

Tibor Šalát

Bemerkung über die Verteilung von Ziffern in Cantorschen Reihen

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 23 (1973), No. 3, 497–499

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101191>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

BEMERKUNG ÜBER DIE VERTEILUNG VON ZIFFERN  
IN CANTORSCHEN REIHEN

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Eingegangen am 4. September 1972)

Es sei  $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Folge von natürlichen Zahlen,  $q_k > 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Dann kann jede Zahl  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  eindeutig in der Form ihrer Cantorschen Entwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \dots q_k}$$

dargestellt werden, wo  $\varepsilon_k(x)$  ganze Zahlen sind,  $0 \leq \varepsilon_k(x) \leq q_k - 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) und für unendlich viele  $k$  die Ungleichheit  $\varepsilon_k(x) < q_k - 1$  gilt (siehe [1], S. 7). Bezeichnen wir mit  $H(q_1, q_2, \dots)$  bzw.  $H^*(q_1, q_2, \dots)$  die Menge aller  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , die die folgende Eigenschaft haben:  $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}'_k = \langle 0, 1 \rangle$  bzw. die Folge  $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$  ist gleichverteilt in  $\langle 0, 1 \rangle$  ( $\{a_k\}'_k$  bezeichnet die Menge aller Häufungswerte der Folge  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ). Offenbar ist

$$H^*(q_1, q_2, \dots) \subset H(q_1, q_2, \dots).$$

In den Arbeiten [2], [3] wurden verschiedene Eigenschaften von Mengen  $H(q_1, q_2, \dots)$ ,  $H^*(q_1, q_2, \dots)$  beschrieben, die in dieser Arbeit ergänzt werden.

**Satz 1.** *Es sei*

$$(1) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} q_k = +\infty.$$

Dann ist  $H(q_1, q_2, \dots)$  eine residuale  $F_{\sigma\delta}$ -Menge in  $\langle 0, 1 \rangle$ .

*Beweis.* Wir verwenden die Bezeichnungen aus der Arbeit [2] (siehe den Beweis des Satzes 2 aus [2]).

Wir beweisen, dass  $H(q_1, q_2, \dots)$  eine residuale in  $\langle 0, 1 \rangle$  Menge ist.

Wenn  $z \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $0 < \eta < \min(z, 1 - z)$  ist, dann setzen wir

$$(2) \quad R_k(\eta) = \left\{ x \in \langle 0, 1 \rangle; \left| \frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} - z \right| \geq \eta \right\},$$

$$P_n(\eta) = \bigcap_{k=n}^{\infty} R_k(\eta), \quad R(\eta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(\eta).$$

Wir beweisen zuerst, dass  $P_n(\eta)$  nirgendsicht ist.

Es sei  $I, I \subset \langle 0, 1 \rangle$  ein beliebiges offenes Intervall. Wir wählen ein  $m$  so gross, dass dieses Intervall  $I$  schon irgendein Intervall  $i_m^s$  der  $m$ -ten Stufe enthält (siehe [2], S. 255). Es gehöre  $i_m^s$  zur Folge  $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots, \varepsilon_m^0$  ([2], S. 255). Wählen wir  $j$  so gross, dass

$$(a) \quad j > m, \quad j > n;$$

$$(b) \quad \frac{1}{q_j} < \eta$$

ist. Das ist infolge der Voraussetzung (1) des Satzes möglich. Konstruieren wir jetzt das Intervall  $i_j^t$  der  $j$ -ten Stufe, das zur Folge

$$\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots, \varepsilon_m^0, 0, 0, \dots, 0, v$$

gehört, wo  $v$  eine ganze nichtnegative Zahl mit

$$(3) \quad v < q_j, \quad \left| \frac{v}{q_j} - z \right| < \eta$$

bedeutet (ihre Existenz folgt aus (b)). Für jedes  $x \in i_j^t$  gilt die Gleichheit  $\varepsilon_j(x) = v$  und so auf Grund von (a), (3) kann die Zahl  $x$  nicht zur Menge  $P_n(\eta)$  gehören. Jetzt aber ist  $i_j^t \subset i_m^s \subset I$  und  $i_j^t \cap P_n(\eta) = \emptyset$ . Daher ist  $P_n(\eta)$  eine nirgendsdichte Menge in  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Aus der Definition von  $R(\eta)$  folgt, dass  $R(\eta)$  ( $\eta > 0$ ) eine Menge von erster Kategorie ist.

Es sei  $\eta_n \rightarrow 0, 0 < \eta_n < \min(z, 1 - z)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Dann ist  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R(\eta_n)$  eine Menge von erster Kategorie. Infolge dieser Tatsache ist die Menge

$$(4) \quad H(z) = \langle 0, 1 \rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} R(\eta_n)$$

residual in  $\langle 0, 1 \rangle$ . Wenn  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  die Folge aller rationalen Zahlen aus  $(0, 1)$  bedeutet, dann ist auch

$$(5) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} H(r_n) = H(q_1, q_2, \dots)$$

residual in  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Die Menge  $R_k(\eta)$  ( $\eta > 0$ ) besteht aus einigen Intervallen der  $k$ -ten Stufe. Daher ist sie eine  $G_\delta$ -Menge in  $\langle 0, 1 \rangle$ . Aus (2), (4), (5) bekommt man unmittelbar, dass  $H(q_1, q_2, \dots)$  eine  $F_{\sigma\delta}$ -Menge ist.

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Setzen wir

$$D(q_1, q_2, \dots) = H(q_1, q_2, \dots) - H^*(q_1, q_2, \dots).$$

Bezeichnen wir mit  $|M|$  das Lebesguesche Mass der Menge  $M$ .

**Satz 2.** Es sei (1) erfüllt.

a)  $D(q_1, q_2, \dots)$  ist eine residuale  $F_{\sigma\sigma\sigma}$ -Menge in  $\langle 0, 1 \rangle$ .

b) Wenn

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} = o(n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

gilt, dann ist  $|D(q_1, q_2, \dots)| = 0$ .

Wenn (6) nicht gilt, dann ist  $|D(q_1, q_2, \dots)| = 1$ .

Beweis. Der Teil a) des Satzes folgt aus dem Satz 1 und aus der Tatsache, dass  $H^*(q_1, q_2, \dots)$  eine  $G_{\sigma\sigma\sigma}$ -Menge von erster Kategorie in  $\langle 0, 1 \rangle$  ist ([3], Satz 2,1).

Unter der Voraussetzung (1) gilt  $|H(q_1, q_2, \dots)| = 1$  ([2], Satz 3). Wenn (6) gilt, dann ist  $|H^*(q_1, q_2, \dots)| = 1$  ([3], Satz 2,3), darum  $|D(q_1, q_2, \dots)| = 0$ . Wenn (6) nicht gilt, dann ist  $|H^*(q_1, q_2, \dots)| = 0$  ([3], Satz 2, 3), darum  $|D(q_1, q_2, \dots)| = 1$ .

#### Literatur

- [1] I. Niven: Irrational numbers, Carus Monographs, 11, 1956.
- [2] T. Šalát: Eine metrische Eigenschaft der Cantorschen Entwicklungen der reellen Zahlen und Irrationalitätskriterien, Czechosl. Math. J. 14 (89), (1964), 254–266.
- [3] T. Šalát: Zu einigen Fragen der Gleichverteilung (mod 1), Czechosl. Math. J. 18 (93), (1968), 476–488.

Anschüft des Verfassers: 816 31 Bratislava, Mlynská dolina, Pavilón matematiky, ČSSR (Katedra algebrý a teórie čísel Prírodovedeckej fakulty Komenského univerzity).