Czechoslovak Mathematical Journal

Peter Wintgen

Homotopien von Untermannigfaltigkeiten mit nicht ausgearteter zweiter Fundamentalform

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 3, 424–437

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101336`

Czechoslovak Mathematical Journal, 25 (100) 1975, Praha

HOMOTOPIEN VON UNTERMANNIGFALTIGKEITEN MIT NICHT AUSGEARTETER ZWEITER FUNDAMENTALFORM[1])

PETER WINTGEN, Berlin

(Eingegangen am 6. April 1974)

Wir betrachten in dieser Arbeit Immersionen in eine affin oder allgemeiner projektiv zusammenhängende Mannigfaltigkeit, welche nicht ausgeartete zweite Fundamentalformen besitzen (vgl. § 1) und Homotopien, die ganz aus solchen Immersionen bestehen. Die Frage nach der Existenz solcher Immersionen und Homotopien scheint uns eine natürliche Verallgemeinerung des Homotopieklassifikationsproblems für nicht degenerierte Kurven in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit zu sein, welches vor allem von E. A. FELDMANN bearbeitet wurde. In ähnlicher Weise verallgemeinerte er unlängst das Problem, indem er Homotopien von Untermannigfaltigkeiten mit nicht verschwindendem mittleren Krümmungsvektor untersuchte. (E. A. Feldmann [4]).

In § 1 stellen wir einige Definitionen, Bezeichnungen und Beispiele zusammen. In § 2 beweisen wir den Hauptsatz dieser Arbeit, durch den unser Problem zum Teil auf die Homotopieklassifikation quadratischer Formen mit Werten in Vektorraumbündeln zurückgeführt wird. Danach (§§ 3, 4) behandeln wir einige Spezialfälle ausführlicher (Hyperflächen, geschlossene Flächen).

1. DEFINITIONEN UND BEISPIELE

Die hier vorkommenden Mannigfaltigkeiten setzen wir als zusammenhängend und von der Klasse C_∞ voraus. Differenzierbare Abbildungen sind ebenfalls von der Klasse C_∞. Wir betrachten im folgenden Immersionen $f : M^m \to N^n$ einer kompakten Mannigfaltigkeit M (mit oder ohne Rand) in eine Mannigfaltigkeit N, auf der ein linearer Zusammenhang ohne Torsion gegeben sei. Diese Voraussetzungen werden in der ganzen Arbeit beibehalten. (Sie lassen sich bei Bedarf leicht in verschiedenen Richtungen abschwächen.)

[1]) Diese Arbeit wurde während eines halbjährigen Aufenthaltes am Math. Institut der Karls-Universität Prag geschrieben.

Die Immersion f induziert eine zweite Fundamentalform (vgl. R. HERMANN [7] § 27)

$$(1) \qquad b(f) : TM \oplus TM \to N_f ,$$

welche ein Vektorbündemorphismus über M mit Werten im Normalbündel von f ist. Ihren Wert für zwei Tangentialvektoren $\mathfrak{g}, \mathfrak{t} \in T_x(M)$ bekommt man, indem man für zwei Vektorfelder X, Y auf N mit $X(y) = \mathfrak{g}$, $Y(y) = \mathfrak{t}$, $y = f(x)$, die in einer Umgebung von y auf $f(M)$ tangential sind, den Wert von $\nabla_X Y$ im Punkt y modulo $df(T_x(M))$ nimmt. Man sieht sofort, dass $b_x(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ nicht von der speziellen Wahl der Felder X, Y abhängt und in $\mathfrak{g}, \mathfrak{t}$ symmetrisch ist. Ausserdem stimmt die zweite Fundamentalform für projektiv verwandte Zusammenhänge überein. Die Definitionen und Resultate dieser Arbeit bleiben daher gültig, wenn wir die affin zusammenhängende Mannigfaltigkeit N durch eine Mannigfaltigkeit mit projektivem Zusammenhang ersetzen (vgl. W. F. POHL [12] Proposition 9).

Wir können die zweite Fundamentalform auch als einen Vektorbündelmorphismus

$$(2) \qquad b : TM \to \mathrm{Hom}\,(TM, N_f)$$

auffassen.

Definition 1.1. Die Immersion $f : M \to N$ heisst *nicht degeneriert* oder *ND-Immersion*, wenn ihre zweite Fundamentalform in der Darstellung (2) faserinjektiv ist.

Beispiel 1.2. Es sei $f : M \to A^n$ eine Immersion in den n-dimensionalen affinen Raum. $A_{m,n}$ sei die Mannigfaltigkeit der m-Ebenen des A^n und $G_{m,n}$ sei die Grassmannsche Mannigfaltigkeit der m-Ebenen durch einen festen Punkt. Die Parallelverschiebung der Ebenen in diesen Punkt liefert eine Abbildung $\pi : A_{m,n} \to G_{m,n}$. Die Abbildung, welche jedem Punkt $x \in M$ die Tangentialebene $df(T_x(M)) \in A_{m,n}$ zuordnet, bezeichnen wir mit t und $g = \pi \circ t$ sei die Gaussche Abbildung von f. Es sind dann die folgenden drei Eigenschaften äquivalent:

a) f ist eine ND-Immersion.

b) Die Tangentialabbildung $t : M \to A_{m,n}$ ist regulär.

c) Die Gaussche Abbildung $g : M \to G_{m,n}$ ist regulär.

Zum Beweis benutzen wir ein lokales begleitendes Reper $y = f(x)$, $\mathfrak{a}_\alpha(x)$ tangential, $\mathfrak{a}_\varkappa(x)$ normal zu $t(x)$, $\alpha = 1, \ldots, m$, $\varkappa = m + 1, \ldots, n$. Wir haben dann die zugehörigen Ableitungsgleichungen

$$dy = \mathfrak{a}_i \omega^i \, ; \quad d\mathfrak{a}_j = \mathfrak{a}_i \omega^i_j \, .$$

Offenbar gilt für $\mathfrak{t} \in T_x(M)$ mit x aus dem Definitionsbereich des lokalen Repers:

1. $b(\mathfrak{t}) = \mathfrak{a}_\chi\, \omega^\varkappa_\alpha(\mathfrak{t}) \bmod g(x)$,
2. $\mathfrak{t} \in \operatorname{Ker}(dt)$ genau dann, wenn $\omega^\varkappa(\mathfrak{t}) = 0$, $\omega^\varkappa_\alpha(\mathfrak{t}) = 0$,
3. $\mathfrak{t} \in \operatorname{Ker}(dg)$ genau dann, wenn $\omega^\varkappa_\alpha(\mathfrak{t}) = 0$.

Wegen der speziellen Wahl der Basis $\mathfrak{a}_i$ haben wir $\omega^\varkappa = 0$. Es iglt also $\operatorname{Ker}(b) = = \operatorname{Ker}(dt) = \operatorname{Ker}(dg)$, woraus die Behauptung folgt. Da die Eigenschaften a) und b) zur projektiven Geometrie gehöheren, haben wir: *Eine Immersion $f : M^m \to \to P^n$ in den n-dimensionalen projektiven Raum ist genau dann eine ND-Immersion, wenn die Tangentialabbildung, welche jedem Punkt $x \in M$ den projektiven Tangentialraum an $f(M)$ in $f(x)$ zuordnet, regulär ist.*

Definition 1.3. f_0, f_1 seien zwei ND-Immersionen von M in N. Eine reguläre Homotopie f_t, $0 \leqq t \leqq 1$, zwischen ihnen nennen wir eine *ND-Homotopie*, wenn jedes f_t eine ND-Immersion ist. f_0, f_1 heissen dann *ND-homotop*.

Beispiel 1.4. Es sei $f : M^m \to A^{m+1}$ eine Immersion einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M in den affinen Raum mit der Kodimension 1. Es gilt dann nach dem bekannten Satz von S. S. Chern und R. K. Lashof [1]: *M ist diffeomorph zur Sphäre S^m und f bettet S^m als konvexe Hyperfläche in A^{m+1} ein.* Offenbar gibt es genau zwei ND-Homotopieklassen, die durch eine Spiegelung des A^{m+1} an einer Hyperebene ineinander übergehen.

Beispiel 1.5. Es seien f_0 und f_1 zwei regulär homotope Immersionen einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit M in den affinen A^3. Die Flächen seien hyperbolisch gekrümmt. f_0 und f_1 induzieren dann zwei Felder von Asymptotenrichtungen auf M. Eine notwendige Bedingung dafür, dass f_0 und f_1 ND-homotop sind, ist, dass die entsprechenden Felder homtop sind. (Wir werden in § 3 eine Umkehrung beweisen.)

Beispiel 1.6. Eine reguläre Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist genau dann nicht degeneriert, wenn ihre geodätische Krümmung von Null verschieden ist. Zur ND-Homotopieklassifikation von Kurven auf der 2-Sphäre und in dreidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten siehe J. A. Little [10], E. A. Feldmann [3] (Ist die Kodimension grösser als 2, dann wird das Problem aus Transversalitätsgründen trivial, siehe zum Beispiel Satz 2.2). Ausserdem sei auf den Übersichtsartikel von W. F. Pohl [13] und den dort zitierten Satz über ND-Isotopien geschlossener Kurven im E^3 von J. F. Dillon und W. F. Pohl hingewieseen.

Wir wollen nun einige Bezeichnungen zusammenstellen, wie wir sie im folgenden mehrfach benutzen werden:

Es seien E, F zwei endlich dimensionale reelle Vektorräume. Hom (E, F) sei die Menge der linearen Homomorphismen von E in F, $R(E, F)$ sei die Teilmenge der injektiven Homomorphismen.

$Q(E, F)$ sei die Menge der symmetrischen Bilinearformen von E mit Werten in F. Es gilt $Q(E, F) \approx (E \circ E)^* \otimes F$.

$ND(E, F)$ sei die Teilmenge der nicht ausgearteten Elemente von $Q(E, F)$ (d. h., aus $b(x, y) = 0$ für alle y folge $x = 0$).

$B(E, F)$ sei die Menge der Paare (i, j) mit $i \in R(E, F)$ und $j \in ND(E, F/iE)$.

$B_{ND}(E, F)$ sei die Menge der Paare (i, j) mit $i \in R(E, F)$ und $j \in ND(E, F/iE)$.

Diese Räume sind in naheliegender Weise differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ausserdem ist $B(E, F)$ ein Faserbündel über $R(E, F)$ mit der Faser $Q(E, F/iE)$ über i und $B_{ND}(E, F)$ ist ein Faserbündel über $R(E, F)$ mit der Faser $ND(E, F/iE)$ über $i \in R(E, F)$.

Diese Konstruktionen lassen sich faserweise auf Vektorraumbündel übertragen. Ist E ein Vektorraumbündel über X und F eines über Y, dann bilden wir zum Beispiel

$$B[E, F] = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} B(E_x, F_y)$$

und analog die Bündel Hom $[E, F]$, $R[E, F]$, $Q[E, F]$, $ND[E, F]$, $ND[E, F]$, $B_{ND}[E, F]$. Im Fall $X = Y$ können wir auch die Bündel

$$B(E, F) = \Delta^* B[E, F] = \bigcup_{x \in X} B(E_x, F_x)\ ;$$

Δ Diagonalabbildung und analog Hom (E, F), $R(E, F)$, u.s.w. bilden.

Die Räume Hom (E, F), $R(E, F)$, ... und vermöge der ersten Projektion $X \times Y \to X$ auch die Räume Hom $[E, F]$, $R[E, F]$, ... sind Faserbündel über X. Die zugehörigen Räume der globalen Schnitte werden mit $\overline{\text{Hom}}\,(E, F)$, $\bar{R}(E, F)$, ... bezeichnet. Diese letzteren Räume sind mit der kompakt-offen Topologie versehen.

Ein Element $f \in \overline{\text{Hom}}\,[E, F]$ ist zum Beispiel im wesentlichen nichts weiter als ein Vektorbündelmorphismus $f : E \to F$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\bar{f}]{} & Y \end{array} \quad \bar{f}(\pi_E(z)) = \pi_F\, f(z)\,.$$

Wir haben dann eine kanonische Faktorisierung von $f = \tilde{f} \circ \hat{f}$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\hat{f}} & \bar{f}^* F & \xrightarrow{\tilde{f}} & F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\text{id}]{} & X & \xrightarrow[\bar{f}]{} & Y \end{array}$$

Ist f faserinjektiv, dann wird oft $f(E_x)$ mit E_x identifiziert, wie wir das schon am Anfang von § 1 bei der Betrachtung der zweiten Fundamentalform stillschweigend getan haben.

2. DER RAUM DER ND-IMMERSIONEN

Es seien wieder M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $m = \dim M < n = \dim N$, M kompakt, mit oder ohne Rand und auf N sei ein torsionsfreier Zusammenhang gegeben.

Wir geben nun zwei andere Beschreibungen der zweiten Fundamentalform einer Immersion an. Eine in speziellen Koordinaten und eine invariante im Jet-Kalkül.

Es sei $f : M \to N$ eine Immersion mit $f(x_0) = y_0$. x^α, $\alpha = 1, \dots, m$ seien beliebige lokale Koordinaten in einer Umgebung von x_0 und y^i, $i = 1, \dots, n$ seien Normalkoordinaten mit dem Zentrum y_0, wobei in y_0 $\partial y/\partial y^\alpha = \mathrm{d}f(\partial x/\partial x^\alpha)$ gelten soll. Eine leichte Rechnung zeigt dann, dass die zweite Fundamentalform von f in x_0 durch

$$b_{x_0}(\partial x/\partial x^\alpha, \partial x/\partial x^\beta) = \sum_{\varkappa=m+1}^{n} \frac{\partial^2 y^\varkappa}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta} \cdot \frac{\partial y}{\partial y^\varkappa} \bmod T_{x_0}(M) \tag{1}$$

gegeben wird.

Der Ausdruck (1) zeigt, dass b_{x_0} nur von dem 2-Jet $j^2_{x_0}(f)$ (und natürlich dem Zusammenhang auf N) abhängt. Diese Abhängigkeit kann auch koordinatenfrei beschrieben werden: Der Zusammenhang auf N gestattet eine Identifikation von $J^2(M, N)$, dem Bündel der 2-Jets von lokalen Abbildungen von M in N, und Hom $[T^2M, TN]$, indem $j^2_x(f)$ die zweite oskulierende Abbildung $\mathrm{D}^2_x(f) : T^2_x(M) \to T_{f(x)}(N)$ zugeordner wird (vgl. W. F. Pohl [12], E. A. Feldmann [2]). Zum zweiten Tangentialbündel $T^2(M)$ von M gehört eine natürliche kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln

$$0 \to T(M) \xrightarrow[i]{} T^2(M) \xrightarrow[j]{} \overset{2}{\circ}T(M) \to 0$$

und es gilt $\mathrm{D}^2 f \circ i = \mathrm{d}f$, dass heisst, die Einschränkung der zweiten oskulierenden Abbildung $\mathrm{D}^2 f$ auf das Tangentialbündel ist das Differential von f. Die zweite Fundamentalform von f kann dann dadurch charakterisiert werden, dass das folgende Diagramm mit exakten Zeilen kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T(M) & \xrightarrow{i} & T^2(M) & \xrightarrow{j} & \overset{2}{\circ}T(M) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{D_x{}^2 f}} & & \downarrow{\scriptstyle b_x} & & \\ 0 & \to & T(M) & \xrightarrow[\mathrm{d}f]{} & f^*\, T(N) & \xrightarrow[p]{} & N_f & \to & 0 \end{array} \tag{2}$$

(p bedeutet die natürliche Projektion).

Wir haben eine natürliche Projektion von $J^2(M, N)$ auf $J^1(M, N) =$ Hom $[TM, TN]$, die durch $j^2_x(f) \to j^1_x(f) = \mathrm{d}f$ definiert ist. $J^2_0(M, N)$ sei das Urbild von $R[TM, TN]$. Die eingeschränkte Projektion $J^2_0(M, N) \to R[TM, TN]$ lässt sich dann durch die Abbildung $\varphi : J^2_0(M, N) \to B[TM, TN]$ faktorisieren, welche durch $\varphi(j^2_x(f)) = (\mathrm{d}_x f, b_x(f))$ definiert ist.

Der folgende Hilfssatz ist für die Beweise dieses Paragraphen grundlegend:

Hilfssatz 2.1. *$\varphi : J_0^2(M, N) \to B[TM, TN]$ ist eine lokal triviale Faserung mit der Faser R^k, $k = m^2(m = 1)/2$.*

Zum Beweis benutzen wir die Identifikation $J^2(M, N) \approx \mathrm{Hom}\,[T^2M, TN]$ und beachten, dass sich dann φ durch das Diagramm (2) definieren lässt. Wenn wir auf T^2M und TN Fasermetriken einführen, dann wird φ sogar eine Vektorbündelprojektion und wir können $\varphi^{-1}(\varphi(j_x^2 f))$ mit $\mathrm{Hom}\,(\overset{2}{\circ}T_x(M),\ T_x(M))$ identifizieren.

Wir bezeichnen nun mit $C_\infty(M, N)$ den Raum der differenzierbaren Abbildungen von M in N mit der C_∞-Topologie (Es sei daran erinnert, dass wir M als kompakt voraussetzen und daher grobe und feine C_∞-Topologie zusammenfallen). $C_{ND}(M, N)$ sei der offene Unterraum der ND-Immersionen von M in N.

Satz 2.2. *$C_{ND}(M, N)$ liegt in $C_\infty(M, N)$ dicht, wenn $n \geqq 2m + 1$ gilt. Gilt $n \geqq 2m + 2$, dann liegen die ND-Homotopien dicht in $C_\infty(M \times I, N)$.*

B e w e i s. Es sei also $n \geqq 2m + 1$. Da die Immersionen in $C_\infty(M, N)$ dicht liegen, brauchen wir nur zu zeigen, dass $C_{ND}(M, N)$ im Raum $Im\,(M, N)$ der Immersionen dicht liegt. S sei die Teilmenge von $J_0^2(M, N)$, welche aus den 2-Jets $j_x^2(f)$ besteht, für die $b_x(f)$ ausartet. S zerfällt in Teilmengen S_i, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$, die durch $\dim \mathrm{Ker}\, b_x(f) = i$ (in der Darstellung (2) 1) definiert sind. Die erste Behauptung von Satz 2.1 folgt unmittelbar aus dem verallgemeinerten *Thomschen* Transversalitätssatz (vgl. R. Thom, H. Levine [14]) und dem folgenden

Hilfssatz 2.3. *S_i ist eine Untermannigfaltigkeit von $J^2(M, N)$ mit einer Kodimension $\leqq n - m$.*

Die Behauptung lässt sich mit Hilfe von Hilfssatz 2.1 leicht auf die folgende elementare Tatsache zurückführen: Durch Defekt$(b) = i$ wird im Vektorraum der reellen quadratischen Formen auf $\boldsymbol{R}^m$ eine Untermannigfaltigkeit L_i der Kodimension $i(i + 1)/2$ definiert. Ordnen wir nämlich jeder quadratischen Form $b \in L_i$ ihren total isotropen Raum zu, dann erhalten wir eine differenzierbare Abbildung von L_i auf die Grassmannsche Mannigfaltigkeit $G_{i,m}$, durch die L_i zu einem Vektorraumbündel der Faserdimension $(m - i)(m - i + 1)/2$ über $G_{i,m}$ wird.

Ist $Q_{m,k}$ die Mannigfaltigkeit der quadratischen Formen auf $\boldsymbol{R}^m$ mit Werten in $\boldsymbol{R}^k$, dann wird durch Defekt $(b) = i$ eine Untermannigfaltigkeit L_i der Kodimension $ki(i + 1)/2$ definiert, denn es gilt

$$Q_{m,k} \approx \underbrace{Q_{m,1} \times \ldots \times Q_{m,1}}_{k\text{-mal}}$$

und es gilt $\mathrm{Kodim}\, L_i \leqq k$, speziell $\mathrm{Kodim}\, L_1 = k$.

Wir haben nun nach Hilfssatz 2.1 das kommutative Diagramm von Faserungen

$$\begin{array}{ccc} J_0^2(M, N) & \xrightarrow{\varphi} & B[TM, TN] \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & J^1(M, N) & \end{array}$$

und die Fasern von φ sind gerade vom Typ $Q_{m,n-m}$, woraus die Behauptung von Hilfssatz 2.3 folgt.

Um die zweite Behauptung von Satz Satz 2.1 einzusehen, braucht man nur statt $S_i \subset J_0^2(M, N)$ in $J^2(M \times I, N)$ die Teilmengen $\tilde{S}_i = \psi^{-1}(S_i)$ betrachten, wobei $\psi : J^2(M \times I, N) \to J^2(M, N)$ in naheliegender Weise durch die zweite Projektion $M \times I \to M$ induziert sei. Offenbar gilt Kodim $\tilde{S}_i$ = Kodim S_i.

Wir wollen nun den schwachen Homotopietyp von $C_{ND}(M, N)$ „berechnen"

Satz 2.4. *Es sei M offen, d. h., $\partial M \neq \emptyset$, dann ist die durch $\phi(f)(x) = (d_x f, b_x(f))$ definierte Abbildung*

$$\phi : C_{ND}(M, N) \to \bar{B}_{ND}[TM, TN]$$

eine schwache Homotopieäquivalenz.

Beweis. Durch Einschränkung der Abbildung φ aus Hilfssatz 2.1 auf $J_{ND}^2(M, N) = \varphi^{-1}(B_{ND}[TM, TN])$ erhalten wir die Abbildung

$$\varphi : J_{ND}^2(M, N) \to B_{ND}[TM, TN] .$$

Da wir φ als Vektorbündelprojektion auffassen können, lässt sich eine fasertreue Deformationsretraktion von $J_{ND}^2(M, N)$ auf einen zu $B_{ND}[TM, TN]$ diffeomorphen Unterraum X finden. Durch Übertragung dieser Retraktion auf die zugehörigen Räume der Schnitte über M erhalten wir eine Einbettung von $\bar{B}_{ND}[TM, TN]$ in den Raum der Schnitte von 2-Jets über M als Deformationsvetrakt. Diesen beiden Räume haben also denselben Homotopietyp. Andererseits besagt das Theorem von M. L. Gromov [5] (vgl. auch A. Haefliger [6], V. Poénaru [11]) in unserer Situation gerade, dass die durch $\Psi(f)(x) = j_x^2(f)$ definierte Abbildung

$$\Psi : C_{ND}(M, N) \to J_{ND}^2(M, N)$$

eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Folglich ist auch die Abbildung Φ eine schwache Homotopieäquivalenz.

Bemerkung 2.5. Es sei $f_t : M \to N$ eine reguläre Homotopie, $0 \leqq t \leqq 1$. Bekanntlich sind dann die Normalbündel N_{f_0} und N_{f_1} ispmorph und man kann eine bis auf fasertreue Homotopie eindeutig bestimmte Isomorphie zwischen diesen Bündeln auszeichnen. Genauer gilt: Es existiert eine Isomorphie $\varphi_t : N_{f_0} \to N_{ft}$ über M, die in folgenden Sinne stetig von t abhängt. Wir bezeichnen mit F die durch $F(x, t) = f_t(x)$ definierte Abbildung von $M \times I$ in N und mit E das Vektorraumbündel $E = F^* T(N)/T(M) \times I$. Für jedes t existiert dann eine kanonische Isomorphie $\psi_t : E \mid M \times \{t\} \to N_{f_t}$. Es hängt dann $\iota_t = \psi_t^{-1} \circ \varphi_t : N_{f_0} \to E$ stetig von t ab, d. h., $t \to \iota_t$ ist ein stetiger Weg in $\bar{R}[N_{f_0}, E]$ (speziell gilt also $\varphi_0 = \mathrm{id}_{N_{f_0}}$). (Um das einzusehen, vergleiche man zum Beispiel die Beweise in Husemoller [8] I 3 § 4). Wir können also von dem Normalbündel einer regulären Homotopieklasse von Immersionen sprechen, wenn es uns nur bis auf Homotopie ankommt.

Es sei nun eine Immersion $f : M \to N$ gegeben. Eine notwendige Bedingung dafür, dass zwei Immersionen f_1, f_2, die zur regulären Homotopieklasse von f gehören, ND-homotop sind, ist, dass ihre zweiten Fundamentalformen, die wir jetzt als quadratische Formen auf M mit Werten in N_f auffassen, in derselben zusammenhängenden Komponente von $B_{ND}(TM, N_f)$ liegen. Wir zeigen nun, dass unter der Voraussetzung $\partial M \neq \emptyset$ auch die Umkehrung gilt

Satz 2.6. (Voraussetzungen wie in Satz 2.5.) *Es sei $f : M \to N$ eine Immersion. Dann induziert die Abbildung, welche jeder zu f regulär homotopen Immersion ihre zweite Fundamentalform zuordnet, eine Bijektion zwischen den ND-Homotopieklassen, die zur regulären Homotopieklasse von f gehören und den Homotopieklassen von nicht ausgearteten quadratischen Formen auf $T(M)$ mit Werten im Normalbündel N_f von f.*

Beweis. Wir haben das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_{ND}(M, N) & \overset{\Phi}{\to} & \bar{B}_{ND}[TM, TN] \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ Im(M, N) & \underset{\mathrm{d}}{\to} & \bar{R}[TM, TN] \end{array}$$

Φ ist wie in Satz 2.4 definiert, i ist die identische Einbettung, d ist die Abbildung, welche jeder Immersion f ihr Differential $\mathrm{d}f : TM \to TN$ zurodnet und entsteht durch Übetragung der Bündelprojektion $B_{ND}[TM, TN] \to R[TM, TN]$ auf Schnitte. Wenn wir zu den Zusammenhangskomponenten übergehen, erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(C_{ND}(M, N)) & \overset{\Phi\#}{\to} & \pi_0(\bar{B}_{ND}[TM, TN]) \\ \downarrow i\# & & \downarrow p\# \\ \pi_0(Im(M, N)) & \overset{\mathrm{d}\#}{\to} & \pi_0(\bar{R}[TM, TN]) \end{array}$$

Die obere Bijektion kommt von Satz 2.4 und die untere von der *Hirsch-Smale*-Theorie der Immersionen (vgl. z. B. A. Haefliger [6], V. Poénaru [11]). Es sei α_f die zu $\mathrm{d}f : TM \to TN$ gehörende zusammenhängende Komponente in $\bar{R}[TM, TN]$. Wir haben also eine Bijektion zwischen den zur regulären Homotopieklasse von f gehörenden ND-Homotopieklassen und $p^{-1}(\alpha_f)$. Diese letztere Menge können wir aber mit $\pi_0(ND(TM, N_f))$ identifizieren (vgl. die Bemerkung 2.5).

3. ND-HOMOTOPIEN VON HYPERFLÄCHEN

Wir wollen zunächst einige Bezeichnungen für Hyperflächen in einer affin zusammenhängenden Mannigfaltigkeit N mit symmetrischem Zusammenhang vereinbaren. Auf den Mannigfaltigkeiten M^m, N^{m+1} seien feste Orientierungen vorgegeben. Wir können dann jeder Immersion $f : M \to N$ eine feste Normalenrichtung zuordnen. Wir benutzen eine Trivialisierung von N_f, $M \times R \to_{\approx} N_f$, so dass das Bild von $M \times \boldsymbol{R}^+$ in dieser ausgezeichneten Richtung liegt. Die zweite Fundamentalform von f induziert dann eine reelle quadratische Form Q auf M, die nicht ausgeartet ist, wenn f ND-Immersion ist. Wir wollen dann f *elliptisch vom Typ* $+$ (*vom Typ* $-$) nennen, wenn Q positiv definit (negativ definit) ist und f heisse *hyperbolisch vom Typ* i, wenn Q nicht ausgeartet vom Index i ist. Es ist klar, dass diese Definitionen nicht von der speziellen Wahl der Trivialisierung des Normalbündels abhängen.

Aus dem Klassifikationssatz 2.6 ergibt sich nun leicht

Satz 3.1. *Es seien M^m, N^{m+1} orientierte Mannigfaltigkeiten, M kompakt zusammenhängend und $\partial M \neq \emptyset$. Auf N sei ein symmetrischer Zusammenhang gegeben. Dann gilt: In jeder regulären Homotopieklasse von Immersionen von M in N gibt es je eine ND-Homotopieklasse elliptischer Immersionen vom Typ $+$ und vom Typ $-$. Zwischen den ND-Homotopieklassen hyperbolischer Immersionen vom Typ i, $1 \leqq i \leqq m-1$, in einer regulären Homotopieklasse und den Homotopieklassen i-dimensionaler Distributionen auf M gibt es eine natürliche Bijektion.*

Beweis. Auf Grund von Satz 2.6 läuft die Klassifikation der zu einer gegebenen Immersion f regulär homotopen Immersionen darauf hinaus, die Homotopieklassen der nicht ausgearteten quadratischen Formen auf M zu bestimmen. Dies lässt sich in naheliegender Weise wie folgt durchführen: Wir benutzen aus technischen Gründen eine Riemannsche Metrik auf M. Es sei G eine nicht ausgeartete quadratische Form auf M. Das assoziierte Feld von Endomorphismen der Tangentialräume bezeichnen wir mit H. Die zu den negativen Eigenwerten Eigenwerten von G gehörenden Unterräume liefern eine i-dimensionale Distribution D auf M, wobei i der Index von G ist. Mit $D^\perp$ werden die Distribution der orthogonalen Komplemente von D_x, $x \in M$, bezeichnet. Durch

$$G_D(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = -(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1) + (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2)\,; \quad \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in T_x(M)\,,$$

wobei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2$ die der direkten Summe $T_x(M) = D_x \oplus D_x^\perp$ entsprechenden Zerlegungen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind, wird jeder Distribution D eine quadratische Form G_D zugeordnet. Offenbar ist G homotop zu G_D (in der Menge der nicht ausgearteten quadratischen Formen). Zum Beispiel liefert $t \to (1-t)\,G + tG_D$, $0 \leqq t \leqq 1$, eine Homotopie zwischen ihnen. Sind andererseits zwei i-dimensionale Distributionen D_1, D_2 geben, so sind die Formen G_{D_1} und G_{D_2} genau dann homotop, wenn die Distributionen es sind. Auf diese Weise erhalten wir eine Bijektion zwischen den Homotopiekeassen quadratischer Formen vom Index i und den Homotopieklassen i-dimensionaler Distributionen auf M. Sie hängt nicht von der benutzten Riemannschen Metrik auf M ab.

Folgerung 3.2. *Der Typ einer ND-Immersion ist die einzige lokale ND-Homotopieinvariante. Es gilt: Die ND-Immersionen der (orientierten) m-dimensionalen Vollkugel D^m werden bis auf ND-Homotopie durch ihren Typ* $(+, -, 1, \ldots, m-1)$

klassifiziert. Es gibt also $m + 1$ ND-Homotopieklassen von ND-Immersionen der D^m in eine zusammenhängende $(m + 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit N^{m+1}.

Bemerkung 3.3. Die Orientierbarkeitsvoraussetzungen sind hier ganz wesentlich. Ist zum Beispiel N nicht orientierbar, dann gibt es nur *eine* elliptische ND-Homotopieklasse von ND-Immersionen der D^m in N^{m+1}.

Wir wollen den Fall $m = 2$ noch etwas ausführlicher betrachten. Die hyperbolischen Immersionen von M^2 in N^3, welche zu einer festen regulären Homotopieklasse gehören, werden durch die Homotopieklassen 1-dimensionaler Distributionen klassifiziert. Mit Hilfe einer Parallelisierung von M^2, die der Orientierung von M^2 angepasst sei (eine Parallelisierung existiert wegen der vorausgesetzten Orientierbarkeit und $\partial M \neq \emptyset$ immer) können wir den Distributionen Winkelfunktionen $x \in M^2 \to \varphi(x) \in [0, \pi)$ zuordnen und diesen die entsprechenden Elemente von $\pi^1(M^2) = [M^2; S^1] \approx H^1(M^2)$. Auf diese Weise ordnen wir jeder ND-Immersion f eine ganzzahlige Kohomologieklasse $\gamma(f)$ zu. Da diese noch von der Wahl der Parallelisierung abhängt, definieren wir die Differenzklasse zweier ND-Immersionen f_1, f_2 als

$$\delta(f_1, f_2) = \gamma(f_1) - \gamma(f_2) \in H^1(M) .$$

Es zeigt sich, dass diese Kohomologieklasse nicht mehr von der Parallelisierung auf M abhängt. Sie hat die folgende einfache geometrische Bedeutung: Der Wert von $\delta(f_1, f_2)$ auf einem 1-Zyklus gibt die die Anzahl der vollen Umdrehungen der Asymptotenrichtungsfelder von f_2 um die von f_1 an, gemessen in dem der Orientierung von M entsprechendem Drehsinn.

Folgerung 3.4. *Es sei M^2 orientiert, kompakt, zusammenhängend und $\partial M \neq \emptyset$. Zwei hyperbolische Immersionen f_1, f_2 von M in eine affin zusammenhängende Mannigfaltigkeit N^3 sind genau dann ND-homotop, wenn sie regulär homotop sind und ihre Differenzklasse $\delta(f_1, f_2)$ verschwindet.*

Wir bemerken schliesslich noch, dass die Zuordnung $f \to \delta(f, f_0)$, bei einer festen gegebenen hyperbolischen ND- Immersion f_0, eine Bijektion zwischen den ND-Homotopieklassen hyperbolischer Immersionen in der regulären Homotopieklasse von f_0 und der ersten Kohomologiegruppe $H^1(M)$ induziert.

4. ND-IMMERSIONEN GESCHLOSSENER MANNIGFALTIGKEITEN

Bei ND-Immersionen geschlossener Mannigfaltigkeiten haben wir eine ganz andere Situation. Zum Beispiel hat die Existenz einer ND-Immersion $f : M \to N$ in der Kodimension 1 im allgemeinen bereits weitreichende topologische Konsequenzen für M zur Folge. Ausserdem spielt hier die Art des Zusammenhangs auf N eine grössere Rolle. Vergleiche dazu Beispiel 1.4 und die beiden folgende Beispiele.

Beispiel 4.1. Es sei N eine 3-dimensionale Riemansche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Schnittkrümmung und M sei eine geschlossene 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ist die Eulersche Charakteristik von M negativ, dann gibt es keine ND-Immersion von M in N. Wäre nämlich die Immersion hyperbolisch, dann gäbe es auf M ein stetiges Feld von Linienelementen und die Eulersche Charakteristik von M müsste verschwinden. Im elliptischen Fall dagegen, wäre die Krümmung der durch die Immersion induzierten Metrik positiv (vgl. z. B. S. Kobajashi, K. Nomizu [9], Chap. VII, Prop. 4.5.) und damit auch die Eulersche Charakteristik von M.

Beispiel 4.2. Der im positiven Drehsinn einfach durchlaufene Einheitskreis in der euklidischen Ebene besitzt nur eine ND-Homotopieklasse in seiner regulären Homotopieklasse. Führen wir aber in der Ebene die Metrik ein, welche durch die stereographische Projektion induziert wird (die zur Projektion benutzte Kugel habe den Radius 1 und ihr ihr Südpol liege im Kreismittelpunkt), dann sind die konzentrischen Kreise, deren Radien 2 (in der alten Metrik) überschreiten, nicht mehr ND-homotop zum Einheitskreis. Die Anzahl der ND-Homotopieklassen hat sich also geändert.

Das Problem der ND-Homotopieklassifikation scheint in der Tat für geschlossene Untermannigfaltigkeiten wesentlich komplizierter zu sein als für die nicht geschlossenen. Man kann aber einige der für offene Untermannigfaltigkeiten gewonnenen Ergebnisse auf geschlossene anwenden, indem man diese auf geeignete Weise in offene einbettet. Darin liegt der Sinn der im folgenden betrachteten Hilfskonstruktionen, die aber vielleicht auch für sich interessant sind.

Es sei $f: M \to N$ eine Immersion und $\omega: M \to N_f^*$ ein Schnitt im Dual des Normalbündels von f, der überall von Null verschieden sein soll. Auf N sei wieder ein Zusammenhang ohne Torsion gegeben. Durch $Q_x(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \langle \omega, b_x(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \rangle$; $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in T_x(M)$; wird auf M eine reelle quadratische Form definiert. Wir nennen (f, ω) ein *ND-Paar vom Typ* $+$ (oder vom Typ $-, 1, \ldots, m-1$), wenn Q positiv definit (oder negativ definit bzw. nicht ausgeartet und vom Index $i = 1, \ldots, m-1$) ist. Im folgenden betrachten wir nur ND-Paare vom Typ $+$. Offenbar ist für jedes ND-Paar $(f\ \omega)$ die Abbildung f eine ND-Immersion. Weiter gilt: Ist N orientiert, dann kann die Immersion $f: M \to N$ genau dann zu einer elliptischen Immersion $F: H^{n-1} \to N^n$ vom Typ $+$ fortgesetzt werden, wenn ein Schnitt $\omega: M \to N_f$ existiert, so dass (f, ω) ein ND-Paar vom Typ $+$ ist. (Dies ergibt sich beim Beweis von Satz 4.3.)

Wir interessieren uns hier für Homotopieklassen von ND-Paaren des Typs $+$. Genauer: Wir betrachten stetige Wege (f_t, ω_t), $0 \leqq t \leqq 1$, so dass (f_t, ω_t) für jedes t ein ND-Paar vom Typ $+$ ist.

Satz 4.3. *M^m sei kompakt, mit oder ohne Rand, N^n sei orientiert und mit einem Zusammenhang ohne Torsion versehen. Es gelte $n \geqq m + 2$ und es sei eine Immersion $f: M \to N$ gegeben. Dann existiert eine natürliche Bijektion zwischen den Homotopieklassen von ND-Paaren vom Typ $+$ in der regulären Homotopieklasse von f und den Homotopieklassen nirgends verschwindender Schnitte im Normalbündel von f.*

Zum Beweis benutzen wir aus technischen Gründen eine Riemannsche Metrik auf M (die nichts mit dem gegebenen Zusammenhang zu tun haben braucht). Ist (h, ω) ein ND-Paar, dann können wir ω mit einem Schnitt im Normalbündel $N_h \approx N_f$ identifizieren, den wir ebenfalls mit ω bezeichnen. Die spezielle Wahl der Metrik und auch der Isomorphie $N_h \approx N_f$ (vgl. Bemerkung 2.5) spielt keine Rolle, wenn wir zu den Homotopieklassen übergehen. Mit Γf bezeichnen wir den Raum der ND-Paare vom Typ $+$ in der regulären Homotopieklasse von f und $\Gamma_0 N_f$ sei der Raum der nicht verschwindenden Schnitte in N_f. Wir haben also eine Abbildung Φ : $: \pi_0(\Gamma f) \to \pi_0(\Gamma_0 N_f)$.

a) Φ ist surjektiv:

Ein Element von $\Gamma_0 N_f$ induziert ein eindimensionales Unterbündel L^1 von $f^* T(N)$ über M. E sei das Bündel der orthogonalen Komplemente von $T(M) \oplus L^1$ in $f^* T(N)$. Die Abbildung

$$H : \mathfrak{x} \in E_x \to \exp_{f(x)} (\mathfrak{x}) \in N$$

ist auf einer genügend kleinen Umgebung U von M (M identifiziert mit dem Nullschnitt von E) wohldefiniert und regulär. (exp bezieht sich stets auf den vorgebenen Zusammenhang auf N und nicht auf die Hilfsmetrik). Nach Satz 3.1 ist H regulär homotop zu einer elliptischen ND-Immersion $F : U \to N$ vom Typ $+$. Die Einschränkung von F auf M zusammen mit der Linearform in $(F^* T(N))^*$ die $T(U) \mid M$ in $F^* T(N) \mid M$ definiert und in der entsprechenden Richtung genommen wird, liefern das gesuchte Urbild in $\pi_0(\Gamma f)$.

b) Φ ist injektiv:

Wir haben zu zeigen: Es seien (f_0, ω_0) und (f_1, ω_1) zwei ND-Paare vom Typ $+$, so dass f_0 und f_1 regulär homotop zu f sind und ω_0, ω_1 dasselbe Element in $\pi_0(\Gamma_0 N_f)$ erzeugen. Dann existiert eine Homotopie von ND-Paaren (f_t, ω_t) vom Typ $+$ zwischen (f_0, ω_0) und (f_1, ω_1).

Es sei ω ein Vertreter des entsprechenden Elements in $\pi_0(\Gamma_0 N_f)$. Wir definieren wieder E als Bündel der orthogonalen Komplemente von $T(M) \oplus \mathscr{L}(\omega)$ in $f^* T(N)$ und analog die Bündel E_0, E_1 in $f_0^* T(N)$ und $f_1^* T(N)$. Wir haben dann bis auf eine Homotopie von Vektorbündelisomorphismen eindeutig bestimmte Isomorphismen $h_0 : E \to E_0$, $h_1 : E \to E_1$. Die Abbildung

$$\varphi_\alpha : \mathfrak{x} \in E_x \to \exp_{f_\alpha(x)} h_\alpha(\mathfrak{x} + \|\mathfrak{x}\|^2 \omega(x)) \; ; \quad \alpha = 0, 1$$

ist in einer genügend kleinen Umgebung U von M in E wohldefiniert (M wird wieder mit dem Nullschnitt identifiziert). Ausserdem zeigt man leicht mit Hilfe von Formel 2(1), dass die zweite Fundamentalform von φ_α auf M positiv definit ist (bezogen auf die Normalenrichtung von ω). Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit φ_α als elliptisch vom Typ $+$ annehmen. Ausserdem wählen wir U so, dass M ein Deformationsretrakt von U ist. Wenn wir zeigen können, dass φ_0 und φ_1 regulär homotop sind, dann sind wir fertig, denn nach Satz 3.1 gibt es dann eine ND-

Homotopie φ_t zwischen φ_0 und φ_1 und die Einschränkung $f_t = \varphi_t \mid M$ mit dem entsprechenden Normalenvektor von φ_t liefert die gewünschte ND-Homotopie von ND-Paaren des Typs $+$.

Nach Hirsch-Smale sind φ_0 und φ_1 genau dann regulär homotop, wenn $d\varphi_0$ und $d\varphi_1$ in $R[TU, TN]$ durch einen stetigen Weg verbunden werden können. Da M ein Deformationsretrakt von U ist, genügt es zu zeigen, dass $d\varphi_0 \mid M$ und $d\varphi_1 \mid M$ in $\bar{R}[T(U) \mid M, TN]$ verbunden werden können. Es gilt aber $T(U) \mid M \approx T(M) \oplus E$ wobei $d\varphi_\alpha \mid M$ dem Vektorräumbündelmorphismus $(df_\alpha, h_\alpha) : T(M) \oplus E \to TN$ entspricht. Wir können aber nach Voraussetzung h_0 mit h_1 in $\bar{R}[E, T(N)]$ verbinden und zwischen f_0 und f_1 liefert die reguläre Homotopie f_t einen Weg.

Beispiel 4.4. Es sei $f : S^2 \to A^5$ eine Immersion in den 5-dimensionalen affinen Raum. Bekanntlich ist N_f trivial und es gibt nur eine reguläre Homotopieklasse. Wir haben also $\pi_0(\Gamma_0 N_f) \approx [S^2; S^2] \approx \pi_2(S^2) \approx Z$. Es gibt also eine Bijektion zwischen den Klassen von ND-Paaren vom Typ $+$ und den ganzen Zahlen.

Die Surjektivität der Abbildung Φ aus dem Beweis von Satz 4.1 führt zu einem hinreichenden Kriterium für die Existenz einer ND-Immersion

Folgerung 4.5. *Es sei $f : M \to N$ eine Immersion mit einer Kodimension* $\geqq 2$. *Wenn im Normalbündel von f ein nirgends verschwindender Schnitt existiert, dann ist f regulär homotop zu einer ND-Immersion.*

Analog bekommt man aus der Injektivität von Φ ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer ND-Homotopie.

Im Fall geschlossener Kurven in einer dreidimensionalen affin zusammenhängenden Mannigfaltigkeit X gibt es offenbar eine natürliche Bijektion zwischen den Homotopieklassen von ND-Paaren des Typs $+$ und $\pi_0(C_{ND}(S^1, X))$. Daraus erhalten wir eine leichte Verallgemeinerung eines Satzes von E. A. Feldmann über ND-Kurven in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (E. A. Feldmann [3], vgl. auch [4] § 7):

Folgerung 4.6. *Auf der orientierbaren Mannigfaltigkeit X^3 sei ein symmetrischer Zusammenhang gegeben. Die Abbildung, welche jeder geschlossenen Kurve $x : S^1 \to X^3$ ihre ersten und zweiten Ableitungen $t \to (dx/dt, \nabla^2 x/dt^2)$ zuordnet, induziert eine Bijektion zwischen den ND-Homotopieklassen geschlossener Kurven und den freien Homotopien geschlossener Wege in der Tangential-Zweibeinmannigfaltigkeit $V_2(X)$ von X.*

Literatur

[1] *S. S. Chern, R. K. Lashof,* On the total curvature of immersed manifolds I, Amer. J. Math. *79* (1957), 306–318.

[2] *E. A. Feldmann,* The geometry of immersions I, Trans. Amer. Math. Soc. *120* (1965), 185–224.

[3] *E. A. Feldmann,* Nondegenerate curves in a Riemannian manifold, Journal of Differential Geometry (erscheint demnächts).
[4] *E. A. Feldmann,* Immersions with nowhere vanishing mean curvature vector, Topology *12* (1973), 201—228.
[5] *M. L. Gromov,* Стабильное отображения слоений в многообразаия, Izv. Akad. Nauk SSSR *33* (1969), 707—734.
[6] *A. Haefliger,* Lectures on the theorem of Gromov, Procedings of Liverpool Singularities Symposium II, Lecture Notes in Math. *209* (1971), 128—141.
[7] *R. Hermann,* Differential geometry and the calculus of variations, Academic Press, 1968.
[8] *D. Husemoller,* Fibre bundles, Mc Graw Hill 1966.
[9] *S. Kobajashi, K. Nomizu,* Foundations of differential geometry II, Interscience Publishers 1969.
[10] *J. A. Little,* Non degenerate homotopies of curves on the unit 2-sphere, Journal of Differential Geometry *4* (1970), 339—348.
[11] *V. Poénaru,* Homotopy theory and differentiable singularities manifolds, Amsterdam 1970, Lecture Notes in Mathematics *197* (1971), 106—132.
[12] *W. F. Pohl,* Connexions in Differential geometry of higher order, Trans. Amer. Math. Soc. *125* (1966), 310—325.
[13] *W. F. Pohl,* Singularities in the differential geometry of submanifolds, Procedings of Liverpool Singularities Symp. II, Lecture Notes in Math. *209* (1971), 104—113.
[14] *R. Thom, H. Levine,* Singularities of differentiable mappings, Bonner Math. Schriften 6 (1959).

Auschrift des Verfassers: Humbolt Universität zu Berlin, Sektion Mathematik, Berlin, Unter den Linden 6, DDR.