Thérèse Merlier
Nildemi-groupes totalement ordonnés

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 24 (1974), No. 3, 403–410

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101254`

Czechoslovak Mathematical Journal, 24 (99) 1974, Praha

NILDEMI-GROUPES TOTALEMENT ORDONNÉS

THÉRÈSE MERLIER, Paris

(Reçu le 30. Janvier 1973)

La terminologie utilisée est celle de A. H. CLIFFORD et G. P. PRESTON [1] et de L. FUCHS [2].

Un nildemi-groupe S est un demi-groupe ayant un zéro, noté 0, et dont tout élément est nilpotent: $\forall x \in S$, $\exists n \in \mathbf{N}^*$; $x^n = 0$.

($\mathbf{N}^*$ désigne les entiers naturels positifs.) Dans un nildemi-groupe, nous appellerons index de l'élément x, le plus petit entier n tel que $x^n = 0$ et nous noterons $i(x) = n$.

Nous nous proposons de déterminer les nildemi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés, c'est-à-dire sur lesquels on peut définir une relation d'ordre total isotone:

$$a \leqq b\,,\quad c \leqq d \Rightarrow ac \leqq bd \quad \text{pour tout} \quad a, b, c, d\,.$$

Ceci répond au problème posé par E. JA. GABOVIČ dans [3], problème 13.

Si S_2 est l'ensemble des éléments d'index 2 d'un nildemi-groupe S totalement ordonné, $S_2 \cup \{0\}$ est un zéro-demi-groupe et par suite, on a: *un nildemi-groupe S égal à $S_2 \cup \{0\}$ peut être totalement ordonné, si et seulement si, S est un zéro-demi-groupe.* Nous ne nous intéresserons plus à ce cas dans la suite, mais nous retenons la condition nécessaire: $S_2 \cup \{0\}$ est un zéro-demi-groupe.

1. Quelques propriétés algébriques des nildemi-groupes totalement ordonnés. Soit S un nildemi-groupe totalement ordonné par la relation $\leqq$, et soient $P = \{x \in S;\ x \leqq 0\}$, $N = \{x \in S;\ x \geqq 0\}$. Désignons par *$S^*$ l'ensemble des éléments de S d'index supérieur ou égal à* 3 et posons $P^* = P \cap S^*$, $N^* = N \cap S^*$. (Ces notations seront conservées dans la suite.)

On a alors les propriétés suivantes:

a) $PN = NP = \{0\}$.

b) *P est un demi-groupe positivement ordonné* ($\forall a \in P$, $\forall b \in P$, $a \leqq ab$, $b \leqq ab$) et *dualement, N est un demi-groupe négativement ordonné.*

c) *Si a et b sont deux éléments d'index strictement supérieur à* 2,

$$ab = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad ba = 0\,.$$

Si $ab = 0$ et si a et b sont d'index supérieur à 2 strictement, on a nécessairement $a \in P$ et $b \in N$ par exemple, car si a et b appartenaient à P on aurait $a < b < 0$ par exemple, d'où $0 = ab \leqq b^2 \leqq 0$ et b appartiendrait à S_2.

Soit, *I la relation binaire définie dans S^* par*

$$a \equiv b\,(I) \Leftrightarrow \forall x \in S^*\,, \quad xa = 0 \Leftrightarrow xb = 0\,.$$

Il est clair que I est une relation d'équivalence de S^* et que si S est un nildemi-groupe, qui peut être totalement ordonné, $I = J$ où J est la relation définie par:

$$a \equiv b\ (J) \Leftrightarrow \forall x \in S^*\,, \quad ax = 0 \Leftrightarrow bx = 0\,,$$

d'après la propriété c) précédente.

De plus

Proposition 1. *Soit S un nildemi-groupe totalement ordonné; alors les classes mod. I sont P^* et N^*.*

En effet si $a \equiv b\,(I)$, ab est distinct de 0 puisque a^2 est distinct de 0; donc a et b appartiennent tous deux à N^* ou P^*. Réciproquement, si a et b appartiennent à P^* et si $ax = 0$, avec $x \in S^*$, x appartient nécessairement à N^* et par suite $bx = 0$ et ainsi $a \equiv b\,(I)$. Donc les classes mod. I sont bien N^* et P^*.

Ceci nous prouve en particulier que les *éléments d'index strictement supérieur à 2 se partagent en éléments positifs et négatifs et ceci de façon algébrique, indépendemment de toute relation d'ordre.*

Remarque. *Si S est un nildemi-groupe totalement ordonné, I admet une seule classe, si et seulement si „$ab = 0 \Rightarrow a^2$ ou $b^2 = 0$" pour tout a et tout b de S.*

En effet I admet une seule classe, si et seulement si $S^* = P^*$ par exemple. Dans ce cas si $ab = 0$, a et b ne peuvent tous deux appartenir à S^*, donc a ou b est d'index 1 ou 2.

Nous noterons désormais (*) *la condition*

$$ab = 0 \Rightarrow a^2 \quad ou \quad b^2 = 0\,.$$

2. Caractérisation des nildemi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés. Nous allons montrer dans ce paragraphe que pour caractériser les nildemi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés, il suffit de savoir caractériser ceux qui vérifient (*);

Théorème 1. *Si S est un nildemi-groupe vérifiant* (*) *et totalement ordonné, alors S peut également être totalement ordonné, de telle sorte que* 0 *soit élément minimum ou maximum.*

Supposons S totalement ordonné par $\leqq$; puisque S vérifie (*), d'après la remarque précédente P^* ou N^* (relatifs à $\leqq$, mais aussi relatifs à toute autre relation d'ordre total d'après la Proposition 1) est vide. Supposons donc N^* vide; dans ce cas, si $i(x) > 2$, on a $x < 0$; et si $i(x) = 2$, on peut avoir $0 < x$ mais alors $xS = Sx = 0$. Définissons alors une nouvelle relation d'ordre total $\preccurlyeq$ sur S:

$$a \preccurlyeq 0 \quad \forall a \in S ,$$

$$a \preccurlyeq b , \quad \text{si } a \text{ et } b \text{ sont différents de } 0 \text{ et } a \leqq b .$$

Il est facile de vérifier que $\preccurlyeq$ fait de S un demi-groupe totalement ordonné.

On pourra donc toujours supposer si S est un nildemi-groupe totalement ordonné vérifiant (*), que 0 en est élément maximum ou minimum.

Notation. S^2 désigne l'ensemble des éléments de S admettant au moins une décomposition en deux facteurs a et b de S : $S^2 = \{x \in S, \exists a \in S, b \in S \text{ tels que } x = ab\}$. Ainsi, dire qu'un élément x appartient à $S - S^2$, c'est dire que x ne peut se décomposer en un produit de deux ou plusieurs facteurs; on dit encore (cf. T. TAMURA [7]) que x est premier.

Théorème 2. *Soit S un nildemi-groupe et soit Σ_2 l'ensemble*: $\{x \in S; x \neq 0, Sx = = xS = 0 \text{ et } x \in S - S^2\}$.

Alors S peut être totalement ordonné, si et seulement si $S - \Sigma_2$ peut être totalement ordonné.

$S - \Sigma_2$ est toujours un sous demi-groupe de S; donc si S est un nildemi-groupe totalement ordonné, il en est évidement de même de $S - \Sigma_2$.

Supposons donc réciproquement que $S - \Sigma_2$ est totalement ordonné par $\leqq$. Nous pouvons ordonner totalement $\Sigma_2 \cup \{0\}$, puisque c'est un zéro-demi-groupe. Définissons alors dans S une relation binaire $\leqq$ qui prolonge les relations d'ordre sur $S - \Sigma_2$, et $\Sigma_2 \cup \{0\}$ et telle que, de plus, si $a \in S - \Sigma_2$ et $a < 0$ dans $S - \Sigma_2$, si $b \in S - \Sigma_2$ et $0 < b$ dans $S - \Sigma_2$ et si $x \in \Sigma_2 \cup \{0\}$, alors $a < x < b$ dans S.

Cette relation est évidemment une relation d'ordre total dans S et il est facile de voir que les lois d'isotonie sont satisfaites, en utilisant le fait que $a \leqq b$ dans $S - \Sigma_2$ implique $xa \leqq xb$, $ax \leqq bx$ pour tout x de S.

Définition. Un élément de Σ_2 est appelé „*élément superflu*" du demi-groupe S. D'après le théorème 1, il nous suffit d'étudier les nildemi-groupes sans éléments superflus.

Lemme. *Soit S un nildemi-groupe sans éléments superflus. Supposons que*

a) $S_2^2 = \{0\}$.

b) *Si a et b sont d'index strictement supérieur à* 2, $ab = 0 \Leftrightarrow ba = 0$.

c) *La relation d'équivalence I définie sur S^* admet exactement deux classes P^* et N^*, vérifiant $S^1P^*S^1 \cap S^1N^*S^1 = \{0\}$.*

d) $\forall x \in S_2,\ xP^* \cup P^*x \neq \{0\} \Rightarrow (xN^* \cup N^*x) = \{0\}$.

Désignant alors par

$$\Sigma_P = \{x \in S_2;\ \exists y \in P^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cup \{S^1P^*S^1 \cap S_2\} \cup P^* \cup \{0\},$$
$$\Sigma_N = \{x \in S_2;\ \exists y \in N^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cup \{S^1N^*S^1 \cap S_2\} \cup N^* \cup \{0\},$$

*on a: Σ_P et Σ_N sont deux nildemi-groupes, vérifiant *, tels que*

$$S = \Sigma_P \cup \Sigma_N \quad \textit{et} \quad \Sigma_P \cap \Sigma_N = \{0\}.$$

Montrons tout d'abord que les deux classes P^* et N^* vérifient $P^*N^* = N^*P^* = 0$. Soient en effet $a \in P^*$ et $b \in N^*$; on a donc $a \not\equiv b\ (I)$, et par suite, il existe $x \in S^*$ tel que $ax = 0$ et $bx \neq 0$. Comme $a^2 \neq 0$, $x \not\equiv a\ (I)$, donc $x \in N^*$ et $x \equiv b\ (I)$, donc $ax = 0$ implique $ab = 0$, et $ba = 0$ d'après la condition b). On a d'ailleurs $P^*S^1N^* = N^*S^1P^* = 0$; en effet, si $x = u\ a\ v$, avec $a \in S$, $u \in P^*$, $u \in N^*$, alors si $a \in S^*$, $a \in P^*$ ou N^*, donc av ou $ua = 0$ puisque $P^*N^* = N^*P^* = 0$, et si $a \in S_2$, si av est distinct de 0, d'après la condition d) $ua = 0$. Donc dans tous les cas $x = 0$.

L'idéal engendré par $P^*, S^1P^*S^1$, est contenu dans Σ_P, car si $x \in S^1P^*S^1 \cap (S_2 \cup \{0\})$, il appartient par définition à Σ_P et si $x \in S^1P^*S^1 \cap S^*$, alors $x^2 \neq 0$ implique $x \in P^*$ car sinon $x^2 \in S^1P^*S^1N^* = 0$ d'après ce qui précède. De même, $S^1N^*S^1$ est contenu dans Σ_N et ainsi, Σ_P et Σ_N sont des nildemi-groupes, sous demi-groupes de S. Ils vérifient *, car si nous avions $ab = 0$ avec a et $b \in N^*$ [P^*], alors $a \equiv b\ (I)$ et $ab = 0$ implique $b^2 = 0$, ce qui n'est pas.

Pour montrer que $\Sigma_P \cap \Sigma_N = \{0\}$, il nous suffit de montrer que les sous ensembles suivants:

$$\{x \in S_2;\ \exists y \in P^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cap \{x \in S_2;\ \exists y \in N^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\},$$
$$\{x \in S_2;\ \exists y \in P^*, xy \text{ ou } yx \neq 0) \cap \{S^1N^*S^1 \cap S_2\},$$

et

$$\{x \in S_2;\ \exists y \in N^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cap \{S^1P^*S^1 \cap S_2\}$$

sont vides.

Il résulte trivialement de la condition d) que le premier ensemble est vide. Le deuxième et le troisième ensembles sont vides, car si, par exemple, $x \in S_2 \cap S^1N^*S^1$, pour tout y de P^* on a $xy = yx = 0$, puisque $P^*S^1N^* = N^*S^1P^* = 0$.

Théorème 3. *Soit S un nildemi-groupe, sans éléments superflus et ne vérifiant pas „$ab = 0 \Rightarrow a^2$ ou $b^2 = 0$".*

Alors S peut être totalement ordonné, si et seulement si

a) $S_2^2 = \{0\}$.

b) *Si a et b sont d'index strictement supérieur à 2, $ab = 0 \Leftrightarrow ba = 0$.*

c) *La relation d'équivalence I admet exactement deux classes P^* et N^* telles que $S^1P^*S^1 \cap S^1N^*S^1 = \{0\}$.*

d) $\forall x \in S_2$, $xP^* \cup P^*x \neq \{0\} \Rightarrow xN^* \cup N^*x = \{0\}$.

e) *Σ_N et Σ_P peuvent être totalement ordonnés.*

(*Σ_N et Σ_P sont définis dans le lemme précédent.*)

Condition Suffisante. Σ_N et Σ_P sont, d'après le lemme précédent, deux nildemi-groupes vérifiant (*) donc, d'après le Théorème 1 et la condition e), on peut ordonner totalement Σ_P avec 0 comme élément maximum et Σ_N avec 0 comme élément minimum. Comme d'après le lemme, $\Sigma_N \cup \Sigma_P = S$ et $\Sigma_N \cap \Sigma_P = \{0\}$, nous pourrons définir une relation d'ordre total sur S, $\leqq$, prolongeant les relations sur Σ_N et Σ_P, en posant

$$a < 0 < b\,, \quad \forall a \neq 0\,, \quad a \in \Sigma_P\,, \quad \forall b \neq 0\,, \quad b \in \Sigma_N\,.$$

Il nous suffit de montrer que $\Sigma_N\Sigma_P = \Sigma_P\Sigma_N = \{0\}$, pour que l'on soit assuré de l'isotonie.

Soient $a \in \Sigma_P$, $b \in \Sigma_N$: si a et $b \in S_2$, $ab = ba = 0$ d'après la condition a); si $a \in P^*$, $b \in N^*$, $ab = ba = 0$ d'après la démonstration du lemme; si $a \in \Sigma_P \cap S_2$ et si $b \in N^*$. D'après la définition de Σ_P, on sait qu'alors, ou $a \in S^1P^*S^1$ et alors on a vu que $S^1P^*S^1N^* = 0$ dans le lemme, donc $ab = 0$, ou il existe $y \in P^*$ tel que ay ou $ya \neq 0$; mais alors, d'après la condition d) a $N^* = 0$ et $ab = 0$.

Condition Nécessaire. Soit S un nildemi-groupe totalement ordonné. On a vu dans l'introduction que l'on avait nécessairement $S_2^2 = \{0\}$, d'où a). Comme S ne vérifie pas la condition (*), d'après la Proposition 1 et la Remarque qui la suit, on a c) qui est vérifié, avec $P^* = \{x \in S;\ i(x) \geqq 3,\ x < 0\}$ et $N^* = \{x \in S;\ i(x) \geqq 3,\ x > 0\}$. La condition b) est satisfaite comme on l'a vu au § 1. Enfin si $xP^* \cup P^*x \neq 0$, on a nécessairement $x < 0$, donc $xN^* = N^*x = 0$ et d) est satisfait. Les conditions a, b, c et d du lemme étant alors satisfaits, Σ_N et Σ_P sont sous demi-groupes de S, donc peuvent être totalement ordonnés.

Ce théorème nous prouve que le problème de savoir à quelle condition un nildemi-groupe S peut être totalement ordonné sera résolu s'il l'est pour les nildemi-groupes vérifiant $ab = 0$ implique a^2 ou $b^2 = 0$ (*). Pour étudier ces nildemi-groupes, nous distinguons le cas fini du cas quelconque.

3. Nildemi-groups finis vérifiant (*) totalement ordonnés. Nous avons démontré dans [5] qu'un demi-groupe S fini d'ordre p est un nildemi-groupe, si et seulement si, S admet au plus un idempotent, et si le treillis des idéaux (non vides) de S est de longueur $p - 1$.

Donc, si S est un nildemi-groupe fini, d'ordre p, toute chaîne maximale d'idéaux est de longueur $p - 1$. On peut alors énoncer:

Théorème 4. *Soit S un nildemi-groupe fini d'ordre p, vérifiant* $(*)$. *S peut être totalement ordonné, si et seulement si l'une des chaînes maximales, $I_1 = \{0\}$, $I_2, \ldots, I_p = S$ d'idéaux de S vérifie*

$$\forall x \in S\,, \quad \forall r, \forall s \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

$$xI_r \subseteq I_s \Leftrightarrow x(I_r - I_{r-1}) \cap I_s \neq \emptyset$$

$$I_r x \subseteq I_s \Leftrightarrow (I_r - I_{r-1})\, x \cap I_s \neq \emptyset\,.$$

Condition Nécessaire. Si S est totalement ordonné, on peut d'après le théorème 1, supposer que 0 en est le plus petit élément. Dans ce cas, les sections commençantes $x^{\leqq}$ sont des idéaux de S, formant une chaîne maximale de $\{0\}$ à S de longueur $p - 1$. Si l'on a $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_p$, alors en posant $I_n = a^{\leqq}$, il est clair que, $xa_k \in I_s$ implique $xa_k^{\leqq} \subseteq I_s$ et par suite $x(I_k - I_{k-1}) \cap I_s \neq \emptyset$ implique $xI_k \subseteq I_s$.

Condition Suffisante. Nous supposons qu'une chaîne maximale $I_1 = \{0\} \subset \subset I_2, \ldots, \subset I_p = S$ vérifie les conditions du Théorème 4, et nous posons $a_k = I_k - - I_{k-1}$ et ordonnons S par $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_p$. Cette relation est isotone; il suffit de vérifier que $a_i < a_{i+1}$ implique $xa_i \leqq xa_{i+1}$ et $a_{i+1}x \leqq a_i x$. Or si $xa_{i+1} \in \in I_s$, $xa_i \in I_s$ car $a_i \in I_{i+1}$ et nous avons nécessairement $xa_i \leqq xa_{i+1}$.

Ainsi, la conjonction des Théorèmes 2, 3 et 4 permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nildemi-groupe fini puisse être totalement ordonné.

4. Nildemi-groupes quelconques vérifiant(*), totalement ordonnés. Nous avons donné dans [6], comme corollaire de l'étude des demi-groupes réticulés, le théorème suivant

Théorème 5 (3. de [6]). *Un demi-groupe S peut être totalement ordonné, si et seulement si il existe une famille H_λ, $\lambda \in \Lambda$, de parties non vides de S, telles que*:

α) $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{C}_H^1$ *est l'égalité.*

β) *Pour tout λ de Λ, la famille des $(H_\lambda \ldots a)_1$, $a \in S$, est une chaîne pour l'inclusion des ensembles dans $S^1 \times S^1$, et de plus, si a et b sont deux éléments quelconques de S, on a*

$$(H_\lambda \ldots a)_1 \cap (H_\lambda \ldots b)_1 = (H_\lambda \ldots a)_1 \text{ pour tout } \lambda \text{ de } \Lambda \text{ ou },$$

$$(H_\lambda \ldots a)_1 \cap (H_\lambda \ldots b)_1 = (H_\lambda \ldots b)_1 \text{ pour tout } \lambda \text{ de } \Lambda\,.$$

Rappelons que S^1 est l'extension unitaire minimum de S, si $a \in S$ et si H est un sous ensemble de S, $(H \ldots a)_1 = \{(x, y) \in S^1 \times S^1;\ xay \in H\}$ et $\mathscr{C}_H^1$ est la relation d'équivalence définie dans S par:

$$a \equiv b\, \mathscr{C}_H^1 \Leftrightarrow (H \ldots a)_1 = (H \ldots b)_1\,.$$

Dans le cas où S est un nildemi-groupe vérifiant $(*)$, ce théorème prend la forme particulière suivante:

Théorème 6. *Soit S un nildemi-groupe vérifiant $(*)$. S peut être totalement ordonné, si et seulement si, il existe une famille I_λ, $\lambda \in \Lambda$, d'idéaux de S vérifiant $ab \in I_\lambda \Rightarrow a^2$ ou $b^2 \in I_\lambda$ et les conditions $\alpha)$ et $\beta)$ du Théorème 5.*

Ces conditions sont suffisantes d'après le théorème 5. Inversement, elles sont nécessaires, car si S est un nildemi-groupe totalement ordonné, la famille des sections commençantes, $x^{\leqq}$, $x \in S$, est une famille d'idéaux qui vérifie bien ces conditions.

Ainsi, les Théorèmes 2, 3 et 6 caractérisent les nildemi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés.

5. Complèment — Cas particulier. Dans quelques cas simples, on peut donner directement une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nildemi-groupe puisse être totalement ordonné. Ainsi:

Théorème 7. *Soit S un nildemi-groupe admettant un seul élément d'index 2, à savoir „a".*

S peut être totalement ordonné, si et seulement si

1) *Tout élément de S est d'index inférieur ou égal à 3.*

2) *Si x et y sont deux éléments de $S - \{0, a\}$, $xy = a$.*

3) $\forall x \in S$, $xa = ax = 0$.

Condition Suffisante. Ordonnons S de la façon suivante; soit $S_3 = \{$éléments d'index $3\}$; nous posons $0 < a < x$ pour tout x de S_3. L'isotonie se vérifie aisément grâce aux propriétés 2) et 3).

Condition Nécessaire. Montrons tout d'abord que tout élément est d'index inférieur ou égal à 3. Soit x, tel que $i(x) = 2p$ avec $p > 1$. Alors $(x^p)^2 = 0$ et comme $x^p \neq 0$, $x^p = a$. Mais $(x^{p+1})^2 = 0$ et $x^{p+1} \neq 0$ car $x^{p+1} = 0$ implique $i(x) \leqq p + 1$, soit $2p \leqq p + 1$, ce qui n'est pas. Donc $x^{p+1} = a = x^p$; on a alors $x^{2p} = x^{2p-1} = 0$ et $i(x) \leqq 2p - 1$. Ainsi tout élément d'index pair est nécessairement d'index 2. Soit maintenant x, tel que $i(x) = 2p + 1$ avec $p > 1$. Si $x^{2p+1} = 0$, $(x^{p+1})^2 = 0$ et $x^{p+1} \neq 0$, car $x^{p+1} = 0$ implique $p + 1 \geqq 2p + 1$, i.e. $p \leqq 0$. Donc $x^{p+1} = a$, et de même $x^{p+2} = a$ et $x^{p+1} = x^{p+2}$ ce qui impossible. La condition 1 est donc satisfaite.

Comme dans tout demi-groupe totalement ordonné, xy est compris entre x^2 et y^2 et comme $i(x) = 3$ implique $i(x^2) = 2$, on a pour tout x, y de S_3, $x^2 = y^2 = xy = a$. Enfin, si $x \in S_3$, $a^2 \leqq xa \leqq x^2$ donc $xa = a$ ou $xa = 0 = a^2$. Mais $xa = a$ est impossible, car cela implique $x^3a = a = 0$, donc $xa = 0$.

References

[1] *A. H. Clifford* et *G. B. Preston:* The algebraic theory of semigroups AMS 1961. Vol. *1*.

[2] *L. Fuchs:* Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Vandenhoeck und Ruprecht. Göttingen 1966.

[3] *E. Ja. Gabovič:* Unsolved problems in the theory of semigroups (Russian). Sverdlovsk 1969.

[4] *T. Merlier:* Nildemi-groupes totalement ordonnés. C. R. Acad. Sc. Paris t. *274*, p. 1779—1782, 19 Juin 72, Série A.

[5] *T. Merlier:* Sur les idéaux des demi-groupes nilpotents. Semigroup Forum (to appear).

[6] *T. Merlier:* Sur les demi-groupes réticulés et les o-demi-groupes. Semigroup Forum. Vol. *2*, 1971, p. 64—70.

[7] *T. Tamura:* The theory of construction of finite semigroups. Osaka Math. J. *10*, 1958, p. 191—204.

Adresse de l'auteur: (Mlle) Thérèse Merlier, Université de Paris VI, Mathématiques Pures, 4 Place Jussieu, 75230 Paris — Cedex 05, France.