

Dietmar Kahnert

Addition linearer Cantormengen

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 24 (1974), No. 4, 563–572

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101275>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1974

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ADDITION LINEARER CANTORMENGEN

DIETMAR KAHNERT, Stuttgart

(Eingegangen am 14. August 1973)

Ist  $C$  eine Cantormenge,  $C^*$  die von  $C$  erzeugte additive Untergruppe der reellen Zahlen  $\mathbf{R}$  und  $L$  das Lebesgue-Maß, so wird untersucht, welche Bedingungen an  $C$  gestellt werden müssen, damit  $L(C^*) = 0$  oder  $L(C^*) > 0$  ist. Ferner wird gezeigt, daß es zu jeder Cantormenge  $C$  eine Cantormenge  $B$  mit  $L(B) = 0$  gibt, so daß  $B + C = \{b + c : b \in B, c \in C\}$  ein Intervall enthält.

**1. Cantormengen.** Wir nennen eine Teilmenge  $C$  der reellen Zahlen eine Cantormenge, wenn sie eine Darstellung der Form  $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C(k)$  besitzt, wobei folgende Bedingungen (1)–(4) gelten müssen.

- (1)  $C(0)$  ist ein abgeschlossenes Intervall. Für  $k \in \mathbf{N}$  besteht  $C(k)$  aus  $N_k = n_1 n_2 \dots n_k$  ( $n_k \geq 2$ ) disjunkten abgeschlossenen Intervallen, genannt Intervalle  $k$ -ter Stufe, die alle die gleiche Länge  $l_k$  besitzen.
- (2) Jedes Intervall  $k$ -ter Stufe enthält genau  $n_{k+1}$  Intervalle  $(k + 1)$ -ter Stufe.
- (3) Benachbarte Intervalle  $(k + 1)$ -ter Stufe, die in demselben Intervall  $k$ -ter Stufe liegen, haben denselben Abstand  $a_{k+1}$ .
- (4) Die Randpunkte aller Intervalle von  $C(k)$  gehören zu  $C$ .

Jede derartige Cantormenge ist „ensemble parfait de translation“ im Sinne von KAHANE-SALEM [3]. Die Umkehrung gilt nicht. Im Falle  $n_k = 2$ ,  $l_k = 1/3^k$  und  $a_k = l_k$  erhält man die klassische Cantormenge.

**2. Körper vom Lebesgue-Maß Null.** Setzt man  $\xi_k = l_k/l_{k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), so wird von Kahane-Salem (s. [3], S. 103 und auch [1], S. 90) die Implikation

$$(5) \quad n_k = 2, \quad \xi_k \rightarrow 0 \Rightarrow L(C^*) = 0$$

bewiesen. Wir zeigen mit Satz 1, daß unter diesen Voraussetzungen sogar der von  $C$  erzeugte Unterkörper  $C^K$  der reellen Zahlen Lebesgue-Maß Null besitzt. Der beim Beweis auftretende Begriff „metrische Dimension“ (in Zeichen:  $\dim_m$ ) stammt von WEGMANN [8]. Ist  $C$  eine Cantormenge, so gilt

$$\dim_m C = \limsup_{q \rightarrow 0} \frac{\log N_q(C)}{-\log q} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_k}{-\log(l_k + a_k)}$$

([4], die dort erwähnte Bedingung  $a_k \geq l_k$  ist unnötig), wobei für  $q > 0$

$$N_q(C) = \min \left\{ m : \text{es existieren } C_i \text{ mit } \bigcup_{i=1}^m C_i = C \text{ und } |C_i| \leq q \right\}$$

ist.

**Hilfssatz 1.** *Ist die Folge  $(n_k)$  beschränkt und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$ , so folgt  $\dim_m C = 0$ .*

Beweis. Für  $k = 1, 2, \dots$  erhält man

$$a_k = (l_{k-1} - n_k l_k) / (n_k - 1) = (l_0 \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} (1 - n_k \xi_k)) / (n_k - 1)$$

und

$$l_k + a_k = (l_0 \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} (1 - \xi_k)) / (n_k - 1) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ist  $M$  eine obere Schranke für die Folge  $(n_k)$  und  $N_0$  so gewählt, daß bei gegebener Zahl  $n$  für alle  $m > N_0$  stets  $\xi_m < 1/n$  ist, dann gilt

$$\begin{aligned} \dim_m C &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_k}{-\log((l_0 \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} (1 - \xi_k)) / (n_k - 1))} \leq \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log M}{-\log l_0 \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1}} \leq \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log M}{(k - N_0) \log n} = \frac{\log M}{\log n}. \end{aligned}$$

Damit ist  $\dim_m C = 0$ .

Bemerkungen. Setzt man die Folge  $(n_k)$  nicht als beschränkt voraus, so gilt die Folgerung in Hilfssatz 1 nicht. Umgekehrt folgt, selbst wenn  $(n_k)$  beschränkt ist, aus  $\dim_m C = 0$  nicht notwendig  $\xi_k \rightarrow 0$ . Man konstruiert nämlich leicht eine Cantormenge  $C$  mit  $n_k = 2$ ,  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \frac{1}{2}$  und  $\dim_m C = 0$ . Sei etwa  $l_0 = 1$  und

$$l_{k+1} = \begin{cases} (\frac{1}{2} - 1/(k+3)) l_k & \text{für } k = 0, 2, 4, \dots \\ l_k / (k+1)^{k+1} & \text{für } k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Dann ist

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \frac{1}{2}$$

und

$$l_k \leq (k-2)^{2-k} \quad (k \geq 3).$$

Es folgt

$$\dim_m C \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^{k+1}}{-\log l_k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1) \log 2}{(k-2) \log(k-2)} = 0.$$

Ist lediglich  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$ , so kann, selbst bei beschränkter Folge  $(n_k)$ , nichts über  $\dim_m C$  geschlossen werden. Man findet z. B. leicht eine Cantormenge  $C$  mit dieser Eigenschaft derart, daß stets  $n_k = 2$  und  $\dim_m C = 1$  ist.

Das folgende Ergebnis wird bereits in 2.4 von [4] erwähnt, der Beweis jedoch dort nicht ausgeführt.

**Hilfssatz 2.** *Ist  $X$  eine Teilmenge der reellen Zahlen und  $\dim_m X = 0$ , so ist auch  $\dim_m X^K = 0$ .*

Beweis. Sei

$$Z - Y = \{z - y : z \in Z, y \in Y\}, \quad \frac{Z}{Y} = \left\{ \frac{z}{y} : z \in Z, y \in Y \setminus \{0\} \right\} \quad (Z, Y \subset \mathbf{R}),$$

$$X_1 = X \cup (X - X) \cup \frac{X}{X}$$

und

$$X_n = X_{n-1} \cup (X_{n-1} - X_{n-1}) \cup \frac{X_{n-1}}{X_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Dann ist

$$X^K = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Wegen

$$\dim_m \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \sup \{ \dim_m X_n : n = 1, 2, \dots \}$$

[8] genügt es zu zeigen, daß  $\dim_m X_n = 0$  für alle  $n$  ist. Wie in [4] bewiesen wird, gilt für Teilmengen  $A$  und  $B$  der reellen Zahlen stets

$$\dim_m (A - B) \leq \dim_m A \times B$$

und

$$\dim_m \frac{A}{B} \leq \dim_m A \times B.$$

Ferner gilt

$$\dim_m A \times B \leq \dim_m A + \dim_m B$$

[8]. Damit erhält man  $\dim_m X_1 = 0$ . Induktiv folgt  $\dim_m X_n = 0$  für alle  $n$ .

Ist  $X \subset \mathbf{R}$  und  $\alpha > 0$ , so bezeichne  $L_\alpha(X)$  das  $\alpha$ -dimensionale Hausdorff-Maß und  $\dim X = \sup \{ \alpha > 0 : L_\alpha(X) > 0 \}$  ( $\sup \emptyset = 0$ ) die Hausdorff-Dimension von  $X$ . Ist  $\dim_m X = 0$ , dann gilt, wegen  $\dim_m X \geq \dim X$  [8],  $L_\alpha(X) = 0$  für alle  $\alpha > 0$ . Speziell folgt aus  $\dim_m X = 0$  also  $L(X) = L_1(X) = 0$ . Die Hilfssätze 1 und 2 ergeben damit folgendes Resultat.

**Satz 1.** *Ist die Folge  $(n_k)$  beschränkt und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$ , dann ist  $L(C^k) = 0$ .*

Bemerkung. Ein von einer perfekten Menge erzeugter Unterkörper der reellen Zahlen wurde erstmals von SOUSLIN [6] konstruiert.

**3. Gruppen, die von Cantormengen erzeugt werden.** Ist die Folge  $(n_k)$  beschränkt, so sind die Aussagen  $\xi_k \rightarrow 0$  und  $l_k/a_k \rightarrow 0$  gleichwertig. Der folgende Satz verallgemeinert also (5).

**Satz 2.** *Ist  $C$  eine Cantormenge, dann gilt*

(a) 
$$\liminf_{k \rightarrow \infty} l_k/a_k > 0 \Rightarrow C^* = \mathbf{R},$$

(b) 
$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_k/a_k = 0 \Rightarrow L(C^*) = 0.$$

Zum Beweis verwenden wir den folgenden Hilfssatz. Dabei sei

$$C_n = C + C + \dots + C$$

und

$$C_n(k) = C(k) + C(k) + \dots + C(k) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

(jeweils  $n$  Summanden).

**Hilfssatz 3.** *Ist  $C$  eine Cantormenge und gilt  $2n \cdot l_k < a_k$  für alle  $k$ , dann ist auch  $C_n$  eine Cantormenge. Die Mengen  $k$ -ter Stufe  $C_n(k)$  von  $C_n$  bestehen aus*

$$N_{k,n} = \prod_{i=1}^k (n(n_i - 1) + 1).$$

Intervallen der Länge  $l_{k,n} = n \cdot l_k$ , die den minimalen Abstand  $a_{k,n} = a_k - (n - 1) \cdot l_k$  besitzen.

Beweis von Satz 2. Es genügt in beiden Beweisteilen eine Cantormenge  $C$  zu betrachten, die in  $[0, 1]$  enthalten ist und die Elemente 0 und 1 als Randpunkte

besitzt. Denn sei  $a = \min C$  und  $b = \max C$ , so ist  $A = (1/(b-a)) \cdot (C - \{a\})$  eine Cantormenge mit den Randpunkten 0 und 1. Es gilt dann

$$A^* \subset \frac{1}{b-a} \cdot C^* + \left\{ \frac{a}{b-a} \right\}^* \quad \text{und} \quad C^* \subset (b-a) \cdot A^* + \{a\}^* .$$

Also ist die Aussage  $L(A^*) = 0$  äquivalent mit  $L(C^*) = 0$ . Ferner ist  $C^*$  eine  $L$ -meßbare Menge. Nach einem Satz von STEINHAUS [7] enthält damit  $C^* - C^* = C^*$  im Falle  $L(C^*) > 0$  ein Intervall. Damit ist entweder  $C^* = \mathbf{R}$  oder aber  $L(C^*) = 0$ .

Beweis von (a). Sei  $n$  eine natürliche Zahl und  $1/n < l_k/a_k$  für alle  $k$  von einem Index  $m$  an. Man sieht leicht, daß für alle  $k \geq m$  die Summenmenge  $C_n(k)$  das Intervall  $m$ -ter Stufe  $[0, l_m]$  enthält. Damit gilt

$$C_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_n(k) \supset [0, l_m] .$$

Also ist  $C^* = \mathbf{R}$ .

Beweis von (b). Die Doppelfolge  $(C_{n,k})$  sei definiert durch

$$C_{1,k} = C(k) \quad \text{und} \quad C_{n+1,k} = C_{n,k} + (-1)^n \cdot C(k) \quad (k = 1, 2, \dots) .$$

Setzt man

$$C_{n,\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_{n,k} ,$$

dann ist

$$C_{n,\infty} = C - C + C - \dots + (-1)^{n-1} C \quad (n \text{ Summanden}) ,$$

also

$$C^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,\infty} .$$

Es genügt also  $L(C_{n,\infty}) = 0$  für alle  $n$  zu beweisen. Wegen

$$-C(k) = C(k) - 1 ,$$

folgt leicht

$$L(C_{n,\infty}) = 0 \Leftrightarrow L(C_n) = 0 .$$

Sei nun  $n$  fest gewählt. Es gibt ein  $m$ , so daß  $4nl_k < a_k$  für alle  $k \geq m$  ist. O.B.d.A. setzen wir  $m = 1$ . Denn ist  $I$  ein Intervall  $m$ -ter Stufe von  $C$ , so sind die Aussagen  $L(C^*) = 0$  und  $L((C \cap I)^*) = 0$  äquivalent. Damit ist

$$\begin{aligned} n_k l_k &= l_{k-1} - (n_k - 1) a_k \leq l_{k-1} - (n_k - 1) 4n l_k , \\ n_k l_k (1 + 4n) &\leq l_{k-1} + 4n l_k \leq 2l_{k-1} , \end{aligned}$$

also

$$n_k l_k \leq 2l_{k-1}/(1 + 4n) \leq l_{k-1}/2n$$

und folglich

$$N_k l_k \leq (2n)^{-k} l_0 .$$

Unter Verwendung von Hilfssatz 3 erhält man

$$L(C_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} N_{k,n} l_k \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} n^{k+1} N_k l_k \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} n l_0 2^{-k} = 0 .$$

Beweis von Hilfssatz 3. Sei  $n$  fest. Wir führen den Beweis durch Induktion nach  $k$ . Es bezeichne  $I_j$  das Intervall  $j$ -ter Stufe von  $C(j)$  mit  $0 \in I_j$  und  $q_j = l_j + a_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ).

Sei  $k = 1$ . Dann ist

$$C(1) = \bigcap_{i=0}^{n_1-1} (i q_1 + I_1)$$

und

$$\begin{aligned} C_n(1) &= \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i_1(j)=0}^{n_1-1} ((i_1(1) + i_1(2) + \dots + i_1(n)) q_1 + n I_1) = \\ &= n I_1 \cup (q_1 + n I_1) \cup (2q_1 + n I_1) \cup \dots \cup (n(n_1 - 1) q_1 + n I_1) . \end{aligned}$$

Die Menge  $C_n(1)$  besteht also aus  $n(n_1 - 1) + 1$  disjunkten Intervallen der Länge  $n l_1$ . Die linken Randpunkte dieser Intervalle sind von der Form

$$(i_1(1) + i_1(2) + \dots + i_1(n)) q_1 .$$

Benachbarte Intervalle besitzen den Abstand

$$a_{1,n} = q_1 - n l_1 = a_1 - (n - 1) l_1 .$$

Wir nehmen nun an, daß  $C_n(j)$  für  $j = 1, 2, \dots, k$  Mengen  $j$ -ter Stufe einer geeigneten Cantormenge sind, die durch Zahlen  $N_{j,n}$ ,  $l_{j,n}$  und  $a_{j,n}$ , wie sie im Hilfssatz angegeben werden, charakterisiert werden. Die Induktionsannahme enthalte ferner, daß die linken Randpunkte der Intervalle von

$$C_n(k) = \bigcup_{m=1}^n \bigcup_{l=1}^k \bigcup_{i_l(m)=0}^{n_l-1} ((i_1(1) + \dots + i_1(n)) q_1 + \dots + (i_k(1) + \dots + i_k(n)) q_k + n I_k)$$

gerade von der Form

$$(i_1(1) + \dots + i_1(n)) q_1 + \dots + (i_k(1) + \dots + i_k(n)) q_k$$

sind.

Es ist

$$C_n(k+1) = \bigcup_{m=1}^n \bigcup_{l=1}^{k+1} \bigcup_{i_l(m)=0}^{n_l-1} ((i_1(1) + \dots + i_1(n)) q_1 + \dots + (i_k(1) + \dots + i_k(n)) q_k + (i_{k+1}(1) + \dots + i_{k+1}(n)) q_{k+1} + nI_{k+1}).$$

Die Menge

$$\{(i_{k+1}(1) + \dots + i_{k+1}(n)) q_{k+1} : i_{k+1}(m) = 1, 2, \dots, n_{k+1}; m = 1, 2, \dots, n\}$$

besteht aus  $n(n_{k+1} - 1) + 1$  äquidistanten Elementen (Abstand:  $q_{k+1}$ ). Insgesamt erhält man:

$$C_n(k+1) \subset C_n(k);$$

jedes Intervall von  $C_n(k)$  enthält genau  $n(n_{k+1} - 1) + 1$  Intervalle von  $C_n(k+1)$ , wobei benachbarte Intervalle den Abstand  $a_{k+1,n} = q_{k+1} - nl_{k+1} = a_{k+1} - (n-1)l_{k+1}$  besitzen.

**Bemerkung.** Nach Satz 2(a) folgt  $\liminf_{k \rightarrow \infty} l_k/a_k = 0$  aus  $L(C^*) = 0$ . Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie DÜRR in einer noch unveröffentlichten Arbeit zeigt. Folgende Frage, ob Satz 2(b) verschärft werden kann, ist vermutlich positiv zu beantworten.

**Frage.** Folgt  $L(C^K) = 0$  aus  $l_k/a_k \rightarrow 0$ ?

**4. Gruppen mit vorgegebener Dimension.** Ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} l_k/a_k = 0$  und  $n$  eine natürliche Zahl, so liefert Hilfssatz 3 näherungsweise für große  $k$  die Anzahl der Intervalle von  $C_n$ . Damit sind Dimensionsberechnungen von  $C_n$  und  $C$  möglich. Beispielsweise lassen sich auf diese Weise leicht perfekt erzeugte Gruppen mit vorgegebener Hausdorff-Dimension angeben. Zu beliebige  $\alpha \in (0, 1)$  haben erstmals ERDÖS und VOLKMANN [2] reelle additive Gruppen  $G_\alpha$  mit  $\dim G_\alpha = \alpha$  konstruiert.

**Satz 3.** Sei  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/n_k = \lim_{k \rightarrow \infty} k/\log N_k = 0$ ,  $0 < \liminf_{k \rightarrow \infty} N_k l_k^\alpha$  und  $\limsup_{k \rightarrow \infty} N_k l_k^\alpha < \infty$ . Dann gilt

$$(c) \quad \dim C = \dim C^* = \alpha,$$

$$(d) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\log n_k)/\log N_{k-1} = 0 \Rightarrow \dim_m C^* = \alpha.$$

**Beweis von (c).** Es gibt eine natürliche Zahl  $s$ , so daß für alle  $k \geq s$  die Abschätzungen

$$1/s < N_k l_k^\alpha < s$$



bestehen. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{l_{k+1}} &= \frac{l_k - n_{k+1}l_{k+1}}{(n_{k+1} - 1)l_{k+1}} \leq \frac{(s/N_k)^{1/x}}{(n_{k+1} - 1)(1/sN_{k+1})^{1/x}} - \frac{n_{k+1}}{n_{k+1} - 1} = \\ &= \frac{n_{k+1}^{1/x}}{n_{k+1} - 1} s^{2/x} - \frac{n_{k+1}}{n_{k+1} - 1} \end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_k/a_k = 0.$$

Sei  $n$  fest gewählt. O.B.d.A. kann man  $2nl_k < a_k$  für alle  $k$  voraussetzen. Damit ist  $C_n$  nach Hilfssatz 3 eine Cantormenge, und es gilt nach einem Satz von EGGLESTON (s. [4], Hilfssatz 5)

$$\dim C_n = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{k,n}}{-\log nl_k}$$

und

$$\dim C = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_k}{-\log l_k} = \alpha.$$

Wegen  $N_{k,n} \leq n^k N_k$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} (k/\log N_k) = 0$  ist

$$\dim C_n \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha \cdot \frac{\log n^k N_k}{\log N_k} = \alpha.$$

Aus

$$\alpha = \dim C \leq \dim C_{n,\infty}, \quad \dim C_{n,\infty} = \dim C_n$$

und

$$\dim C^* = \sup \{ \dim C_{n,\infty} : n = 1, 2, \dots \}$$

folgt

$$\dim C^* = \alpha.$$

Beweis von (d). Wegen  $\dim_m C^* \geq \dim C^*$  ist nach (c) nur noch  $\dim_m C^* \leq \alpha$  zu zeigen. Es gilt

$$\dim_m C_{n,\infty} = \dim_m C_n = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{k,n}}{-\log (l_{k,n} + a_{k,n})}$$

und

$$\begin{aligned} l_{k,n} + a_{k,n} &= l_k + a_k = l_{k-1} - (n_k - 1)l_k \leq (s/N_{k-1})^{1/x} - (n_k - 1)(1/sN_k)^{1/x} = \\ &= N_{k-1}^{-1/x} (s^{1/x} - (n_k - 1)(sn_k)^{-1/x}). \end{aligned}$$

Es gibt ein  $m \in \mathbf{N}$ , so daß für alle  $k \geq m$

$$l_{k,n} + a_{k,n} \leq mN_{k-1}^{-1/\alpha}$$

ist. Also folgt

$$\begin{aligned} \dim_m C_{n,\infty} &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha \frac{\log n^k N_k}{\log N_{k-1}} \leq \\ &\leq \alpha \left( \limsup_{k \rightarrow \infty} k \frac{\log n}{\log N_{k-1}} + \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{\log N_{k-1}} + 1 \right) = \alpha \end{aligned}$$

und

$$\dim_m C^* = \sup \{ \dim_m C_{n,\infty} : n = 1, 2, \dots \} \leq \alpha.$$

**Folgerung.** Setzt man in Satz 3 speziell  $n_k = k + 1$ , so ergibt sich

$$\dim C = \dim C^* = \dim_m C^* = \alpha.$$

**5. Addition zweier Cantormengen.** Ist  $C$  die klassische Cantormenge, so gilt

$$C + C = \bigcap_{k=1}^{\infty} (C(k) + C(k)) = [0, 2].$$

Das kann bekanntlich wie folgt bewiesen werden. Sei  $s \in [0, 2]$ . Dann trifft die Gerade  $y = s - x$  mindestens eines der vier Teilquadrate von  $C(1) \times C(1)$ . Wird dieses  $Q_1$  genannt, so folgt, daß die Gerade ein Teilquadrat  $Q_2$  von  $(C(2) \times C(2)) \cap Q_1$  trifft, usw. Setzt man  $(x, y) = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$ , so folgt  $x + y = s$  und damit die Behauptung. Dieses Beweisschema wird bei dem folgenden Satz angewandt.

**Satz 4.** Zu jeder Cantormenge  $C$  gibt es eine Cantormenge  $B$  mit  $L(B) = 0$  und  $B + C \supset [0, 1]$ .

Beweis. O.B.d.A. ist  $C$  eine Teilmenge von  $[0, 1]$  und  $0, 1 \in C$ . Jedes Intervall  $k$ -ter Stufe von  $C$  besitze die Länge  $l_k$ . Wir wählen eine Teilfolge  $(m_k)$  der natürlichen Zahlen, so daß

$$(6) \quad 10l_{m_{k+1}} < l_{m_k} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad \text{und} \quad 10l_{m_1} < 1$$

ist. Die Menge  $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B(k)$  soll durch die Folgen  $(N_k = n_1 n_2 \dots n_k)$ ,  $(d_k)$  and  $(a_k)$  charakterisiert werden. Es soll wieder  $B \subset [0, 1]$  und  $0, 1 \in B$  sein. Die Menge  $B(k)$  bestehe also aus  $N_k$  Intervallen der Länge  $d_k = l_{m_k}$ . Es sei  $n_k$  die kleinste natürliche Zahl, für die

$$(7) \quad d_{k-1} \leq 2n_k d_k - d_k$$

ist. Dann gilt

$$2(n_k - 1) d_k - d_k < d_{k-1}.$$

Sei  $a_k$  definiert durch

$$n_k d_k + (n_k - 1) a_k = d_{k-1}.$$

Dann ist  $a_k \leq d_k$ . Außerdem gilt

$$a_k > \frac{2(n_k - 1) d_k - d_k - n_k d_k}{n_k - 1} = \frac{d_k(n_k - 3)}{n_k - 1}.$$

Nach (6) und (7) ist  $n_k > 5$  und folglich  $a_k > d_k/2$ . Daraus ergibt sich leicht  $L(B) = 0$ . Ferner ist

$$B + C = \bigcap_{k=1}^{\infty} (B(k) + C(m_k)).$$

Sei  $s \in [0, 1]$ . Da  $d_1 = l_{m_1}$  und  $a_1 \leq d_1$  ist, ergibt sich, daß die Gerade  $y = s - x$  mindestens ein Quadrat  $Q_1$  von  $B(1) \times C(m_1)$  trifft, usw. Nach dem oben skizzierten Beweisschema erhält man  $s \in B + C$ .

**Korollar.** Zu jeder  $L$ -meßbaren Menge  $X$  mit  $L(X) > 0$  gibt es eine Cantormenge  $C$  mit  $L(C) = 0$  und  $X + C \supset [0, 1]$ .

Das folgt aus Satz 4 und einem Eergebnis von SODNOMOV [5], der zeigte, daß jede derartige Menge  $X$  eine Cantormenge ( $n_k = 3$  für alle  $k$ ) enthält. Folgende Verschärfung des Korollars ist zu vermuten:

Zu jeder  $L$ -meßbaren Menge  $X$  mit  $L(X) > 0$  und zu jeder Hausdorff-Funktion  $h$  gibt es eine Cantormenge  $C$  mit  $L_h(C) = 0$  und  $X + C \supset [0, 1]$ .

#### Literatur

- [1] *J. Benedetto*: Harmonic analysis on totally disconnected sets. Lecture Notes in Mathematics, Band 202. Berlin - Heidelberg - New York. Springer Verlag 1971.
- [2] *P. Erdős, B. Volkmann*: Additive Gruppen mit vorgegebener Hausdorffscher Dimension. Journ. reine angew. Math. 221 (1966), 203–208.
- [3] *J. P. Kahane, R. Salem*: Ensembles parfaits et séries trigonometriques. Paris. Hermann 1963.
- [4] *D. Kahnert*: Hausdorff-Maße von Summenmengen. Journ. reine angew. Math. 264 (1973), 1–28, 266 (1974), 1–9.
- [5] *B. Sodnomov*: On a property of sets of positive measure. Fund. Math. 60 (1967), 187–190.
- [6] *M. Souslin*: Sur un corps non dénombrable de nombres réels. Fund. Math. 4 (1922), 311–315.
- [7] *H. Steinhaus*: Sur les distances des points des ensembles de mesure positive. Fund. Math. 1 (1920), 93–104.
- [8] *H. Wegmann*: Die Hausdorff-Dimension von kartesischen Produkten metrischer Räume. Journ. reine angew. Math. 246 (1971), 46–75.

*Anschrift des Verfassers*: Universität Stuttgart, 7000 Stuttgart 1, Herdweg 21, BRD.