Břetislav Novák

Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. III

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 23 (1973), No. 3, 467–482

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101188

Czechoslovak Mathematical Journal, 23 (98) 1973, Praha

# MITTELWERTSÄTZE DER GITTERPUNKTLEHRE III

BŘETISLAV NOVÁK, Praha

(Eingelangt am 4. Juli 1972)

## 1. EINLEITUNG

Es sei $Q(u) = Q(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ eine positiv definite quadratische Form in $r$ Variablen $(r \geqq 2)$ mit symmetrischer ganzzahliger Koeffizientenmatrix und mit der Determinante $D$. Es seien $b_1, b_2, \ldots, b_r$, $M_1 > 0$, $M_2 > 0, \ldots, M_r > 0$ ganze und $\alpha_1$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ reele Zahlen.

Setzen wir

$$A(x) = \sum \exp \{2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j\}$$

für $x \geqq 0$, wo über alle $r$-tupel $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ reeller Zahlen, für welche $Q(u) \leqq$ $\leqq x$, $u_j \equiv b_j (\text{mod } M_j)$, $j = 1, 2, \ldots, r$ ist, summiert wird.

Wenn man

$$V(x) = \frac{\pi^{r/2} x^{r/2} \exp \{2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\}}{\sqrt{(D)}\, M_1 M_2 \ldots M_r\, \Gamma(r/2 + 1)}\, \delta$$

setzt, wo $\delta = 1$ ist falls alle Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$ ganz sind und sonst $\delta = 0$, dann gilt (vgl. z.B. [3]) für $r > 4$ für die Funktion

$$P(x) = A(x) - V(x) \tag{1}$$

die Abschätzung

$$P(x) = O(x^{r/2-1})\,. \tag{2}$$

Wenn wir von unseren Untersuchungen im Weiteren den Triviallfall wenn $A(x) = 0$ für alle $x$ ist, ausschliessen, dann sind gewisse Beziehungen zwischen dem „genauen Exponenten"

$$f = \limsup_{x \to +\infty} \frac{\lg |P(x)|}{\lg x} \tag{3}$$

und dem arithmetischen Charakter der Zahlen $\alpha_j$, $M_j$, $b_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$ bekannt (siehe [3]). In einer Reihe von Fällen ist der genaue Wert von (3) nicht bekannt. Es wird deswegen zugleich mit der Funktion (2) auch deren Mittelwert

$$M(x) = \int_0^x |P(t)|^2 \, dt \tag{4}$$

untersucht (vgl. z.B. [4]). Vor einer verhältnismässig kurzen Zeit leitete JARNÍK in der Arbeit [1] die Untersuchung der Abschätzungen für die Funktion

$$P_0(x) = P(x)\,, \quad P_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^x P(t)\,(x - t)^{\varrho - 1} \, dt \quad \text{für} \quad \varrho > 0$$

in Abhängigkeit von dem Parametr $\varrho$ ein (siehe [6], [7] und [8]). Es zeigt sich dabei die interessante Tatsache, dass der Wert

$$f_\varrho = \limsup_{x \to +\infty} \frac{\lg |P_\varrho(x)|}{\lg x}$$

von einem gewissen Wert $\varrho = \varrho_0$ dem Wert $\frac{1}{4}(r - 1) + \frac{1}{2}\varrho$ gleich ist und dass für $0 \leqq \varrho < \varrho_0$ dieser wesentlich von der Form $Q$ und den Zahlen $\alpha_j$, $b_j$ und $M_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$ abhängt. Von den Arbeiten [1] und [8] ist es ersichtlich, dass die Bestimmung des Wertes $\varrho_0$ und auch der Werte $f_\varrho$ für $\varrho$ in der Umgebung von $\varrho_0$ sehr schwierig ist und dass deren Charakter einen Vergleich mit dem bekannten „Kreisproblem" erträgt. Es ist darum nur natürlich anstatt der Funktion (4) die Funktion

$$M_\varrho(x) = \int_0^x |P_\varrho(t)|^2 \, dt \tag{5}$$

zu untersuchen (siehe [5]–[7]). Wir beschränken uns ferner auf den Fall, dass die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ rational sind. In der Arbeiten [5] und [6] wurde gezeigt, dass die folgenden Ergebnisse gelten:

I.

$$0 < \liminf_{x \to +\infty} \frac{M_\varrho(x)}{x^{r/2 + \varrho + 1/2}} \leqq \limsup_{x \to +\infty} \frac{M_\varrho(x)}{x^{r/2 + \varrho + 1/2}} < +\infty \tag{6}$$

für $\varrho > \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$, $\varrho \geqq 0$.

II. Wenn $0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ ist, dann gilt im sogenannten Singularfall (vgl. 2) wieder die Beziehung (6); sonst ist

$$M_\varrho(x) = Kx^{r-1} + o(x^{r-1}) \tag{7}$$

für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$,

$$M_\varrho(x) = Kx^{r-1} \lg x + o(x^{r-1} \lg x) \tag{8}$$

für $0 \leqq \varrho = \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ mit einer passenden positiven Konstante $K$.

Wir bemerken, dass die entsprechenden Abschätzungen der Funktion $P_\varrho(x)$ nur für einige Werte von $\varrho$ bekannt sind:

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2}), \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2})$$

für $\varrho > \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ (im singulären und nichtsingulären Fall)

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1}), \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1})$$

für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$ im nichtsingulären Fall und sogar nur

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho/2}), \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2})$$

für $0 < \varrho < \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ im Singularfall. Die Abschätzungen (6)–(8) bezeugen, dass der oben angeführte Wert $\varrho_0$ im Singularfall und für $r = 2, 3$ gleich Null ist und dass sonst $\varrho_0 = \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ ist.

Das Ziel dieser Arbeit ist das Ergebnis (6) zu verschärfen und diesen Satz zu beweisen:

**Hauptsatz.** *Es sei $Q$ eine positiv definite quadratische Form in $r$ Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten und es seien $b_j$, $M_j$ ganze und $\alpha_j$ rationale Zahlen, $j = 1, 2, \ldots, r$. Dann ist*

$$M_\varrho(x) = Kx^{r/2+\varrho+1/2} + O(x^{r/2+\varrho}) \tag{9}$$

*für $\varrho > \frac{1}{2}r - 1$ und für alle $\varrho > 0$ im Singularfall, wo $K$ eine passende positive Konstante ist.*

Wir bemerken, dass im Singularfall aus der Arbeit [10] von A. Walfisz das Ergebnis

$$M(x) = Kx^{r/2+1/2} + O(x^{r/2} \lg^2 x)$$

folgt. Walfisz benutzt in dieser Arbeit eine Anpassung der Cramer-Landau'schen Methode, mit deren Hilfe für den Fall des Kreises, $M_j = 1$, $\alpha_j = 0$, $b_j = 0$, $j = 1, 2$ die Erbegnisse

$$M(x) = Kx^{3/2} + O(x^{1+\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$,

$$M(x) = Kx^{3/2} + O(x \lg^2 x)$$

usw. erreicht wurden (vgl. [2]). Diese Methode benutzt im wesentlichen den Landau'schen Ausdruck für die Funktion $P_1(x)$ und den Übergang zu der Funktion $P(x)$ mit Hilfe von Differenzen. In dieser Arbeit benutzen wir eine neue, technisch einfachere Methode, welche auf der Untersuchung der Funktion $M_\varrho(x)$ als einer Funktion der komplexen Variablen $\varrho$ beruht.

## 2. HILFSSÄTZE UND BEZEICHNUNGEN

Wir behalten die Bezeichnungen vom 1 und bezeichnen ferner mit $m$, $n$ nichtnegative ganze Zahlen. Mit dem Buchstaben $c$ bezeichnen wir (allgemein verschiedene) positive Konstanten, welche nur von $Q$ und der Zahlen $\varrho$, $\alpha_j$ $b_j$, $M_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$ abhängen. Die Symbole $O$, $o$ und $\Omega$ haben die übliche Bedeutung d.h. sie werden zum Grenzübergang $x \to +\infty$ bezogen und die in deren Definitionen auftretenden Konstanten sind immer vom „Typ" $c$.

Anstatt von $|A| \leqq cB$ schreiben wir nur $A \ll B$; wenn $A \ll B$ und $B \ll A$ zugleich gilt, dann wir schreiben $A \asymp B$. Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sind immer rational und mit $H$ sei der kleinste gemeinsame Nenner der Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$ bezeichnet. $x$ wird eine hinreichend grosse reelle Zahl bedeuten, $\varrho$ ist eine komplexe Zahl mit nichtnegativem Realteil $\sigma$.

Wir schreiben genauer $P(x; \alpha_j)$ und $P_\varrho(x; \alpha_j)$ anstatt von $P(x)$ und $P_\varrho(x)$ vom 1. Es is offensichtlich, dass für ein festes $x$ die Funktion $P_\varrho(x; \alpha_j)$ in der Halbebene $\operatorname{Re} \varrho > 0$ holomorph und im Nullpunkt (als eine Funktion der reellen Variablen) von rechts stetig ist. Dasselbe gilt auch für die Funktion

$$M_\varrho(x) = M_\varrho(x; \alpha_j) = \int_0^x P_\varrho(t; \alpha_j)\, P_\varrho(t; -\alpha_j)\, \mathrm{d}t\,.$$

Nachdem $\overline{P_\varrho(x; \alpha_j)} = P_\varrho(x; -\alpha_j)$ für reelle $\varrho$ gilt, fällt diese neue Definition für reelle $\varrho$ mit (5) zusammen.

Es sei $\lambda_0 = 0$ und seien $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ alle positiven Werte der Form $Q(u)$ in den Punkten $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$, $u_j \equiv b_j (\operatorname{mod} M_j)$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Wenn wir $a_0 = A(\lambda_0)$, $a_n = A(\lambda_n) - A(\lambda_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ bezeichnen, dann ist offenbar

$$A(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n \tag{10}$$

und

$$A_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^x A(t)\,(x - t)^{\varrho - 1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n)^\varrho\,. \tag{11}$$

Für ein komplexes $s$, $\operatorname{Re} s > 0$ sei

$$\Theta(s) = \Theta(s; \alpha_j) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \exp\{-\lambda_k s\}\,, \tag{12}$$

$$F(s) = \Theta(s) - \frac{\pi^{r/2} \exp\{2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\}}{\sqrt{(D)}\, M_1 M_2 \ldots M_r s^{r/2}}\, \delta\,, \quad G(s) = \overline{F(\bar{s})}\,.$$

(Wenn $\tau$ eine positive Zahl ist, bezeichnen wir mit $s^\tau$ denjenigen Zweig der Funktion $s^\tau$ in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$, welcher positiv für positive Werte von $s$ ist.)

Bezeichnen wir mit $\bar{Q}$ die mit $Q$ konjugierte Form und seien $\lambda'_0, \lambda'_1, \ldots, b'_0, b'_1, \ldots$ die der Form $\bar{Q}$ und den Zahlen $b_j$, $-\alpha_j$, $1/M_j$ entsprechenden Werte, welche den Werten $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, a_0, a_1, \ldots$ für die Form $Q$ und den Zahlen $\alpha_j$, $b_j$, $M_j$ (in gegebener Reihenfolge) analog sind. Die bekannte Transformation der Funktion $\Theta(s)$ (siehe [4], S. 159) ergibt die Beziehungen

$$F(s) = \frac{M \exp\{2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\}}{s^{r/2}} \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \exp\left\{-\frac{\pi^2 \lambda'_n}{s}\right\}, \tag{13}$$

$$G(s) = \frac{M \exp\{-2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\}}{s^{r/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}'_n \exp\left\{-\frac{\pi^2 \lambda'_n}{s}\right\}, \tag{14}$$

wo $M = \pi^{r/2}/\sqrt{(D)}\, M_1 M_2 \ldots M_r$ ist.

Wir bemerken, dass offensichtlich

$$\sum_{\lambda_n' \leqq x} |b'_n| \ll x^{r/2}. \tag{15}$$

**Lemma 1.** *Wenn* $\operatorname{Re} \varrho > \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ *ist, dann ist*

$$M_\varrho(x) = \frac{2M^2}{\pi^{r+2\varrho}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b'_n \bar{b}'_m}{(\lambda'_n \lambda'_m)^{r/4+\varrho/2}} \int_0^{\sqrt{x}} t^{r+2\varrho+1} J(2\pi t \sqrt{\lambda'_n})\, J(2\pi t \sqrt{\lambda'_m})\, \mathrm{d}t, \tag{16}$$

*wo* $J(z) = J_\nu(z) = J_{r/2+\varrho}(z)$ *die Besselsche Funktion* I. *Art mit dem Index* $\nu = \frac{1}{2}r + \varrho$ *ist, wobei die Reihe rechts im Gebiet* $\operatorname{Re} \varrho > \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ *lokal gleichmässig konvergent ist.*

Beweis. Eine einfache Berechnung (siehe [6], S. 58–59) ergibt

$$M_\varrho(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{(a)} \left( \int_{(a)} \frac{\exp\{x(s+s')\} - 1}{s^{\varrho+1} s'^{\varrho+1} (s+s')} F(s)\, G(s')\, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}s', \tag{17}$$

für $\operatorname{Re} \varrho \geqq 0$, $a > 0$, wobei über die Gerade $\operatorname{Re} s = a$ ($\operatorname{Re} s' = a$) integriert wird. Nach Einsetzung von (13) und (14) bekommt man ($\nu = \frac{1}{2}r + \varrho$)

(18)

$$M_\varrho(x) = -\frac{M^2}{4\pi^2} \int_{(a)} \left( \int_{(a)} \frac{\exp\{x(s+s')\} - 1}{s^{\nu+1} s'^{\nu+1} (s+s')} \sum_{m,n=1}^{\infty} b'_n \bar{b}'_m \exp\left\{-\frac{\pi^2 \lambda'_n}{s} - \frac{\pi^2 \lambda'_m}{s'}\right\} \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}s'.$$

Zum Beweis der Vertauschbarkeit der Integration und der Summe genügt es zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |b'_n b'_m| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\dfrac{\pi^2 a \lambda'_n}{a^2 + t^2} - \dfrac{\pi^2 a \lambda'_m}{a^2 + t'^2}\right\} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}t'}{(a^2+t^2)^{r/4+(\sigma+1)/2} (a^2+t'^2)^{r/4+(\sigma+1)/2} (2a + |t+t'|)}$$

für $\sigma \geqq \frac{1}{2}r$ konvergent ist. Dies folgt aber von der Abschätzung $(a = c)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b'_n| \exp\left\{-\frac{\pi^2 a\lambda'_n}{a^2 + t^2}\right\} \ll (a^2 + t^2)^{r/2}$$

(die partielle Summation mit Berücksichtigung von (15)) und der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'}{(a^2 + t^2)^{(\sigma+1)/2 - r/4}(a^2 + t'^2)^{(\sigma+1)/2-r/4}(2a + |t + t'|)}$$

für $\sigma \geqq \frac{1}{2}r$.

Wenn man in (18) die Summation und Integration vertauscht und die Beziehungen

$$\exp\{x(s + s')\} - 1 = (s + s')\int_0^x \exp\{u(s + s')\}\,\mathrm{d}u$$

und $(A > 0,\ B > 0,\ \operatorname{Re} v > 0)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)} \frac{\exp\{As - B/s\}}{s^{v+1}}\,\mathrm{d}s = \left(\frac{A}{B}\right)^{v/2} J_v(2\sqrt{AB})$$

benutzt, dann bekommt man sofort (16).

Nachdem $J_v(z) \ll z^{-1/2}$ gleichmässig im Gebiet $(0, +\infty)$ und lokal gleichmässig mit Rücksicht auf $\varrho$ in der Halbebene $\operatorname{Re}\varrho \geqq 0$ gilt, ist

$$\int_0^{\sqrt{x}} t^{r+2\varrho+1} J(2\pi t\sqrt{\lambda'_n})\, J(2\pi t\sqrt{\lambda'_m})\,\mathrm{d}t \ll \frac{x^{r/2+\sigma+1/2}}{(\lambda'_n\lambda'_m)^{1/4}}\,.$$

Wenn wir nun die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{|b'_n b'_m|}{(\lambda'_n\lambda'_m)^{r/4+\sigma/2+1/4}}$$

für $\sigma > \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ (siehe (15)) in Betracht nehmen, sehen wir, dass die Reihe in (16) lokal gleichmässig im Gebiet $\operatorname{Re}\varrho = \sigma > \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ konvergiert und ihre Summe ist in diesem Gebiet eine holomorphe Funktion der Variablen $\varrho$. Nach dem Eindeutigkeitssatz sehen wir, dass (16) auch in diesem Gebiet gilt.

Bemerkung. Wenn wir die lokal gleichmässige Konvergenz der Reihe (16) im Gebiet $\operatorname{Re}\varrho = \sigma > \sigma_0$, wo $\sigma_0 \geqq 0$ eine gegebebe Zahl ist, beweisen, dann ist die rechte Seite in diesem Gebiet holomorph und also gilt (16) in diesem Gebiet. Diese Bemerkung werden wir ohne Hinweis im Weiteren benutzen.

Bemerkung. Wenn man die Tatsache berücksichtigt, dass die Transformationen (13), (14), die Abschätzung (15) und die Darstellung (17) für eine allgemeine positiv definite quadratische Form $Q$ und beliebige reelle $\alpha_j$, $b_j$, $M_j$ ($M_j > 0$) gelten, dann kann gefolgert werden, dass das Lemma 1 auch in diesem allgemeinen Fall gilt.

Bemerken wir noch die folgende einfache Tatsache. Wenn man genauer $A(x) = A(x, Q, \alpha_j, b_j, M_j)$ schreibt und wenn $\tilde{A}(x) = A(x, c_1 Q, \alpha_j/c_1, c_1 b_j, c_1 M_j)$, $c_1 = c$ ist, dann ist $A(x) = \tilde{A}(c_1^3 x)$ und für die entsprechenden Funktionen $\Theta(s)$, $\tilde{\Theta}(s)$ ist $\Theta(s) = \tilde{\Theta}(sc_1^{-3})$, ähnlicherweise auch $a_n = \tilde{a}_n$, $\lambda_n = c_1^{-3}\tilde{\lambda}_n$ usw. Nachdem die Werte $\lambda'_n$ rational sind, kann man demzufolge bei unseren Abschätzungen voraussetzen, dass die Werte $\lambda'_n$ ganzzahling sind. Anstatt von (16) kann man also

$$(19) \qquad M_\varrho(x) = \frac{2M^2}{\pi^{r+2\varrho}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b'_n b'_m}{(mn)^{r/4+\varrho/2}} \int_0^{\sqrt{x}} t^{r+2\varrho+1} \, J(2\pi t\sqrt{n})\, J(2\pi t\sqrt{m})\, dt$$

schreiben, wobei

$$b'_n = \sum \exp\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{r} b_j \left(\frac{m_j}{M_j} - \alpha_j\right)\right\}$$

ist und wo in der letzten Summe über alle Systeme $m_1, m_2, \ldots, m_r$ ganzer Zahlen, für welche $\bar{Q}(m_j/M_j - \alpha_j) = n$ ist, summiert wird (die Bezeichnung ist von der vorherigen abweichend). Ähnlicherweise bei der Form $Q$ und den Zahlen $a_n$.

Für die Untersuchung der rechten Seite in (18) führen wir noch das folgende Lemma an.

**Lemma 2.** *Es seien $h$, $k$ ganze teilerfremde Zahlen, $k > 0$. Dann ist*

$$(20) \qquad \Theta(s) = \frac{M \exp\{2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\}}{k^r\left(s - \frac{2\pi i h}{k}\right)^{r/2}} \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_r = -\infty}^{\infty} S_{h,k,(m)} \exp\left\{-\frac{\pi^2 \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - \alpha_j k\right)}{k^2\left(s - \frac{2\pi i h}{k}\right)}\right\},$$

*wobei*

$$(21) \qquad S_{h,k,(m)} = S_{h,k,m_1,\ldots,m_r} =$$

$$= \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_r = 1}^{k} \exp\left\{-\frac{2\pi i h}{k} Q(a_j M_j + b_j) + \frac{2\pi i}{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{m_j}{M_j}(a_j M_j + b_j)\right\}.$$

*Es gilt*

$$S_{h,k,(m)} \ll k^{r/2}.$$

Beweis. Siehe z.B. [3], Lemma 1.

Wir sagen nun, dass der Singularfall entsteht, falls $S_{h,k,(m)} = 0$ for alle im Lemma 2 betrachteten Paare $h$, $k$, für welche $m_j = \alpha_j M_j k$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k \equiv 0 \pmod{H}$ gilt, ist. Im sonstigen Fall sprechen wir von dem nichtsingulären Fall.[1])

[1]) Der nichtsinguläre Fall entsteht z.B. wenn $\delta = 1$ ist. Im Singularfall ist also $\delta = 0$ und also auch $a_0 = 0$.

Vom Lemma 2 kann man leicht folgendes herleiten (siehe auch [4], S. 162–164):

**Lemma 3.** *Wenn* $s = 1/x + 2\pi i t$, $k \leqq \sqrt{x}$ ($h, k$ *ganze teilerfremde Zahlen*) *dann ist*

$$\Theta(s) \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}\left(1 + x^2\left(t - \frac{h}{k}\right)^2\right)^{r/4}} \tag{22}$$

*für*

$$\left|t - \frac{h}{k}\right| \ll \frac{1}{k\sqrt{x}}. \tag{23}$$

*Im Singularfall ist*

$$\Theta(u + 2\pi i t) \ll u^{-r/4} \tag{24}$$

*gleichmässig für* $u > 0$ *und alle reellen Werte von* $t$.[2])

Der Einfachkeit wegen unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:

Fall I. Der nichtsinguläre Fall, Re $\varrho > \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$;

Fall II. Der Singularfall, Re $\varrho \geqq 0$.

Im Falle I setzen wir $\sigma_0 = \frac{1}{2}r - 1$; im Falle II $\sigma_0 = 0$.

**Lemma 4.**[3]) *Es gilt*

$$\text{I.} \quad \sum_{m \leqq x} |a_m|^2 \ll x^{r-1} \lg^{\varepsilon} x, \tag{25}$$

*wo* $\varepsilon = 0$ *für* $r \geqq 3$, $\varepsilon = 1$ *für* $r = 2$.

$$\text{II.} \quad \sum_{m \leqq x} |a_m|^2 \ll x^{r/2}. \tag{26}$$

*Analoge Beziehungen gelten auch für* $\sum_{m \leqq x} |b'_m|^2$.

Beweis. Offenbar ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \exp\{-2k \operatorname{Re} s\} = \int_0^1 |\Theta(s + 2\pi i t)|^2 \, dt \tag{27}$$

im Gebiet Re $s > 0$. Es genügt also

$$\int_0^1 \left|\Theta\left(\frac{1}{x} + 2\pi i t\right)\right|^2 dt$$

---

[2]) Für $u \ll 1$ benutzen wir das Lemma 2, für $u > 1$ führen wir die Abschätzung unmittelbar nach der Definition von $\Theta(s)$ durch, nachdem $a_0 = 0$ ist.

[3]) Siehe auch [10]; teilerweise sind diese Ergebnisse auch schon bei Hecke zu finden.

abzuschätzen. Wenn man im Intervall $[0, 1]$ die zu $\sqrt{x}$ gehörenden Fareybrüche (d.h. Brüche $h/k$, wo $h$, $k$ teilerfremd sind, $0 \leqq h \leqq k \leqq \sqrt{x}$) kennzeichnet und mit $\mathfrak{L}_{h,k}$ das die Zahl $h/k$ enthaltende, durch die Medianten mit den benachbarten Brüchen gebildete, Intervall bezeichnet ($\mathfrak{L}_{0,1} = [0, w^{-1}) \cup [1 - w^{-1}, 1]$, wo $w = [\sqrt{x}] + 1$), dann ist für $t \in \mathfrak{L}_{h,k}$ (siehe [2], S. 249–250)

$$\left| t - \frac{h}{k} \right| \ll \frac{1}{k\sqrt{x}}$$

und man kann also das Lemma 3 benutzen. Nach (22) und (23) ist also

$$\int_0^1 \left| \Theta\left(\frac{1}{x} + 2\pi i t\right) \right|^2 \mathrm{d}t \ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{0 \leqq h \leqq k} \int_0^{c/k\sqrt{x}} \frac{x^r \, \mathrm{d}u}{k^r(1 + x^2u^2)^{r/2}} \ll x^{r-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{k^{r-1}}$$

und daher folgt schon (25) und soeben auch die Behaptung für $\sum_{m \leqq x} |b'_m|^2$.

Im Singularfall bezeichnen wir

$$\Theta'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} b'_k \exp\{-\lambda'_k s\}$$

d.h. nach (13) ist

$$\Theta(s) = \frac{M \exp\{2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\}}{s^{r/2}} \, \Theta'\left(\frac{\pi^2}{s}\right).$$

Wenn also (24) gilt, dann ist auch

$$\Theta'(u + 2\pi i t) \ll (u^2 + 4\pi^2 t^2)^{-r/4} \left| \Theta\left(\pi^2 \frac{u - 2\pi i t}{u^2 + 4\pi^2 t^2}\right) \right| \ll u^{-r/4}$$

und also ist

$$\int_0^1 \left| \Theta\left(\frac{1}{x} + 2\pi i t\right) \right|^2 \mathrm{d}t \ll x^{r/2}, \quad \int_0^1 \left| \Theta'\left(\frac{1}{x} + 2\pi i t\right) \right|^2 \mathrm{d}t \leqq x^{r/2}.$$

Daher ergibt sich nach (27) die Beziehung (26) und auch die gleiche Beziehung für $\sum_{m \leqq x} |b'_m|^2$.

B e m e r k u n g. Die Abschätzungen sind allgemein definitiv. Man kann nämlich zeigen, dass

$$\sum_{m \leqq x} |a_m|^2 = cx^{r-1} + O(x^{3r/4})$$

im Falle I für $r > 4$ und

$$\sum_{m \leqq x} |a_m|^2 = cx^{r/2} + O(x^{r/2 - 2/5})$$

im Falle II gilt.

Bemerkung. Für $r > 2$ folgt aus (25) und (26) (aber gilt trivial auch für $r = 2$)

$$\text{I.} \quad \sum_{m \leqq x} |a_m| \ll x^{r/2}, \qquad \sum_{m \leqq x} |b'_m| \ll x^{r/2},$$

$$\text{II.} \quad \sum_{m \leqq x} |a_m| \ll x^{r/4+1/2}, \quad \sum_{m \leqq x} |b'_m| \ll x^{r/4+1/2}.$$

Im Falle I können offenbar auch diese Abschätzungen definitiv nicht verbessert werden, im Falle II bleib diese Fragen offen.

Wenn wir $\gamma = r - 1$ im Falle I, $\gamma = \frac{1}{2}r$ im Falle II setzen, dann haben wir ($\varepsilon = 1$ nur für $r = 2$ im Falle I)

$$\sum_{m \leqq x} |b'_m|^2 \ll x^\gamma \lg^\varepsilon x, \quad \sum_{m \leqq x} |b'_m| \ll x^{(\gamma+1)/2}.$$

Daher folgt

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} \frac{|b'_n|^2}{n^\beta} = \begin{array}{ll} O(1) & \text{für} \quad \beta > \gamma, \\ O(\lg^{1+\varepsilon} x) & \text{für} \quad \beta = \gamma, \\ O(x^{\gamma-\beta} \lg^\varepsilon x) & \text{für} \quad 0 < \beta < \gamma; \end{array}$$

und

$$\sum_{1 \leqq n \leqq x} \frac{|b'_n|}{n^\beta} = \begin{array}{ll} O(1) & \text{für} \quad \beta > \frac{1}{2}(\gamma+1), \\ O(\lg x) & \text{für} \quad \beta = \frac{1}{2}(\gamma+1), \\ O(x^{(\gamma+1)/2-\beta}) & \text{für} \quad \beta < \frac{1}{2}(\gamma+1). \end{array}$$

Diese Abschätzungen werden wir weiter stets gebrauchen.

## 3. HAUPTSATZ

Der Einfachkeit wegen leiten wir folgende Bezeichnung ein. Anstatt $b'_n$ schreiben wir $b_n$ (eine Verwechselung mit den Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_r$ droht nun nicht). Ferner sei $(m, n \geqq 1)$

$$I_{m,n} = \int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho+1} J(\alpha u) J(\beta u) \, du,$$

wo $J(z) = J_\nu(z)$, $\nu = r/2 + \varrho$,

$$A = A(u) = u\alpha - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad B = B(u) = \mu\beta - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}$$

und $\alpha = 2\pi\sqrt{m}$, $\beta = 2\pi\sqrt{n}$. Die Beziehung (19) kann man in der Form

$$M_\varrho(x) = \frac{2M^2}{\pi^{r+2\varrho}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b_n \bar{b}_m}{(mn)^{r/4+\varrho/2}} I_{m,n} \tag{28}$$

schreiben.

**Lemma 5.** *Es seien m und n natürliche Zahlen, m > n. Dann ist*

$$(29)\qquad I_{m,m} = \frac{2}{\pi\alpha}\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho}\cos^2 A\,du + O\left(\frac{x^{r/2+\sigma-1/2}}{\alpha^3}\right),$$

$$(30)\qquad I_{m,n} = \frac{2}{\pi\sqrt{(\alpha\beta)}}\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho}\cos A\cos B\,du + O\left(\frac{x^{r/2+\sigma-1/2}\sqrt{\alpha}}{(\alpha^2-\beta^2)\beta^{3/2}}\right),$$

*oder mit anderen Worten, gilt*

$$(31)\qquad I_{m,n} = \frac{2x^{r/2+\varrho}V(\sqrt{x})}{\pi\sqrt{(\alpha\beta)}(\alpha^2-\beta^2)} -$$

$$-\frac{2(r+2\varrho)}{\pi\sqrt{(\alpha\beta)}(\alpha^2-\beta^2)}\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho-1}V(u)\,du + O\left(\frac{x^{r/2+\sigma-1/2}\sqrt{\alpha}}{(\alpha^2-\beta^2)\beta^{3/2}}\right),$$

*wo* $V(u) = \alpha\cos B\sin A - \beta\cos A\sin B$. *Alle Abschätzungen gelten lokal gleichmässig im Gebiet* $\operatorname{Re}\varrho = \sigma \geqq 0$.

Beweis. Alle Abschätzungen-wenn dieses auch ausspriichlich beton wird-sind als lokal gleichmässige Abschätzungen für $\operatorname{Re}\varrho = \sigma \geqq 0$ zu betrachten. Bekanntlich gilt

$$J(z) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi z}\right)}\left[\cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4\nu^2-1}{8z}\sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]$$

gleichmässig für $z \in (0, +\infty)$. Wenn wir $Z = z - \frac{1}{2}\pi\nu - \frac{1}{4}\pi$, $C = \frac{1}{8}(4\nu^2 - 1)$ bezeichnen, ergibt sich daher

$$J^2(z) = \frac{2}{\pi z}\left[\cos^2 Z - \frac{2C}{z}\sin Z\cos Z + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right]$$

für hinreichend grosse $z$ und also auch gleichmässig für $z \in (0, +\infty)$, nachdem $J(z) \ll 1$ ist. Daher folgt

$$I_{m,m} = \frac{2}{\pi\alpha}\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho}\cos^2 A\,du -$$

$$-\frac{4C}{\alpha^2}\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho-1}\sin A\cos A\,du + O\left(\frac{x^{r/2+\sigma-1/2}}{\alpha^3}\right).$$

Nun aber ist

$$\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho-1}\sin 2A\,du = \left[-u^{r+2\varrho-1}\frac{\cos 2A}{2\alpha}\right]_0^{\sqrt{x}} + \frac{r+2\varrho-1}{2\alpha}\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho-2}\cos 2A\,du$$

und also ist

$$\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho-1} \sin 2A \, du \ll \frac{x^{r/2+\sigma-1/2}}{\alpha} . \tag{32}$$

Nach einer Zusammensetzung ergibt sich sofort (29).

Um (30) zu beweisen sei $\varphi(u) = \beta\, J(\alpha u)\, J'(\beta u) - \alpha\, J(\beta u)\, J'(\alpha u)$ für $u \in (0, +\infty)$. Nachdem bekanntlich Beziehung

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^t u\, J(\alpha u)\, J(\beta u)\, du = t\, \varphi(t)$$

gilt, haben wir

$$I_{m,n} = \frac{x^{r/2+\varrho+1/2}\, \varphi(\sqrt{x})}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{r + 2\varrho}{\alpha^2 - \beta^2} \int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho}\, \varphi(u)\, du .$$

Es ist aber

$$J(z) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi z}\right)} \cos\left(z - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),$$

$$J'(z) = - \sqrt{\left(\frac{2}{\pi z}\right)} \sin\left(z - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right)$$

(wieder gleichmässig für $z \in (0, +\infty)$). Es ist also

$$\varphi(u) - \frac{2}{\pi u \sqrt{(\alpha\beta)}} (\alpha \cos B \sin A - \beta \cos A \sin B) \ll \frac{\sqrt{\alpha}}{u^2 \beta^{3/2}}$$

gleichmässig für $u \in (0, +\infty)$, $m$ und $n$. Nach Einsetzung ergibt sich die beziehung (31). Nachdem

$$V'(u) = (\alpha^2 - \beta^2) \cos A \cos B$$

ist, bekommen wir so auch die Beziehung (30). Hiermit ist das Lemma vollkommen bewiesen.

Nun benutzen wir die Ergebnisse von diesem Lemma in der Beziehung (28). Wir erwägen zuerst, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n^{r/2+3/2+\tau}} \ll 1$$

für $\tau > \frac{1}{2}r - \frac{5}{2}$ im Falle I und für $\tau > -\frac{3}{2}$ im Falle II ist (soeben wie im Beweis vom Lemma 5 sind automatisch alle Abschätzungen als lokal gleichmässig für $\varrho$ in den angeführten Gebieten zu betrachten).

Ferner ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{1 \leqq n < m} \frac{|b_n b_m|}{(mn)^{r/4+\sigma/2}} \frac{\sqrt[4]{m}}{n^{3/4}(m-n)} = \sum_{m=2} \sum_{1 \leqq n \leqq m/2}^{\infty} \dots + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{m/2 < n < m} \dots = \sum_1 + \sum_2$$

(mit den gleichen Summanden). Es ist aber

$$\sum_1 \ll \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{1 \leqq n \leqq m/2} \frac{|b_n b_m|}{(mn)^{r/4+\sigma/2+3/4}} \ll \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|b_m|}{m^{r/4+\sigma/2+3/4}} \right)^2 \ll 1$$

für $\sigma > \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ im Falle I und für $\sigma \geqq 0$ im Falle II. Für $\sum_2$ ergibt sich (siehe auch [10], S. 83)

$$\sum_2 \ll \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{m/2 < n < m} \frac{|b_m|^2 + |b_n|^2}{m^{r/4-1/4+\sigma/2} n^{r/4+3/4+\sigma/2}} \frac{1}{m-n} =$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^{r/4-1/4+\sigma/2}} \sum_{m/2 < n < m} \frac{|b_n|^2}{n^{r/4+3/4+\sigma/2}} \frac{1}{m-n} +$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{m/2 < n < m} \frac{|b_m|^2}{m^{r/4-1/4+\sigma/2}} \frac{1}{n^{r/4+3/4+\sigma/2}} \frac{1}{m-n} \ll$$

$$\ll \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{m/2 < n < m} \frac{|b_n|^2}{n^{r/2+1/2+\sigma}} \frac{1}{m-n} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|b_m|^2}{m^{r/2+1/2+\sigma}} \sum_{1 \leqq n < m} \frac{1}{m-n} \ll$$

$$\ll \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n^{r/2+1/2+\sigma}} \sum_{n < m < 2n} \frac{1}{m-n} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|b_m|^2}{m^{r/2+1/2+\sigma}} \sum_{1 \leqq m < m}^{\infty} \frac{1}{m-n} \ll$$

$$\ll \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|b_m|^2 \lg m}{m^{r/2+1/2+\sigma}} \ll 1$$

wieder für $\sigma > \frac{1}{2} r - \frac{3}{2}$ im Falle I und für $\sigma \geqq 0$ im Falle II. Dadurch wurde auf dem Grund des Lemmas 1 und Lemma 5 der folgende Satz bewiesen:

**Satz 1.** *Es existiert eine Funktion $G(x, \varrho)$ mit diesen Eigenschaften:*

a) *Für jedes feste $x > c$ ist $G$ holomorph für $\operatorname{Re} \varrho > 0$ und stetig im Gebiet $\operatorname{Re} \varrho \geqq 0$ im Falle II, holomorph für $\operatorname{Re} \varrho > \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ im Falle I.*

b) *Es gilt*

$$G(x, \varrho) \ll x^{r/2+\sigma-1/2}$$

*gleichmässig für $x > c$ und zwar im Falle I lokal gleichmässig für $\operatorname{Re} \varrho = \sigma > \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ im Falle II lokal gleichmässig für $\operatorname{Re} \varrho = \sigma \geqq 0$.*

c) *Für $\operatorname{Re} \varrho > \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ gilt*

$$(33) \quad M_\varrho(x) = \frac{2M^2}{\pi^{r+2\varrho+2}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b_n \bar{b}_m}{(mn)^{r/4+1/4+\varrho/2}} \int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho} \cos A \cos B \, du + G(x, \varrho) .$$

Den soeben bewiesenen Satz kann man noch genauer machen. Offenbar ist

$$\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho} \cos^2 A \, du = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho} \, du + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho} \cos 2A \, du =$$

$$= \frac{x^{r/2+\varrho+1/2}}{2(r+2\varrho+1)} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\alpha} u^{r+2\varrho} \sin 2A\right]_0^{\sqrt{x}} - \frac{r+2\varrho}{4\alpha}\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho-1} \sin 2A \, du$$

und also ist nach (32)

$$\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho} \cos^2 A \, du = \frac{x^{r/2+\varrho+1/2}}{2(r+2\varrho+1)} + \frac{1}{4\alpha} x^{r/2+\varrho} \sin 2A(\sqrt{x}) + O\left(\frac{x^{r/2+\sigma-1/2}}{\alpha^2}\right) \tag{34}$$

für $\sigma \geqq 0$ (wieder lokal gleichmässig in diesem Gebiet, gleichmässig für $x > c$ und $m$). Für $\alpha > \beta$ (d.h. $m > n$) kann das Integral

$$\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho} \cos A \cos B \, du$$

nach dem Lemma 5 (genauer: nachdem $V'(u) = (\alpha^2 - \beta^2) \cos A \cos B$) in der Form

$$\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} x^{r/2+\varrho} V(\sqrt{x}) - \frac{r+2\varrho}{\alpha^2 - \beta^2}\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho-1} V(u) \, du$$

geschreiben werden. Offensichtlich ist aber $V(u) \ll \alpha + \beta$ und deswegen also ist

$$\int_0^{\sqrt{x}} u^{r+2\varrho} \cos A \cos B \, du \ll \frac{x^{r/2+\sigma}}{\alpha - \beta}. \tag{35}$$

Nun ist (alle Abschätzungen sind wieder lokal gleichmässig in den betrachteten Gebieten)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n^{r/2+1/2+\tau}} \ll 1$$

für $\tau > \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ im Falle I und für $\tau \geqq 0$ im Falle II. Die Reihe

$$\sum_{1 \leqq n < m} \frac{|b_n b_m|}{(mn)^{r/4+1/4+\sigma/2}} \frac{\sqrt{m} + \sqrt{n}}{m - n} = \sum\nolimits_1 \cdots + \sum\nolimits_2$$

untersuchen wir analog wie oben. Es ist

$$\sum\nolimits_1 \ll \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{1 \leqq n \leqq m/2} \frac{|b_m|}{m^{r/4+1/2+\sigma/2}} \frac{|b_n|}{n^{r/4+1/2+\sigma/2}} \ll 1$$

für $\sigma > \sigma_0$;

$$\sum_2 \ll \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{m/2<n<m} \frac{|b_m|^2 + |b_n|^2}{m^{r/4-1/4+\sigma/2} n^{r/4+1/4+\sigma/2}} \frac{1}{m-n} \ll$$

$$\ll \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|b_m|^2}{m^{r/2+\sigma}} \sum_{1\leqq n<m} \frac{1}{m-n} \ll \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|b_m|^2 \lg m}{m^{r/2+\sigma}} \ll 1$$

wieder für $\sigma > \sigma_0$. Diese Abschätzungen, die Beziehungen (34) und (35) erlauben zusammen mit dem Satz 1 die folgende Aussage:

**Satz 2.** *Die Reihe im* (33) *ist für jedes feste* $x > c$ *im Gebiet* $\operatorname{Re} \varrho = \sigma > \sigma_0$ *lokal gleichmässig konvergent und die Beziehung* (33) *gilt in diesem ganzen Gebiet, wobei die Eigenschaften der Funktion* $G$ *im Satz* 1 *festgelegt worden sind. Ferner ist*

$$M_\varrho(x) = \frac{M^2 x^{r/2+\varrho+1/2}}{\pi^{r+2\varrho+2}(r+2\varrho+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{n^{r/2+\varrho+1/2}} + O(x^{r/2+\sigma}) \tag{36}$$

*lokal gleichmässig für* $\operatorname{Re} \varrho = \sigma > \sigma_0$ *und gleichmässig für* $x > c$.

Bemerkung. Die Frage der Erweiterung der Gültigkeit dieser Beziehungen für $\operatorname{Re} \varrho > r/2 - 3/2$ im Falle I und für $\operatorname{Re} \varrho \geqq 0$ im Falle II bleibt offen.

Bemerkung. Ähnlicherweise wie in dieser Arbeit kann man zeigen, dass die bekannte Formel von Landau (siehe z.B. [9], S. 226)

$$P_\varrho(x) = \frac{x^{r/4+\varrho/2} \exp\{2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\}}{\sqrt{(D)}\, M_1 M_2 \ldots M_r \pi^\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} b_n' \frac{J(2\pi\sqrt{(\lambda_n' x)})}{\lambda_n'^{(r/4+\varrho/2)}}$$

für $\operatorname{Re} \varrho > \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ im Falle I und für $\operatorname{Re} \varrho > \frac{1}{2}$ im Falle II gilt und daher die Abschätzungen

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\sigma/2}) \quad \begin{array}{lll} \text{für} & \operatorname{Re} \varrho = \sigma > \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} & \text{im Falle I}, \\ \text{für} & \operatorname{Re} \varrho = \sigma > \frac{1}{2} & \text{im Falle II} \end{array}$$

hergeleiten werden können.

Eine Untersuchung der Differenz

$$M_\varrho(x+1) - M_\varrho(x) =$$

$$= \frac{2M^2}{\pi^{r+2\varrho}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{b_n \bar{b}_m}{(mn)^{r/4+\varrho/2}} \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} u^{r+2\varrho} \cos A \cos B \, du + O(x^{r/2+\sigma-1/2})$$

ermöglicht die Abschätzungen

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1/2} \sqrt{(\lg x)}) \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2}r - 1 < \varrho < \tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{2} \quad \text{im Falle I}$$

und

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4}\sqrt{(\lg x)}) \qquad \text{für} \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{2} \qquad \text{im Falle II}$$

zu erreichen, welche die obigen Ergebnisse vebessern.[4]) Wir bemerken noch, dass für $\varrho > \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$ im Falle I und für $\varrho > 0$ im Falle II die Abschätzung

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho/2})$$

gilt (siehe [8]).

Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, dass unser Satz auch in dem Falle gilt, wenn die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ irrational sind: Wenn

$$\sum_{n \leqq x} |b'_n|^2 \ll x^\gamma$$

dann es genügt in den Sätzen 1 und 2 $\gamma - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ und $\gamma - \frac{1}{2}r$ zu setzen.

*Literaturverzeichnis*


[1] *V. Jarník:* Bemerkungen zu Landauschen Methoden in der Gitterpunktlehre, Abhandlungen aus Zahlentheorie un Analysis. Zur Erinnerung an E. Landau, VEB Berlin 1968.

[2] *E. Landau:* Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre, VEB Berlin, 1962.

[3] *B. Novák:* On lattice points with weight in high-dimensional ellipsoids, Acta Arithmetica *XIV* (1968), 371—397.

[4] *B. Novák:* Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre I, Czech. Math. Journal *94* (1969), 154 — 180.

[5] *B. Novák:* Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre II, Časopis pro pěst. mat. *96* (1971), 245 — 262.

[6] *B. Novák:* Mean value theorems in the theory of lattice points with weight II, Comment. Math. Univ. Carolinae *11* (1970), 53—81.

[7] *B. Novák:* Über eine Methode der $\Omega$-Abschätzungen, Czech. Math. Journal *96* (1971), 257—279.

[8] *B. Novák:* Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Czech. Math. Journal *97* (1972), 495—507.

[9] *B. Novák:* A remark on the theory of lattice points in ellipsoids, Comment. Math. Univ. Carolinae *8* (1967), 219—230.

[10] *A. Walfisz:* Über die Koeffizientensummen einiger Modulformen, Math. Annalen *108* (1933), 75—90.



*Anschrift des Verfassers:* 186 00 Praha 8, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta UK).


[4]) Für $\varrho = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ bzw. $\varrho = \frac{1}{2}$ ist die Abschätzung um $\sqrt{(\lg x)}$ schwächer.