + b)]^\sigma = (\varrho a + \varrho b)^\sigma = (\varrho a)^\sigma + (\varrho b)^\sigma$. Nach a), b) folgt $(\varrho a)^\sigma + + (\varrho b)^\sigma = \varrho^\varphi a^\sigma + \varrho^\varphi b^\sigma = \varrho^\varphi (a + b)^\sigma = \varrho^\varphi u^\sigma$.

Satz 22. *Es seien σ, φ Abbildungen aus Sätzen 20, 21. Dann $u^\sigma \in N_0 \Leftrightarrow u \in W_0$, $\varrho^\varphi \in Q_0 \Leftrightarrow \varrho \in \bar{R}_0$.*

Beweis. 1. Zunächst beweisen wir die Äquivalenz $u^\sigma \in N_0 \Leftrightarrow u \in W_0$. Nach Definition von σ gilt $u^\sigma \in N^*$ für jedes Element $u \in W^*$. Es sei $u \in W'$. Dann ist $u \in M^*$ und die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ru)^\varkappa$ oder $(Ry)^\varkappa, (Ru)^\varkappa$ sind Q-verschieden. Seien $(Rx)^\varkappa$, $(Ru)^\varkappa$ Q-verschieden. Nach Definition 9 sind $(Rx)^\varkappa$, $[R(x-u)]^\varkappa$ Q-identisch. Wegen $x - u \in W^*$ gilt nach (13) und nach Satz 20 $(Rx)^\varkappa = Qx^\sigma$, $[R(x-u)]^\varkappa = Q(x-u)^\sigma = Q(x^\sigma - u^\sigma)$. Die Elemente $x^\sigma, x^\sigma - u^\sigma$ sind Q-abhängig und daher existieren $\xi_1, \xi_2 \in Q^*$ derart, dass die Elemente $\xi_1 x^\sigma + \xi_2(x^\sigma - u^\sigma) = (\xi_1 + \xi_2) x^\sigma - \xi_2 u^\sigma \in N_0$ gilt. Dies jedoch besagt, dass die Elemente x^σ, u^σ Q-abhängig sind. Nach Satz 12 existiert ein Element $v \in Ru$, $v \in W^*$. Dann $u = \varrho v$, wo $\varrho \in \bar{R}$ und nach Satz 21 folgt $u^\sigma = \varrho^\varphi v^\sigma$. Nach (13) ist $(Ru)^\varkappa = (Rv)^\varkappa = Qv^\sigma$, woraus $u^\sigma \in Qv^\sigma$ gilt. Weiter sei $u^\sigma \in N^*$. Dann ist $Qu^\sigma = Qv^\sigma$, die Punkte Qu^σ, Qx^σ sind Q-verschieden und Elemente u^σ, x^σ Q-unabhängig, was jedoch zum Widerspruch führt. Somit gilt $u^\sigma \in N_0$. Es sei $u \in M_0$ und werde ein beliebiges Element $v \in W'$ gewählt. Hiernach $u + v \in W'$ und $(u+v)^\sigma = u^\sigma + v^\sigma \in N_0$, $v \in N_0$. Daraus folgt $u^\sigma \in N_0$.

2. Wir beweisen die Äquivalenz $\varrho^\varphi \in Q_0 \Leftrightarrow \varrho \in \bar{R}_0$:

Setzen wir voraus, dass $\varrho \in \bar{R}_0$. Dann $\varrho y \in W_0$. Nach Satz 21 erhält man $(\varrho y)^\sigma = \varrho^\varphi y^\sigma$ und nach 1 ist $\varrho^\varphi y^\sigma \in N_0$. Wegen $y^\sigma \in N^*$ gilt $\varrho^\varphi \in Q_0$. Es sei umgekehrt $\varrho^\varphi \in Q_0$. Dann $\varrho^\varphi y^\sigma = (\varrho y)^\sigma \in N_0$. Nach 1 ist $\varrho y \in W_0$ und daher $\varrho \in \bar{R}_0$.

Beweis des Theorems. $\varkappa$ sei ein Homomorphismus des projektiven Raumes $\mathscr{P}(M)$ mit Homomorphismus in den projektiven Raum $\mathscr{P}(N)$ mit Homomorphismus. Nach Definition 9 wird die Menge $W \subset M$ festgelegt. Dann $M_0 \subset W$. Nach Satz 16 und Bemerkung 10 ist W ein Modul über dem Ring $\bar{R}$, $\bar{R} \subset R$. Der Ring $\bar{R}$ ist ein totaler Unterring in R und $\bar{R}_0$ ist ein maximales Ideal in $\bar{R}$. Betrachten wir die in den Sätzen 20 und 21 definieren Abbildungen $\varphi : \bar{R} \to Q$, $\sigma : W \to N$. Das Paar (φ, σ) ist eine in der Definition 7 beschriebene verallgemeinerte semilineare Abbildung der Moduln M, N in bezug auf den Modul W: Die Eigenschaft (1) wird nach Satz 20 und die Eigenschaft (2) nach Satz 21 erfüllt. Die Forderung (3) folgt aus Satz 22. Die Forderung (4) ist eine Folgerung des Satzes 12, der Beziehung (13) und der Definition von σ. Die Forderungen (5) und (6) ergeben sich aus den Definitionen 5 und 8 und aus (13). Nach (13) induziert die verallgemeinerte semilineare Abbildung (φ, σ) die projektive Abbildung $\varkappa$.

Bemerkung 14. Es sei der Homomorphismus $\varkappa$ des projektiven Raumes $\mathscr{P}(M)$ in $\mathscr{P}(N)$ durch die verallgemeinerte semilineare Abbildung (φ, σ) der Moduln M, N in bezug auf W induziert. Nach der Bemerkung 7 wird es möglich sein die verallgemeinerte semilineare Abbildung $(\bar{\varphi}, \bar{\sigma})$ der zu den Moduln M, N zugeordneten Vektorräume M', N' in bezug auf W' zu bestimmen. Nach Satz 7 induziert die verallgemeinerte semilineare Abbildung $(\bar{\varphi}, \bar{\sigma})$ einen Homomorphismus $\varkappa'$ der zu $\mathscr{P}(M)$, $\mathscr{P}(N)$ zugeordneten projektiven Räume $\mathscr{P}(M')$, $\mathscr{P}(N')$.

Literatur

[1] *Lambek, J.:* Lectures on rings and modules. Toronto, London 1966.

[2] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrien mit Homomorphismus, Math. Annalen, *132*, 1956, 180—200.

[3] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrie und lineare Algebra über verallgemeinerten Bewertungsringen. Oxford: Proc. Coll. Utrecht, 1959: Algebraical and topological foundations of geometry, 1962, 99—107.

[4] *Machala, F.:* Homomorphismen projektiver Räume und verallgemeinerte semilineare Abbildungen. Časopis pro pěstování matematiky, *100*, 1975, 142—154.

[5] *Machala, F.:* Projektive Abbildungen projektiver Räume mit Homomorphismus. Czech. Math. Journal (im Druck).

[6] *Radó, F.:* Non-bijective collineations on some sets in Desarguesian projective planes and extension of non-commutative valuations. Aequationes Mathematicae, *4,* 1970, 307—321.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UP).