Czechoslovak Mathematical Journal

Nikolay V. Veličko

Заметка о перистых пространствах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 1, 8–19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101288

Czechoslovak Mathematical Journal, 25 (100) 1975, Praha

ЗАМЕТКА О ПЕРИСТЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н. В. ВЕЛИЧКО, Тюмень

(Поступило в редакцию 13. VII. 1972 г., переработаное 6. IV. 1974 г.)

В заметке автора [5] изучено поведение слабо паракомпактных p-пространств при замкнутых и совершенных отображениях. Мы продолжим изучение свойств перистых пространств, основное внимание уделив строго перистым пространствам и проблеме уплотнений.

Строго перистые пространства обладают рядом интересных свойств, из которых нам хотелось бы отметить следующие:

Теорема 1. *Строго перистое пространство изокомпактно.*

Теорема 2. *Строго перистое нормальное пространство является Р-пространством Морита.*

Теорема 3. *Строго перистое всецело нормальное пространство паракомпактно.*

Понятие строгого оперения введено в [3]. Оказалось возможным несколько ослабить это свойство, не теряя при этом основных его достоинств.

В основном мы будем придерживаться соглашений и обозначений, принятых в [5].

Пишем $\gamma > \sigma$, если γ является измельчением σ, т. е., всякий элемент $H \in \gamma$ содержится в некотором $V \in \sigma$.

Некоторые обозначения:

$\tilde{\gamma} = \bigcup\{H : H \in \gamma\}$ – тело γ,
$\gamma \cap A = \{H \cap A : H \in \gamma\}$,
$|X|$ – мощность X.

Напомним определение перистых пространств.

Пусть $X \subseteq Y$. Последовательность $\{\gamma_n\}$ открытых в Y покрытий X называется *оперением* X в Y, если $\bigcap_n \gamma_n x \subseteq X$ для каждой точки $x \in X$. Важный для нас случай получается при $Y = \beta X$, где βX — стоун-чеховское бикомпактное расширение X. Если X обладает оперением в βX, то X называется *перистым*, или *р-пространством* [2].

1. ПОЛУСТРОГО ПЕРИСТЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Оперение $\{\gamma_n\}$ пространства X в βX называется *строгим*, если $\bigcap\limits_n \gamma_n x = \bigcap\limits_n [\gamma_n x]_{\beta X}$ для каждой точки $x \in X$ [3]. Все свойства строгих p-пространств, доказанные в этой работе, переносятся на более широкий и не менее естественный класс пространств, определение которого приводится ниже.

Определение 1. Оперение $\{\gamma_n\}$ пространства X в Y называется *полустрогим*, если $\bigcap\limits_n [\gamma_n x]_Y \subseteq X$ для каждой точки $x \in X$. Пространство X назовем *полустрого перистым*, или кратко *ssp-пространством*, если X обладает полустрогим оперением в βX.

В следующем списке собраны элементарные свойства таких пространств.

Предложение 1. *Имеют место утверждения:*

(A) *Если X обладает оперением полустрогим в некотором бикомпактном расширении bX, то X обладает полустрогим оперением и в любом расширении cX.*

(B) *Замкнутое подпространство ssp-пространства полустрого перисто.*

(C) *Тихоновское произведение счетного числа ssp-пространств полустрого перисто.*

(D) *Если ssp-пространство уплотняется на пространство с измельчающейся последовательностью покрытий, то оно само обладает измельчающейся последовательностью.*

(E) *Совершенный прообраз ssp-пространства полустрого перист.*

(F) *Если $\{\gamma_n\}$ — полустрогое оперение X в βX и γ_n локально конечно на X для каждого n, то X паракомпактно.*

(G) *Если $\{\gamma_n\}$ — полустрогое оперение X в βX и γ_n точечно конечно на X для всякого n, то X слабо паракомпактно.*

Все вышеприведенные утверждения доказываются стандартно, либо элементарно — за исключением (G).

Докажем (G). Можно предположить, что $\gamma_n > \gamma_{n-1}$.

Пусть γ — открытое покрытие X, t_n — совокупность всех элементов из $\gamma_n \cap X$, покрываемых конечным числом элементов γ. Семейство $t = \bigcup\limits_n t_n$ покрывает X. Действительно, пусть $x \in X$. Тогда $Kx = \bigcap\limits_n [\gamma_n x]_{\beta X} \subseteq X$ бикомпактно, поэтому покрывается конечным семейством $\gamma_x \subseteq \gamma$. В силу полустрогости найдется n такое, что $(\gamma_n x \cap X) \subseteq \tilde{\gamma}_x$, и если $x \in P \in \gamma_n \cap X$, то $P \in t_n$.

Пусть $P \in t_n$ и $P \subseteq \bigcup\{H_i : H_i \in \gamma\}$. Положим $P_i = P \cap H_i$, $\delta_{ni} = \{P_i : P \in t_n\}$ и $\delta_n = \bigcup\limits_i \delta_{ni}$. Тогда δ_n точечно конечно, $\delta = \bigcup \delta_n$ измельчает γ и $\delta_n > \gamma_n$.

Положим $K_n = \bigcup\{S : S \in \delta,\ S \not\subset \bigcup\limits_{i<n} \tilde{\delta}_i\}$, считая δ_0 пустым. Семейство $\{K_n\}$ точечно конечно и покрывает X. Действительно, пусть $x \in X$. Так как бикомпакт Kx покрывается семейством $\{\tilde{\delta}_n\}$, то найдется n_0 такое, что $(\gamma_n x \cap X) \subseteq \subseteq \bigcup\{\tilde{\delta}_i : i \leqq n_0\}$ при $n \geqq n_0$. Ясно, что $x \notin K_n$ при $n > n_0$. Положим $\pi_n = = \{K_n \cap H : H \in \bigcup \delta_i,\ i \leqq n\}$, $\pi = \bigcup \pi_n$. Тогда π – точечно конечное измельчение γ. Действительно, π_n точечно конечно в силу точечной конечности δ_i, $i \leqq n$. Если же $x \notin K_n$, то $x \notin \tilde{\pi}_n$. Легко проверить, что π покрывает X. (G) доказано.

Пространство X называется *изокомпактным*, если всякое замкнутое счетно компактное множество в X бикомпактно [9].

Этим полезным свойством обладают и ssp-пространства:

Теорема 1. *Всякое ssp-пространство изокомпактно.*

Более общей является

Теорема 2. *Полустрого перистое $\aleph_1$-компактное пространство финально компактно.*

Пространство X называют *$\aleph_1$-компактным*, если всякое несчетное множество в X имеет предельную точку.

Теорема 1 следует из теоремы 2: финально компактное пространство изокомпактно [9].

Наиболее общую форму теоремы 2 мы получим, введя следующее понятие.

Определение 2. Пространство X назовем (*счетно*) *микрополным*, если к любому (счетному) открытому покрытию γ пространства X можно будет подобрать последовательность $\{\gamma_n\}$ открытых покрытий X таким образом, чтобы выполнялось условие: для точки $x \in X$ найдется $n = n(x)$ такое, что $\gamma_n x$ покрывается конечным числом элементов γ. Последовательность $\{\gamma_n\}$ назовем для удобства *σ-измельчением γ*.

Предложение 2. *Всякое ssp-пространство микрополно. Микрополное полное по Чеху пространство полустрого перисто.*

Основным свойством микрополных пространств является следующее:

Предложение 3. *Микрополное $\aleph_1$-компактное пространство финально компактно.*

Доказательство. Финально компактные пространства характеризуются свойством: всякое счетно центрированное семейство замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

Пусть $\mathfrak{F}$ – центрированное семейство замкнутых в X множеств с пустым пересечением. Положим $F = \bigcap\{[A]_{\beta X} : A \in \mathfrak{F}\}$. Тогда $F \subseteq \beta X \setminus X$. Для каждой точки $x \in X$ находим окрестность Ox в X такую, что $[Ox]_{\beta X} \cap F = \emptyset$. Пусть $\{\sigma_n\}$ – σ-измельчение покрытия $\{Ox : x \in X\}$. По его определению для каждой точки $x \in X$ найдется $n = n(x)$ такое, что $[\sigma_n x]_{\beta X} \cap F = \emptyset$. Положим $T_m = \{x \in X : n(x) = m\}$. Ясно, что $X = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} T_m$. Для каждого m найдется счетное число точек $x_i(m) \in T_m$ таких, что $T_m \subset \bigcup\limits_{i=m}^{\infty} \sigma_m\, x_i(m)$. Действительно, если предположить противное, то по трансфинитной индукции можно построить несчетную последовательность $\{x_\alpha(m) : \alpha < \omega_1\}$ точек множества T_m с выполнением условия: 1) $x_\alpha(m) \notin \bigcup\{\sigma_m\, x_\beta(m) : \beta < \alpha\}$.

Из 1) следует, что множество $M = \{x_\alpha(m) : \alpha < \omega_1\} \subseteq X$ несчетно и не имеет предельной точки (пусть $x \in X$ и $x \in H \in \sigma_m$, если α – первое такое, что $x_\alpha(m) \in H$, то $x_\beta(m) \notin H$ при $\beta > \alpha$ по условию 1)). Доказанное противоречит $\aleph_1$-компактности X.

Для каждой пары (i, m) найдется множество $\Phi_{im} \in \mathfrak{F}$ такое, что $\Phi_{im} \cap \sigma_m\, x_i(m) = \emptyset$. Действительно, если предположить противное, то семейство $\sigma_{mi} = \{[\sigma_m\, x_i(m)]_{\beta X} \cap [A]_{\beta X} : A \in \mathfrak{F}\}$ было бы центрированным для некоторой пары (i, m), так что $\bigcap\{B : B \in \delta_{mi}\} \neq \emptyset$. Но последнее невозможно ($[\sigma_m\, x_i(m)]_{\beta X} \cap F = \emptyset$). Так как $X = \bigcup\{\sigma_m\, x_i(m) : i, m = 1, 2, \ldots\}$, то $\bigcap\limits_{i,m} \Phi_{im} = \emptyset$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ не является счетно центрированным.

Предложение доказано.

Следствие 1. *Пространство X строго перисто тогда и только тогда, когда X – изокомпактное Δ-пространство.*

Δ-пространсгва определены в [11]. В одну сторону утверждение доказано в [8].

Следствие 2. *Микрополное M-пространство Морита* [15] *паракомпактно.*

В частности:

Следствие 3. *Полустрого перистое M-пространство паракомпактно.*

Теорема 3. *Произведение нормального ssp-пространства на метризуемое нормально.*

Доказательство. Произведение пространства X на всякое метризуемое пространство Y нормально тогда и только тогда, когда X является нормальным P-пространством в смысле Морита [15].

Пусть $\{G(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) : \alpha_1, \ldots, \alpha_i \in \Omega,\ i = 1, 2, \ldots\}$ – такое семейство открытых в X множеств, что $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) \subseteq G(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1})$. Положим $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_i; k) =$

$= \{x \in X : \gamma_k x \subseteq G(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)\}$, где $\gamma_n = \omega_n \cap X$, и $\{\omega_n\}$ – полустрогое оперение X в βX. Положим, далее, $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_i; k) = [P(\alpha_1, \ldots, \alpha_i; k)]_X$. Тогда $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_i; k) \subseteq G(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$. Действительно, если $x \notin G(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, то при $x \in H \in \gamma_k$ выполняется $H \cap P(\alpha_1, \ldots, \alpha_i; k) = \emptyset$. Положим $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(\alpha_1, \ldots, \alpha_i; k)$. Тогда, очевидно, $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) \subseteq G(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$.

Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} G(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ для некоторой последовательности $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots\}$. Пусть $x \in X$. Множество $Kx = \bigcap_n [\gamma_n x]_X = \bigcap_n [\omega_n x]_{\beta X}$ бикомпактно, следовательно, найдется i такое, что $Kx \subseteq G(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$. Тогда найдется n такое, что $\gamma_n x \subseteq G(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$. Поэтому $x \in P(\alpha_1, \ldots, \alpha_i; n) \subseteq F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$. Таким образом, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$. Семейство $\{F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) : \alpha_1, \ldots, \alpha_i \in \Omega,\ i = 1, 2, \ldots)$ F_σ-множеств в нормальном пространстве X удовлетворяет условиям леммы 3.1 из [15]. Следовательно, X есть P-пространство.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Произведение совершенно нормального полустрого перистого пространства на метризуемое совершенно нормально.*

Учитывая результаты [15], [16], имеем

Следствие 2. *Произведение коллективно нормального ssp-пространства на метризуемое коллективно нормально и счетно паракомпактно, т. е., сильно нормально в смысле М. Катетова* [14].

Аналогичными средствами доказывается

Предложение 4. *Счетно микрополное нормальное пространство счетно паракомпактно.*

Пространство X называют *всецело нормальным* (entirely normal, см. [19]), если окрестности диагонали Δ в $X \times X$ образуют равномерность в смысле Вейля.

Теорема 4. *Всецело нормальное ssp-пространство паракомпактно.*

Пространство X *обладает свойством* $(*)$, если всякое открытое покрытие γ имеет открытое измельчение ω такое, что $\omega^* = \{\omega x : x \in X\}$ звездно вписано в $\gamma^* = \{\gamma x : x \in X\}$ [6].

Теорема 4 вытекает из следующей

Теорема 5. *ssp-пространство, обладающее свойством* $(*)$, *паракомпактно.*

Действительно, всецело нормальное пространство обладает свойством $(*)$, однако последнее много общее.

Мы докажем

Предложение 5. *Микрополное пространство, обладающее свойством* $(*)$, *паракомпактно.*

Доказательство. Пусть γ — открытое покрытие X, $\{\gamma_n\}$ — σ-измельчение γ. Так как X обладает свойством $(*)$, то каждое γ_n^* нормально, следовательно, γ_n^* имеет открытое локально конечное измельчение ω_n. Пусть $\omega_n' \subseteq \omega_n$ — совокупность всех элементов из ω_n, покрываемых конечным числом элементов γ. Положим $\omega = \bigcup\limits_n \omega_n'$. Тогда ω — σ-локально конечное покрытие X. Для $H \in \omega$ пусть $\{P_i(H) : i = 1, 2, \ldots\}$ — конечное покрытие H элементами γ. Положим $\theta_{nm} = \{H \cap P_m(H) : H \in \omega_n'\}$, $\theta = \bigcup\{\theta_{nm} : n, m = 1, 2, \ldots\}$.

Тогда θ — σ-локально конечное измельчение γ.

Предложение доказано.

Замечание. Анализ доказательства предложения 5 позволяет сделать следующее заключение. Скажем, что пространство X обладает свойством (MC), если к любому открытому покрытию γ пространства X можно подобрать последовательность $\{\gamma_n\}$ открытых покрытий X, обладающую свойством: для всякой точки $x \in X$ найдется $n = n(x)$ такое, что $\gamma_n x$ покрывается счетным числом элементов γ.

Предложение 6. *Если X обладает свойствами (MC) и $(*)$, то X паракомпактно.*

Полустрого перистые пространства наследственны по замкнутым множествам, но не открытым. Например, $TW(\omega_1)$ — пространство порядковых чисел, меньших первого несчетного ω_1 — открыто в бикомпакте $TW(\omega_1 + 1)$, но не является полустрого перистым (теорема 1).

В силу этого имеет смысл

Теорема 6. *В тотально нормальном ssp-пространстве всякое G_δ-множество полустрого перисто.*

Для доказательства теоремы 6 нам потребуются следующие результаты.

Предложение 7. *Если $X_n \subseteq Y$ полустрого перисты, то $X = \bigcap\limits_n X_n$ полустрого перисто.*

Предложение 8. *Если $X = \bigcup X_\alpha$ и $\{X_\alpha\}$ — точечно конечное семейство открытых ssp-подпространств, то X полустрого перисто.*

Доказательства несложны.

Теорема 7. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение ssp-пространства X. Тогда $X_0 = f^{-1}Y_0$ полустрого перисто для каждого полустрого перистого подпространства $Y_0 \subseteq Y$.*

Доказательство. Пусть $f^* : \beta X \to \beta Y$ — стоуновское продолжение f по непрерывности.

Пусть $\{\gamma_n\}$ — полустрогое оперение X в βX, $\{\pi_n\}$ — полустрогое оперение Y_0 в $[Y_0]_{\beta Y}$. Положим $\gamma'_n = \gamma_n \cap [X_0]_{\beta X}$, $\pi'_n = f^{-1}\pi_n \cap [X_0]_{\beta X}$. Элементы семейства $\{\gamma'_n, \pi'_n\}$ занумеруем в последовательность $\{\sigma_n\}$. Каждое σ_n открыто в $[X_0]_{\beta X}$, так как $[X_0]_{\beta X} \subseteq f^{-1}([Y_0]_{\beta Y})$. Пусть $x \in X_0$, $x' \notin X_0$. Если $x' \in X$, то $fx' = y' \in Y \setminus Y_0$ и найдется k такое, что $[\pi_k y]_{\beta Y} \not\ni y'$, где $y = fx$. Если $\pi'_k = \sigma_{n(k)}$, то $x' \notin [\sigma_{n(k)}x]_{\beta X}$. Пусть $x' \notin X$. Тогда найдется m такое, что $[\gamma_m x]_{\beta X} \not\ni x'$, и если $\gamma'_m = \sigma_{n(m)}$, то $x' \notin [\sigma_{n(m)}x]_{\beta X}$. Доказано, что $\{\sigma_n\}$ — полустрогое оперение X_0 в $[X_0]_{\beta X}$.

Теорема доказана.

Теорема 7 имеет важное значение, так как из нее можно вывести ряд полезных следствий.

Следствие 1. *Всякое конуль-множество в ssp-пространстве полустрого перисто.*

Следствие 2. *Всякое открытое F_σ-множество в нормальном ssp-пространстве полустрого перисто.*

Обозначим через $\mathscr{M}(X)$ совокупность всех $A \subseteq X$, для которых существует непрерывное отображение $f: X \to Y$ на метризуемое пространство Y такое, что $A = f^{-1}B$, $B \subseteq Y$.

Следствие 3. *Если X — ssp-пространство, то всякое $A \in \mathscr{M}(X)$ полустрого перисто.*

В совершенно нормальном пространстве семейство $\mathscr{M}(X)$ содержит все борелевские множества ($\mathscr{M}(X)$ содержит все замкнутые множества и замкнуто относительно дополнений и счетных пересечений: если $A = \bigcap A_n$, $A_n \in \mathscr{M}(X)$ и $A_n = f^{-1}B_n$, $B_n \subseteq Y_n$, то $A = f^{-1}B$, где $f = \Pi f_n : X \to \Pi Y_n$, $B = \Pi B_n \subseteq \Pi Y_n$). Из этого немедленно вытекает

Теорема 8. *Всякое борелевское множество в совершенно нормальном ssp-пространстве полустрого перисто.*

Доказательство теоремы 6. Пусть H открыто в X. Тогда $H = \bigcup H_\alpha$, где $\{H_\alpha\}$ — локально конечное (в H) семейство открытых в X F_σ-множеств. Каждое H_α полустрого перисто (Следствие 2 теоремы 7). Тогда H полустрого перисто по предложению 8. По предложению 7 всякое G_δ-множество в X полустрого перисто.

Теорема доказана.

Замечание. Пространство X называют *совершенным*, если всякое замкнутое множество в X имеет тип G_δ [12].

Если диагональ Δ в $X \times X$ имеет тип G_δ в $X \times X$, то говорят, что X — пространство с G_δ-диагональю.

Е. Г. Пыткеев доказал; что:

1) В совершенном p-пространстве всякое борелевское множество перисто.

2) Перистое пространство с G_δ-диагональю наследственно перисто.

2. ПРОБЛЕМЫ УПЛОТНЕНИЙ

Если строгое p-пространство уплотняется на пространство с измельчающейся последовательностью покрытий, то оно само обладает измельчением [3]. В связи с этим возникает вопрос: верно ли это для перистых пространств, или хотя бы для локально бикомпактных пространств? [3].

Получить положительный ответ здесь нельзя, так как в некоторых моделях теории множеств возможна следующая ситуация.

Теорема 9. *В предположении $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ существует пространство X, обладающее свойствами*:

1) *X локально бикомпактно,*

2) *X уплотняется на компакт (числовой отрезок),*

3) *квазиметризуемо,*

4) *X не совершенно, т. е., не обладает измельчением.*

Теорема требует пояснений.

Квазиметрикой (или *Δ-метрикой*) называют вещественную функцию $d(x, y) \geqq$ $\geqq 0$, удовлетворяющую условиям:

1) $d(x, y) = 0$ эквивалентно $x = y$,

2) $d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)$.

Пространство X называется *квазиметризуемым* (*Δ-метризуемым*), если его топологию можно задать квазиметрикой d по правилу: множество A открыто в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in A$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $S(x, \varepsilon) = \{y : d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq A$, [17], [20].

Свойство 3) пространства X интересно в силу следующего результата:

Предложение 9. *Полустрого перистое квазиметризуемое пространство обладает измельчением.*

Предложение 9 вытекает из общего результата, доказанного в [13].

Доказательство теоремы 9. Пусть $I = [0, 1]$ — числовой отрезок, $A \subset I$ — множество мощности $\aleph_1$. Для каждого несчетного множества $B \subseteq A$ выполняется: $|[B]_I \setminus A| = 2^{\aleph_0}$ — так как всякий компакт либо счетен, либо имеет мощность $2^{\aleph_0}$ [1]. Семейство всех несчетных подмножеств A имеет мощность $2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0}$. Следовательно, каждому такому подмножеству B можно поставить в соответствие точку $x(B)$ с выполнением условий:

а) $x(B) \in I \setminus A$,

b) $x(B) \neq x(B')$ при $B \neq B'$,

c) $x(B) \in [B]_I$.

Положим $E = \{x(B) : B \subseteq A,\ B$ несчетно$\}$. Введем на I следующую топологию.

Для каждой точки $x(B)$ выберем последовательность $x_n(B)$ такую, чтобы выполнялись условия:

d) $x(B) = \lim x_n(B)$,

e) $x_n(B) \in B$.

Все точки множества $I \setminus E$ считаются изолированными. Стандартной окрестностью точки $x(B)$ будет множество $V_n(x(B)) = \{x(B)\} \cup \bigcup\{x_i(B) : i \geqq n\}$. Полученное пространство X обладает свойствами 1) и 2), что очевидно. Если $x \notin E$, то положим $V_n(x) = \{x\}$. Тогда семейство окрестностей $\{V_n(x) : x \in X\}$ удовлетворяет условию: если $y \in V_n(x)$, то $V_n(y) \subseteq V_n(x)$. Тогда X квазиметризуемо по теореме Рибейро [18].

Докажем, что X не совершенно. Пусть $\{G_n\}$ – произвольная убывающая последовательность окрестностей множества E, которое замкнуто в X. Тогда $A \setminus G_n$ счетно для каждого n – по определению топологии в X. Тогда $A \setminus \bigcap_n G_n$ счетно, следовательно, $\bigcap_n G_n \setminus E \neq \emptyset$ и E не является G_δ-множеством. Теорема доказана.

Итак, в общей постановке задача не решается положительно. Рассмотрим частные случаи.

Легко устанавливается

Предложение 10. *Если локально бикомпактное пространство локально связно и уплотняется на пространство с измельчающейся последовательностью, то оно само обладает измельчающейся последовательностью.*

Пространство X называется *π-бикомпактным*, если оно обладает базисом открытых множеств $\pi = \{U\}$ таким, что граница Гр U бикомпактна для каждого $U \in \pi$.

Предложение 11. *Если локально связное π-бикомпактное пространство уплотняется на пространство с измельчением, то оно само обладает измельчением.*

Доказательство Предложения 11 особых трудностей не содержит.

Пространство X называется *металинделефовым*, если во всякое открытое покрытие X можно вписать открытое точечно счетное [11].

Теорема 10. *Если локально псевдокомпактное металинделефово пространство X уплотняется на пространство с измельчающейся последовательностью покрытий, то X метризуемо.*

Прежде чем доказывать эту теорему, выясним некоторые моменты.

Пространство X будем называть *локально псевдокомпактным,* если каждая точка $x \in X$ имеет псевдокомпактную окрестность Ox.

Следующее предложение доказано в [5]:

Предложение 12. *Перистое псевдокомпактное пространство полно по Чеху.*

Из предложений 12 и 2 выытекает

Предложение 13. *Для того чтобы псевдокомпактное пространство было полустрого перистым, необходимо и достаточно, чтобы оно было перистым и микрополным.*

Существенно для нас

Предложение 14. *Уплотнение псевдокомпакного пространства на пространство с первой аксиомой счетности является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ — данное уплотнение. Докажем, что f замкнуто. Пусть множество F замкнуто в X, $y \notin fF$, $\{O_n y\}$ — убывающая фундаментальная система окрестностей точки y в Y. Тогда $\bigcap\limits_n f^{-1} O_n y = f^{-1} y = x \notin F$. У точки x найдется окрестность Ox такая, что $[Ox] \cap F = \emptyset$. Положим $S_n = f^{-1}(O_n y) \setminus [Ox]_X$. Множества S_n открыты в X а система $\{S_n : n = 1, 2, \ldots\}$ локально конечна: для свякой точки $z \neq x$ найдутся окрестности $O_n y$ и $O(fz)$ такие, что $O_n y \cap O(fz) = \emptyset$. Тогда семейство $\{S_n\}$ содержит только конечное число не пустых множеств (в силу псевдокомпактности X, см., например, [10]). Следовательно, $y \notin [fF]_Y$ и f замкнуто. Предложение доказано.

Следствие. *Псевдокомпактное множество в пространстве с первой аксиомой счетности замкнуто.*

Пространство X называется *бэровским*, если всякое открытое множество в X имеет вторую категорию.

Всякое полоное по Чеху пространство — бэровское. Следовательно, псевдокомпактное p-пространство — бэровское.

Положим $\gamma^0 = \{\langle P \rangle : P \in \gamma\}$, где γ — некоторое семейство множеств.

Предложение 15. *Пусть γ — замкнутое σ-дискретное покрытие бэровского пространства X. Тогда $\tilde{\gamma}^0$ плотно в X.*

Предложение доказано в [4].

Предложение 16. *Псевдокомпактное пространство X с измельчающей последовательностью покрытий сепарабельно.*

Доказательство. Пространство X обладает замкнутой σ-дискретной сетью $\gamma = \bigcup \gamma_n$ (см., например, [3]). Так как γ_n^0 дискретно, то оно содержит лишь конечное число не пустых множеств, тогда γ^0 содержит счетное число не пустых элементов. В каждом не пустом $\langle P \rangle \in \gamma^0$ выберем одну точку $x(P)$. Пусть S — совокупность выбранных точек. Докажем, что S плотно в X.

Пусть H открыто в X. Положим $\omega = \{P \in \gamma : P \subseteq H\}$. Тогда ω — сеть в H. Так как X — бэровское, то H — тоже. Тогда $\tilde{\omega}^0$ плотно в H (предложение 15). Ясно, что $H \cap S \neq \emptyset$.

Предложение доказано.

Доказательство теоремы 10. Пусть $f : X \to Y$ — уплотнение, $x \in X$. Имеется псевдокомпактная окрестность Ox точки x. Множество Ox замкнуто в X — так как $f(Ox)$ замкнуто в Y (следствие предложения 14). Тогда Ox металинделефово, отображение f гомеоморфно на Ox (предложение 14), обладает измельчением, потому сепарабельно (предложение 16). Отсюда следует, что Ox обладает счетной базой.

Пусть $\gamma = \{U\}$ — открытое точечно счетное покрытие X такое, что любое $U \in \gamma$ обладает счетной базой. Тогда γ звездно счетно, и по теореме Смирнова [7] X распадается в дискретную сумму пространств со счетной базой.

Теорема доказана.

Аналогичными средствами можно доказать:

Теорема 11. *Если локально псевдокомпактное σ-паракомпактное пространство уплотняется на пространство с измельчением, то X обладает измельчением.*

Литература

[1] *Александров П. С.* и *Урысон П. С.*, Мемуар о компактных топологических пространствах, „Наука", М. 1971.

[2] *Архангельский А. В.*, Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства, Докл. АН СССР, *151*, 1963, 751—754.

[3] *Архангельский А. В.*, Отображения и пространства, Успехи матем. наук, *21*, 1966, 133—184.

[4] *Величко Н. В.*, О мощности открытых покрытий топологических пространств, Fund. Math., *80*, 1973, 271—282.

[5] *Величко Н. В.*, О перистых пространствах и их непрерывных отображениях, Матем. сб., *90*, 1973, 34—47.

[6] *Клюшин В. Л.*, О пространствах с правильно дробящимися покрытиями, Докл. АН СССР, *204*, 1972, 782—783.

[7] *Смирнов Ю. М.*, О сильно паракомпактных пространствах, Изв. АН СССР, *20*, 1956, 253—274.

[8] *Чобан М. М.*, О σ-паракомпактных пространствах, Вестник МГУ, сер. матем., *1*, 1969, 20—27.

[9] *Bacon P.:* The compactness of countably compact spaces, Pacif. J. Math., *32*, 1970, 587—592.

[10] *Bayley B., Connel E., McNight:* On property characterizing pseudocompact space, Proc. Amer. Math. Soc., *9*, 1958, 500—502.

[11] *Borges C.:* On metrizability of topological spaces, Canad. J. Math., *20*, 1968, 795—804.

[12] *Heath R., Michael E.:* A property of Sorgenfrey line, Compositio Math., *23*, 1971, 185—188.

[13] *Hodel R.:* Moore spaces and $\omega\Delta$-spaces, Pacif. J. Math., *38*, 1971, 641—652.
[14] *Katětov M.:* On extensions of locally finite coverings, Colloq. Math., *6*, 1958, 145—151.
[15] *Morita K.:* Products of normal spaces with metric spaces, Math. Ann., *154*, 1964, 365—382.
[16] *Nagami K.:* σ-spaces and product spaces, Math. Ann., *181*, 1969, 109—118.
[17] *Niemytzki V. V.:* On the third axiom of metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc., *29*, 1927, 507—513.
[18] *Ribeiro H.:* Sur les espaces a metrique faible, Portugal Math., *4*, 1943, 21—40.
[19] *Tamano H.:* Some properties of compactification, J. Math. Soc. Japan, *12*, 1960, 104—117.
[20] *Wilson W.:* On quasi-metric spaces, Amer. J. Math., *53*, 1931, 675—684.

Адресс автора: Тюменский государственный университет, Тюмень, СССР.