Ekkehard Krätzel

Mittlere Darstellungen natürlicher Zahlen als Summe von n k-ten Potenzen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), No. 1, 57–73

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101146

Czechoslovak Mathematical Journal, 23 (98) 1973, Praha

MITTLERE DARSTELLUNGEN NATÜRLICHER ZAHLEN ALS SUMME VON n k-TEN POTENZEN

EKKEHARD KRÄTZEL, Jena

(Eingelangt am 10. Januar 1972)

1. PROBLEMSTELLUNG

Anliegen dieser Arbeit ist die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von

$$R_{k,n}(x) = 2^n \sum_{a_1{}^k + \ldots + a_n{}^k \leqq x}' 1$$

für große x, wobei $k \geqq 2$, $n \geqq 3$ natürliche Zahlen bedeuten. Summiert wird über alle nicht-negativen ganzen Zahlen a_i, und der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß jedes Glied mit $a_i = 0$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ belegt wird. VON RANDOL [3] wurde unter der Einschränkung $k \equiv 0 \pmod{2}$

$$R_{k,n}(x) = V_{k,n} x^{n/k} + \begin{cases} O\left(x^{(n-1)(k-1)/k^2}\right) & \text{für} \quad k \geqq n + 1 \\ O\left(x^{n(n-1)/k(n+1)}\right) & \text{für} \quad k \leqq n\,, \end{cases}$$

$$V_{k,n} = \frac{2^n \Gamma^n\left(\frac{1}{k}\right)}{k^n \Gamma\left(\frac{n}{k} + 1\right)} \tag{1}$$

bewiesen. In dieser Arbeit wird sich zeigen, daß dieses Ergebnis für alle $k \geqq 2$ richtig ist, wobei allerdings die Abschätzung für $k \leqq n$ um einen logarithmischen Faktor schwächer ist. Randol stellte fernerhin fest, daß die Abschätzung im Falle $k > n + 1$ nicht mehr zu verbessern ist. Ich werde zeigen, daß dann der Rest in erster Näherung durch eine Funktion von genau der genannten Größenordnung dargestellt werden kann. Diese Funktion ist gegeben durch eine unendliche Reihe über verallgemeinerte Bessel-Funktionen, welche für $k = 1, 2, \ldots$; $\operatorname{Re}(\nu) > 1/k - 1$ durch

$$J_\nu^{(k)}(x) = \frac{2}{\sqrt{(\pi)}\, \Gamma\left(\nu + 1 - \frac{1}{k}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k\nu/2} \int_0^1 (1 - t^k)^{\nu - 1/k} \cos xt \, \mathrm{d}t$$

definiert sind. Bildet man für $\mathrm{Re}(\nu) > 1/k - 1$

$$(2) \qquad \psi_\nu^{(k)}(x) = 2\sqrt{(\pi)}\,\Gamma\left(\nu + 1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi m}\right)^{k\nu/2} J_\nu^{(k)}(2\pi m x)\,,$$

so ist nach [1]

$$(3) \qquad \psi_{n/k}^{(k)}(x^{1/k}) = O(x^{(n-1)(k-1)/k^2})\,.$$

Hier soll nun der folgende Satz bewiesen werden:

Satz. *Mit den Bezeichungen* (1) *und* (2) *und mit natürlichen Zahlen* $n \geqq 3$, $k \geqq 2$ *ist*

$$(4) \qquad R_{k,n}(x) = V_{k,n}x^{n/k} + nV_{k,n-1}\psi_{n/k}^{(k)}(x^{1/k}) + O(x^{[(3n-4)k-5n+8]/3k(k-1)}\log^2 x)$$

für $k \geqq n + 2$ *und*

$$(5) \qquad R_{k,n}(x) = V_{k,n}x^{n/k} + O(x^{n(n-1)/k(n+1)}\log x)$$

für $k \leqq n + 1$.

Bemerkungen: 1. Die Entwicklungen (4) und (5) sind auch für $n = 2$ richtig. Dieser Fall wurde schon in [2] mit einem etwas besseren Restglied erledigt.

2. Für $k = 2$ ist (5) wohlbekannt und schwächer als die bereits vorliegenden Abschätzungen. Viele der umfangreichen folgenden Rechnungen könnten eingespart werden, wollte man für $k = 2$ nur (5) beweisen. Daher sind die nachstehenden Untersuchungen auf $k \geqq 3$ zugeschnitten, wobei aber der Fall $k = 2$ nicht ausgeschlossen werden muß.

3. Wegen der voluminösen Formeln benutze ich ständig die folgenden abkürzenden Bezeichnungen:

$$A_\nu = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_\nu^k\,,$$
$$B_\nu = b_1^{k/(k-1)} + b_2^{k/(k-1)} + \ldots + b_\nu^{k/(k-1)}\,,$$
$$e(z) = e^{2\pi i z}\,.$$

Mit $\mathrm{SB}(\sum_i)$ sollen die Summationsbedingungen der Summe $\sum_i$ angegeben werden. So wird zum Beispiel statt

$$F(x) = \sum_{a \leqq n \leqq x} f(n)$$

stets

$$F(x) = \sum f(n)\,, \quad \mathrm{SB}\left(\sum\right) : a \leqq n \leqq x$$

und analog bei mehrfachen Summen geschrieben. Ganz entsprechend werden mit $\mathrm{IB}(\int_i)$ die Integrationsbedingungen des Integrals $\int_i$ bezeichnet. Es kommen auch mehrfache Integrale über mehrfache Summen vor. Dabei werden die Integrationsbedingungen nicht gesondert angegeben, da sie aus den Summationsbedingungen ersichtlich sein werden. Ein Strich am Summenzeichen bedeutet, daß die

Glieder, bei denen ein Summationsbuchstabe gleich 0 wird, mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ belegt werden. Ein zweiter Strich am Summenzeichen bedeutet, daß die Glieder, bei denen zwei Summationsbuchstaben einander gleich werden, ebenfalls mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ belegt werden.

2. VORBEREITUNG DER ABSCHÄTZUNG

Hilfssatz 1. *Mit den Bezeichnungen von* §1 *und mit* $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ *gilt für* $n \geqq 3$, $k \geqq 2$

$$R_{k,n}(x) = V_{k,n}x^{n/k} + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}), \tag{6}$$

$$\Delta_{k,n}(x) = -2^n\, n! \sum \psi((x - A_{n-1})^{1/k}), \tag{7}$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum) : 0 \leqq a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq \dfrac{x - A_{n-2}}{2}.$$

Beweis. Mit den in §1 getroffenen Vereinbarungen ist

$$R_{k,n}(x) = 2^n \sum_{A_n \leqq x}' 1 = 2^n\, n! \textstyle\sum_1'' 1 + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_1) : A_n \leqq x, \quad 0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n.$$

Führt man die Summation über a_n aus, so wird

$$R_{k,n}(x) = 2^n\, n! \textstyle\sum_2''\{[(x - A_{n-1})^{1/k}] + \frac{1}{2} - a_{n-1}\} + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_2) : 0 \leqq a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq \dfrac{x - A_{n-2}}{2}$$

und mit der Bezeichnung (7)

$$R_{k,n}(x) = 2^n\, n! \int \textstyle\sum_3'' 1 \,\mathrm{d}t_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_3) : A_{n-1} + t_n^k \leqq x, \quad 0 \leqq a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq t_n^k.$$

Bei Ausführung der Summation über a_{n-1} erhält man

$$R_{k,n}(x) = 2^n\, n! \int \textstyle\sum_4''\{[(x - A_{n-2} - t_n^k)^{1/k}] + \frac{1}{2} - a_{n-2}\}\,\mathrm{d}t_n +$$

$$+ 2^n\, n! \int \textstyle\sum_5''\{[t_n] + \frac{1}{2} - a_{n-2}\}\,\mathrm{d}t_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_4) : 0 \leqq a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-2}^k, \quad \dfrac{x - A_{n-2}}{2} < t_n^k \leqq x - A_{n-2} - a_{n-2}^k,$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_5) : 0 \leqq a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-2}^k \leqq t_n^k \leqq \dfrac{x - A_{n-2}}{2}.$$

Führt man wieder die Funktion $\psi(y)$ an Stelle von $[y]$ ein, so ergibt sich

$$R_{k,n}(x) = 2^n\, n! \iint \sum\nolimits_6'' 1\, \mathrm{d}t_{n-1}\, \mathrm{d}t_n - 2^n\, n! \int \sum\nolimits_4'' \psi((x - A_{n-2} - t_n^k)^{1/k}) -$$

$$- 2^n\, n! \int \sum\nolimits_5'' \psi(t_n)\, \mathrm{d}t_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\mathrm{SB}\left(\sum\nolimits_6\right) : A_{n-2} + t_{n-1}^k + t_n^k \leqq x\,, \quad 0 \leqq a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-2}^k \leqq t_{n-1}^k \leqq t_n^k\,.$$

Das Integral über $\psi(y)$ liefert die Fourier-Entwicklung des zweiten Bernoullischen Polynoms und somit eine bezüglich x beschränkte Funktion. Führt man das Integral über $\sum_5$ aus bzw. integriert man über $\sum_4$ partiell, so verbleibt eine Summe über $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$, die folglich einen Größenordnungsanteil von $x^{(n-2)/k}$ liefert. Daher ist

$$R_{k,n}(x) = 2^n\, n! \iint \sum\nolimits_6'' 1\, \mathrm{d}t_{n-1}\, \mathrm{d}t_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k})\,.$$

Analog wird weiter verfahren, so daß man vor dem letzten Schritt

$$R_{k,n}(x) = 2^n\, n! \int \ldots \int \sum\nolimits_7' 1\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_3 \ldots \mathrm{d}t_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\mathrm{SB}\left(\sum\nolimits_7\right) : a_1^k + t_2^k + t_3^k + \ldots + t_n^k \leqq x\,, \quad 0 \leqq a_1 \leqq t_2 \leqq t_3 \leqq \ldots \leqq t_n$$

erhält. Nach Summation über a_1 ergibt sich

$$R_{k,n}(x) = 2^n\, n! \int \ldots \int_1 [(x - t_2^k - t_3^k - \ldots - t_n^k)^{1/k}]\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_3 \ldots \mathrm{d}t_n +$$

$$+ 2^n\, n! \int \ldots \int_2 [t_2]\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_3 \ldots \mathrm{d}t_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\mathrm{IB}\left(\int \ldots \int_1\right) : t_2^k + t_3^k + \ldots + t_n^k \leqq x\,, \quad \frac{x - t_3^k - t_4^k - \ldots - t_n^k}{2} < t_2^k \leqq t_3^k \leqq \ldots \leqq t_n^k,$$

$$\mathrm{IB}\left(\int \ldots \int_2\right) : t_2^k \leqq \frac{x - t_3^k - t_4^k - \ldots - t_n^k}{2}, \quad 0 \leqq t_2 \leqq t_3 \leqq \ldots \leqq t_n\,;$$

$$R_{k,n}(x) = 2^n\, n! \int \ldots \int_3 \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\mathrm{IB}\left(\int \ldots \int_3\right) : t_1^k + t_2^k + \ldots + t_n^k \leqq x\,, \quad 0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots \leqq t_n\,;$$

$$R_{k,n}(x) = V_{k,n} x^{n/k} + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k})\,.$$

Zur Abschätzung des Restgliedes (7) wird es erforderlich, die auftretende Summe zu zerlegen. Mit $x^{1-1/k} \leqq y < x/n$ wird gesetzt:

$$\Delta_{k,n}(x) = \Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) + \Delta_{k,n}^{(2)}(x, y),$$

(8) $$\Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) = -2^n n! \sum\nolimits_1 \psi((x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$\mathrm{SB}\left(\sum\nolimits_1\right) : y < a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq \frac{x - A_{n-2}}{2},$$

(9) $$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n n! \sum\nolimits_2 \psi((x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$\mathrm{SB}\left(\sum\nolimits_2\right) : 0 \leqq a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq \frac{x - A_{n-2}}{2}, \quad a_1^k \leqq y.$$

3. ABSCHÄTZUNG VON $\Delta_{k,n}^{(1)}(x, y)$

Die Abschätzung wird mit der van der Corput-Vinogradovschen Methode vorgenommen. Dazu benötige ich die folgenden Lemmata von Vinogradov [4]:

Lemma 1. *Es durchlaufe n eine Menge G von natürlichen Zahlen unter der Voraussetzung*

$$\sum_{n \in G} 1 < \infty.$$

Es sei $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. Dann gilt mit geeignetem $s > s_0$

$$\sum_{n \in G} \psi(f(n)) = O\left(\xi^{-1} \sum_{n \in G} 1\right) + O\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{\nu}, \frac{\xi^s}{\nu^{s+1}}\right) \left|\sum_{n \in G} e^{2\pi i \nu f(n)}\right|\right).$$

Lemma 2. *Es werde vorausgesetzt:*

(A) $0 < b - a \ll U$, $1/A \ll f''(x) \ll 1/A (a < x \leqq b)$, $1 \ll A \ll U^2$, $H > 0$,

(B) $\varphi(x) \ll H$, $\varphi(x)$ *stückweise monoton.*

Dann gilt

$$\sum_{a < n \leqq b} \varphi(n) e^{\pi i f(n)} = O\left(\frac{HU}{\sqrt{A}}\right) + O(H\sqrt{A}) + O(H \log(U + 1)).$$

Lemma 3. *Es sei die Voraussetzung* (A) *von Lemma 2 erfüllt. Ferner gelte*:

(C) $f'''(x) \ll 1/AU$ *für* $a < x \leqq b$,

(D) $H \ll \varphi(x) \ll H$, $\varphi'(x) \ll H/U$, $\varphi''(x) \ll H/U$ *für* $a < x \leqq b$.

Mit den Bezeichnungen

$$f'(t_n) = n\,,$$

$$T_q = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad f'(q) \equiv 0 \quad (1) \\ \min\left(\sqrt{A}, \dfrac{1}{|f'(q) - [f'(q)]|}\right) & \textit{für} \quad f'(q) \not\equiv 0 \quad (1) \end{cases}$$

gilt dann

$$\sum_{a<n\leqq b} \varphi(n)\, e^{2\pi i f(n)} = e^{\pi i/4} \sum_{f'(a)\leqq n\leqq f'(b)}{}' \frac{\varphi(t_n)}{\sqrt{[f''(t_n)]}}\, e^{2\pi i(f(t_n)-nt_n)} +$$

$$+\, O(HT_a) + O(HT_b) + O(H\log(U+1))\,,$$

wobei die möglichen Glieder $n = f'(a), f'(b)$ in der Summe den Faktor $\frac{1}{2}$ erhalten.

Hilfssatz 2. *Mit $x^{1-1/k} \leqq y < x/n$ ist*

$$(10) \qquad \Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) = \begin{cases} O(x^{n(n-1)/k(n+1)}\log x) + O(y^{(n-1)/k-1}x^{1-1/k}\log^2 x) & \text{für } k \geqq n \\ O(x^{n(n-1)/k(n+1)}\log x) & \text{für } k < n\,. \end{cases}$$

Beweis. Nach (8) und Lemma 1 ist

$$\Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) = O(x^{(n-1)/k}\xi^{-1}) + O\left(\sum_{b_1=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{b_1}, \frac{\xi^s}{b_1^{s+1}}\right) |S_{k,n}(x, y)|\right),$$

$$(11) \qquad S_{k,n}(x, y) = \sum\nolimits_1 e(-b_1(x - A_{n-1})^{1/k})\,,$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_1) : y < a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq \dfrac{x - A_{n-2}}{2}\,.$$

Für $\xi^k \leqq x < b_1^k$ wird $S_{k,n}(x, y)$ trivial zu

$$S_{k,n}(x, y) = O(x^{(n-1)/k})$$

abgeschätzt. Dann ist mit $s > 0$ und $\xi^k \leqq x$

$$(12) \qquad \Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) = O(x^{(n-1)/k}\xi^{-1}) + O(x^{(n-1)/k}(\xi x^{-1/k})^s) +$$

$$+\, O\left(\sum_{b_1^k \leqq x} \min\left(\frac{1}{b_1}, \frac{\xi^s}{b_1^{s+1}}\right) |S_{k,n}(x, y)|\right).$$

Die Abschätzung der Summe (11) und damit von (12) erfolgt in zwei Hauptschritten. Der erste Hauptschritt wird mit Hilfe von Lemma 3 durchgeführt, der zweite Hauptschritt zerfällt in $n - 2$ gleichartige Teilschritte in einer vereinfachten Anwendung von Lemma 3.

1. Hauptschritt:

$$S_{k,n}(x, y) = \sum_2 \sum_3 e(-b_1(x - A_{n-2} - a_{n-1}^k)^{1/k}) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_2) : y < a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-2}^k \leqq \dfrac{x - A_{n-3}}{3},$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_3) : a_{n-2}^k < a_{n-1}^k \leqq \dfrac{x - A_{n-2}}{2}.$$

$$(13)\quad S_{k,n}(x, y) = \sum_2 \{\sum_4 \sum_5 + \sum_6\}\, e(-b_1(x - A_{n-2} - a_{n-1}^k)^{1/k}) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_4) : 2^k \leqq 2^{\nu k} \leqq \dfrac{x - A_{n-2}}{2a_{n-2}^k},$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_5) : 2^{\nu-1} a_{n-2} < a_{n-1} \leqq 2^\nu a_{n-2},$$

$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_6) : 2^N a_{n-2} < a_{n-1} \leqq \left(\dfrac{x - A_{n-2}}{2}\right)^{1/k},$$

$$N = \left[\frac{1}{\log 2} \log \frac{\left(\dfrac{x - A_{n-2}}{2}\right)^{1/k}}{a_{n-2}}\right].$$

Die Summen $\sum_5$ und $\sum_6$ werden jetzt unter Benutzung von Lemma 3 abgeschätzt. Das kann in der gleichen Rechnung geschehen. Mit den Bezeichnungen von Lemma 3 werden die Voraussetzungen (A) und (C) zunächst überprüft: In $\sum_5$ ist

$$b - a = 2^{\nu-1} a_{n-2}$$

und in $\sum_6$

$$b - a \leqq 2^N a_{n-2},$$

so daß man mit $\nu \leqq N + 1$

$$2^{\nu-1} a_{n-2} = U$$

setzen kann. Ferner ist

$$\begin{aligned}
f(t) &= -b_1(x - A_{n-2} - t^k)^{1/k}, \\
f'(t) &= b_1 t^{k-1}(x - A_{n-2} - t^k)^{1/k-2}, \\
f''(t) &= b_1(k-1)(x - A_{n-2})\, t^{k-2}(x - A_{n-2} - t^k)^{1/k-2}, \\
f'''(t) &= b_1(k-1)(x - A_{n-2})\, t^{k-3}(x - A_{n-2} - t^k)^{1/k-3}\,. \\
&\ .\{(k-2)(x - A_{n-2}) + (k+1)\, t^k\}.
\end{aligned}$$

Aus

$$f''(t) = O(b_1 x^{1/k-1}(2^\nu a_{n-2})^{k-2})$$

folgt, daß man

$$A = \frac{1}{b_1} x^{1-1/k}(2^\nu a_{n-2})^{2-k}$$

setzen kann. Wegen $b_1^k \leqq x$ ist $A \gg 1$, und wegen $2^{\nu k} a_{n-2}^k \geqq a_1^k > y \geqq x^{1-1/k}$ ist $A \ll U^2$. Damit ist die Voraussetzung (A) erfüllt. Auch die Voraussetzung (C) ist erfüllt, da

$$f'''(t) \ll b_1 x^{1/k-1}(2^\nu a_{n-2})^{k-3} = \frac{1}{AU}.$$

In Lemma 3 ist $\varphi(t) \equiv 1$, $H = 1$. Aus $f'(t_{b_2}) = b_2$ errechnet sich t_{b_2} zu

$$t_{b_2} = b_2^{1/(k-1)} B_2^{-1/k}(x - A_{n-2})^{1/k}.$$

Damit ist

$$f(t_{b_2}) - b_2 t_{b_2} = -B_2^{1-1/k}(x - A_{n-2})^{1/k},$$
$$f''(t_{b_2}) = (k-1)\, b_1^{-2}(b_1 b_2)^{(k-2)/(k-1)}\, B_2^{1+1/k}(x - A_{n-2})^{-1/k}.$$

Für die Summationsgrenzen benötigt man

$$f'(2^\nu a_{n-2}) = b_1(2^\nu a_{n-2})^{k-1}\,(x - A_{n-2} - 2^{\nu k} a_{n-2}^k)^{1/k-1}.$$

Die in Lemma 3 vorkommende Größe T_q mit $q = 2^\nu a_{n-2}$ ist durch

$$(14)\quad T_q = R_\nu = \min\left\{\frac{1}{\sqrt{b_1}} x^{1/2-1/2k}(2^\nu a_{n-2})^{1-k/2},\ \frac{1}{|f'(2^\nu a_{n-2}) - [f'(2^\nu a_{n-2})]|}\right\}$$

gegeben.

In Anwendung von Lemma 3 stellt sich schließlich (13) in folgender Gestalt dar:

$$(15)\quad S_{k,n}(x, y) = \frac{e^{\pi i/4} b_1}{\sqrt{(k-1)}} \sum\nolimits_2 \sum\nolimits_7' (b_1 b_2)^{(2-k)/2(k-1)}\, B_2^{-1/2-1/2k}(x - A_{n-2})^{1/2k}\,.$$
$$\cdot\, e(-B_2^{1-1/k}(x - A_{n-2})^{1/k}) + \sum\nolimits_8 \sum\nolimits_9 O(R_\nu) + O(x^{(n-2)/k} \log^2 x),$$
$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_7) : b_1 a_{n-2}^{k-1}(x - A_{n-2} - a_{n-2}^k)^{1/k-1} \leqq b_2 \leqq b_1,$$
$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_8) : 2 \leqq 2^\nu \ll \left(\frac{x}{y}\right)^{1/k},$$
$$\mathrm{SB}\,(\textstyle\sum_9) : y < a_1^k < a_2^k < \ldots < a_{n-2}^k \leqq \frac{x - A_{n-3}}{2^{(\nu+1)k} + 1}.$$

Zur Abschätzung der noch verbleibenden Summe über $O(R_\nu)$ kann man zunächst die Summe

$$\textstyle\sum_{10} O(R_\nu), \quad \mathrm{SB}(\sum_{10}) : a_{n-3}^k < a_{n-2}^k \leqq \dfrac{x - A_{n-3}}{2^{(\nu+1)k} + 1}$$

in $O(b_1)$ Teilsummen zerlegen, wobei in jeder Teilsumme

$$a_{n-3} \leqq m < g(t) \leqq m + 1\,,$$
$$g(t) = b_1(2^\nu t)^{k-1}\,(x - A_{n-3} - (2^{\nu k} + 1)\,t^k)^{1/k-1}$$

ist. Jede derartige Teilsumme ist nach (14)

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}\,x^{1/2-1/2k}(2^\nu a_{n-3})^{1-k/2}\right) + O\left(\frac{1}{b_1}\sum y^{-1} g'^{-1}(a_{n-3})\right),$$

wobei in der Summe y von 1 bis $O(g'^{-1}(a_{n-3}))$ läuft, und daher

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}}\,x^{1/2-1/2k}(2^\nu a_{n-3})^{1-k/2}\right) + O\left(\frac{1}{b_1}\left(\frac{x}{2^{\nu k}}\right)^{1-1/k} a_{n-3}^{2-k}\log x\right).$$

Folglich ist

$$\sum_8\sum_9 O(R_\nu) =$$
$$= \sum_8\sum_{11}\left\{O(\sqrt{(b_1)}\,x^{1/2-1/2k}(2^\nu a_{n-3})^{1-k/2}) + O\left(\left(\frac{x}{2^{\nu k}}\right)^{1-1/k} a_{n-3}^{2-k}\log x\right)\right\},$$
$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_{11}) : y < a_1^k < a_2^k < \ldots < a_{n-3}^k \ll x$$

und

$$\sum_8\sum_9 O(R_\nu) = \sum_{11}\{O(\sqrt{(b_1)}\,x^{1/2-1/2k} a_{n-3}^{1-k/2}\log x) + O(x^{1-1/k} a_{n-3}^{2-k}\log x)\}\,.$$

Wegen $b_1^k \leqq x$, $a_{n-3}^k \ll x$ ist

$$\sum_8\sum_9 O(R_\nu) = \sum_{11} O(x^{1-1/k} a_{n-3}^{2-k}\log x) =$$
$$= \begin{cases} O(y^{(n-1)/k-1} x^{1-1/k}\log x) & \text{für } k \geqq n \\ O(x^{(n-2)/k}\log^2 x) & \text{für } k < n\,. \end{cases}$$

Hiermit ergibt sich für (15)

$$(16)\quad S_{k,n}(x, y) = \frac{e^{\pi i/4} b_1}{\sqrt{(k-1)}} \sum_2\sum_7'(b_1 b_2)^{(2-k)/2(k-1)}\, B_2^{-1/2-1/2k}(x - A_{n-2})^{1/2k}\,.$$
$$.\,e(-B_2^{1-1/k}(x - A_{n-2})^{1/k}) + \begin{cases} O(y^{(n-1)/k-1} x^{1-1/k}\log x) & \text{für } k \geqq n \\ O(x^{(n-2)/k}\log^2 x) & \text{für } k < n\,. \end{cases}$$

2. Hauptschritt:

Wie schon erwähnt, zerfällt der zweite Hauptschritt in $n - 2$ Teilschritte gleicher Art. Wieder kommt Lemma 3 in Anwendung, aber gegenüber dem ersten Hauptschritt in vereinfachter Form. Es erübrigt sich, die in Rede stehende Summe noch in Teilsummen aufzuspalten, und für T_q wird die einfache Abschätzung $T_q = O(\sqrt{A})$

benutzt. Bei einem solchen Teilschritt hat man von folgender Entwicklung auszugehen:

$$S_{k,n}(x, y) = \frac{e^{\pi i(\nu-1)/4} b_1}{(k-1)^{(\nu-1)/2}} \sum\nolimits_{12} \sum\nolimits'_{13} (b_1 b_2 \ldots b_\nu)^{(2-k)/2(k-1)} \,. \tag{17}$$

$$. \, B_\nu^{-1/2-(\nu-1)/2k} \,.\, (x - A_{n-\nu})^{(\nu-1)/2k} \, e\left(-B_\nu^{1-1/k}(x - A_{n-\nu})^{1/k}\right) +$$

$$+ \begin{cases} O\left(y^{(n-1)/k-1} x^{1-1/k} \log x\right) & \text{für} \quad k \geqq n \\ O\left(x^{(n-2)/k} \log^2 x\right) & \text{für} \quad k < n \,, \end{cases}$$

$\nu = 2, 3, \ldots, n-1, n,$

$$\mathrm{SB}\left(\sum\nolimits_{12}\right) : y < a_1^k < a_2^k < \ldots < a_{n-\nu}^k \leqq \frac{x - A_{n-\nu-1}}{\nu + 1} \,,$$

$$\mathrm{SB}\left(\sum\nolimits_{13}\right) : B_{\nu-1}^{1-1/k} a_{n-\nu}^{k-1} (x - A_{n-\nu} - a_{n-\nu}^k)^{1/k-1} \leqq b_\nu \leqq b_{\nu-1} \leqq \ldots \leqq b_1 \,.$$

Für $\nu = n$ entfällt $\sum_{12}$, und es ist $A_0 = 0$, $a_0^k = y$ zu setzen. Für $\nu = 2$ ist (16) in (17) enthalten. Nun kann (17) für beliebige ν durch Induktion bestätigt werden. Zunächst wird in der Summe $\sum_{12}$ die Summe über $a_{n-\nu}$ abgespalten und mit der Summe $\sum_{13}$ vertauscht:

$$S_{k,n}(x, y) = \frac{e^{\pi i(\nu-1)/4} b_1}{(k-1)^{(\nu-1)/2}} \sum\nolimits_{14} \sum\nolimits'_{15} (b_1 b_2 \ldots b_\nu)^{(2-k)/2(k-1)} \,.\, B_\nu^{-1/2-(\nu-1)/2k} \,. \tag{18}$$

$$. \sum\nolimits_{16} (x - A_{n-\nu-1} - a_{n-\nu}^k)^{(\nu-1)/2k} \, e\left(-B_\nu^{1-1/k}(x - A_{n-\nu-1} - a_{n-\nu}^k)^{1/k}\right) +$$

$$+ \begin{cases} O\left(y^{(n-1)/k-1} x^{1-1/k} \log x\right) & \text{für} \quad k \geqq n \\ O\left(x^{(n-2)/k} \log^2 x\right) & \text{für} \quad k < n \,, \end{cases}$$

$$\mathrm{SB}\left(\sum\nolimits_{14}\right) : y < a_1^k < a_2^k < \ldots < a_{n-\nu-1}^k < \frac{x - A_{n-\nu-2}}{\nu + 2} \,,$$

$$\mathrm{SB}\left(\sum\nolimits_{15}\right) : B_{\nu-1}^{1-1/k} a_{n-\nu-1}^{k-1} (x - A_{n-\nu-1} - 2a_{n-\nu-1}^k)^{1/k-1} \leqq b_\nu \leqq b_{\nu-1} \leqq \ldots \leqq b_1 \,,$$

$$\mathrm{SB}\left(\sum\nolimits_{16}\right) : a_{n-\nu-1}^k < a_{n-\nu}^k \leqq \frac{b_\nu^{k/(k-1)}(x - A_{n-\nu-1})}{B_\nu + b_\nu^{k/(k-1)}} \,.$$

Jetzt wird auf $\sum_{16}$ Lemma 3 angewandt. In der Bezeichnungsweise von Lemma 3 ist hier:

$$f(t) = -B_\nu^{1-1/k}(x - A_{n-\nu-1} - t^k)^{1/k} \,, \quad \varphi(t) = (x - A_{n-\nu-1} - t^k)^{(\nu-1)/2k} \,,$$

$$A = B_\nu^{1/k-1}(x - A_{n-\nu-1})^{1/k} \,, \quad U = (x - A_{n-\nu-1})^{1/k} \,, \quad H = (x - A_{n-\nu-1})^{1/2k} \,.$$

Aus $f'(t_{b_{\nu+1}}) = b_{\nu+1}$ folgt

$$t_{b_{\nu+1}} = b_{\nu+1}^{1/(k-1)} B_{\nu+1}^{-1/k} (x - A_{n-\nu-1})^{1/k} \,,$$

$$f(t_{b_{\nu+1}}) - b_{\nu+1}t_{b_{\nu+1}} = -B_{\nu+1}^{1-1/k}(x - A_{n-\nu-1})^{1/k},$$
$$f''(t_{b_{\nu+1}}) = (k-1)\, b_{\nu+1}^{(k-2)/(k-1)} B_\nu^{-1} B_{\nu+1}^{1+1/k}(x - A_{n-\nu-1})^{-1/k},$$
$$\varphi(t_{b_{\nu+1}}) = B_\nu^{(\nu-1)/2k} B_{\nu+1}^{-(\nu-1)/2k}(x - A_{n-\nu-1})^{(\nu-1)/2k}.$$

Die Summationsgrenzen bestimmen sich zu

$$f'(a_{n-\nu-1}) = B_\nu^{1-1/k} a_{n-\nu-1}^{k-1}(x - A_{n-\nu-1} - a_{n-\nu-1}^k)^{1/k-1},$$
$$f'\left(\frac{b_\nu^{k/(k-1)}(x - A_{n-\nu-1})}{B_\nu + b_\nu^{k/(k-1)}}\right) = b_\nu.$$

Lemma 3 liefert jetzt sofort (17) mit $\nu + 1$ statt ν.

Abschließend wird die für $\nu = n$ in (17) noch verbleibende Summe trivial abgeschätzt:

$$S_{k,n}(x, y) = O(x^{(n-1)/2k} b_1^{(n-1)/2}) + \begin{cases} O(y^{(n-1)/k-1} x^{1-1/k} \log x) & \text{für } k \geqq n \\ O(x^{(n-2)/k} \log^2 x) & \text{für } k < n. \end{cases}$$

Durch Einsetzen in (12) mit $s = (n-1)/2$ wird

$$\Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) = O(x^{(n-1)/k}\xi^{-1}) + O(x^{(n-1)/k}\xi^{(n-1)/2} \log x) + \\ + \begin{cases} O(y^{(n-1)/k-1} x^{1-1/k} \log x) & \text{für } k \geqq n \\ O(x^{(n-2)/k} \log^2 x) & \text{für } k < n. \end{cases}$$

Mit $\xi = x^{(n-1)/k(n+1)}$ folgt daraus die Behauptung (10) des Hilfssatzes 2.

4. ABSCHÄTZUNG VON $\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y)$

Die Abschätzung von $\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y)$ beruht auf Hilfssatz 1, der Formel

$$\int_0^x (x-t)^{\mu-1}\, \psi_\nu^{(k)}(t^{1/k})\, dt = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\nu + 1 - \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\mu + \nu + 1 - \frac{1}{k}\right)}\, \psi_{\nu+\mu}^{(k)}(x^{1/k}) \tag{19}$$

für $\operatorname{Re}(\mu) > 0$, $\operatorname{Re}(\nu) > 1/k - 1$ (Hilfssatz 3 aus [1]) und dem folgenden Lemma.

Lemma 4. *Für die Funktion $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ und die durch (2) definierten Funktionen $\psi_\nu^{(k)}(x)$ gilt für $y \leqq \frac{1}{2}x$*

$$\sum_{n^k \leqq y}{}' \psi((x - n^k)^{1/k}) = -\tfrac{1}{2}\psi_{2/k}^{(k)}(x^{1/k}) + \sum_{x-y<n^k\leqq x} \psi((x-n^k)^{1/k}) + O\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right), \tag{20}$$

$$(21)\qquad \sum_{n^k \leqq y}' \psi_{\nu/k}^{(k)}((x-n^k)^{1/k}) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-1}{k}+1\right)}{k\,\Gamma\left(\frac{\nu}{k}+1\right)}\psi_{(\nu+1)/k}^{(k)}(x^{1/k}) +$$

$$+ \sum_{x-y<n^k\leqq x} \psi_{\nu/k}^{(k)}((x-n^k)^{1/k}) + O\left(x^{(\nu-1)/k}\left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right)(\nu > 1)\,.$$

Bemerkung. Die Funktion $-\frac{1}{2}\psi_{1/k}^{(k)}(x)$ stellt die Fourier-Entwicklung von $\psi(x)$ dar; so daß für nicht-ganzzahliges x die Entwicklung (20) mit $\nu = 1$ in (21) enthalten ist.

Folgerung aus Lemma 4. *Schätzt man die in* (20) *und* (21) *noch rechts vorkommenden Summen mit Hilfe von* (3) *ab, so gilt für* $x^{1-1/k} \leqq y \leqq \frac{1}{2}x$

$$(22)\qquad \sum_{n^k \leqq y}' \psi((x-n^k)^{1/k}) = -\tfrac{1}{2}\psi_{2/k}^{(k)}(x^{1/k}) + O(x^{1/k-1}y) + O\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right),$$

$$(23)\qquad \sum_{n^k \leqq y}' \psi_{\nu/k}^{(k)}((x-n^k)^{1/k}) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-1}{k}+1\right)}{k\,\Gamma\left(\frac{\nu}{k}+1\right)}\psi_{(\nu+1)/k}^{(k)}(x^{1/k}) +$$

$$+ O(x^{(\nu-1)/k(1-1/k)+1/k-1}y) + O\left(x^{(\nu-1)/k}\left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right).$$

Beweis von (20). Nach der Euler-Maclaurinschen Summenformel ist

$$\sum_{n^k \leqq y}' \psi((x-n^k)^{1/k}) = -\sum\nolimits_1' 1 + \int_0^{y^{1/k}} (x-t^k)^{1/k}\,\mathrm{d}t - (x-y)^{1/k}\,\psi(y^{1/k}) -$$

$$- \int_0^{y^{1/k}} (x-t^k)^{1/k-1}\,t^{k-1}\,\psi(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_1) : n^k + m^k \leqq x\,;\quad n, m \geqq 0\,;\quad n^k \leqq y\,.$$

In der Summe $\sum_1$ wird zunächst die Summation über n ausgeführt und das letzte Integral durch partielle Integration abgeschätzt:

$$\sum_{n^k \leqq y}' \psi((x-n^k)^{1/k}) = -\sum_{m^k \leqq x-y}' \{y^{1/k} - \psi(y^{1/k})\} - \sum_{x-y<m^k\leqq x}' \{(x-m^k) -$$

$$- \psi((x-m^k)^{1/k})\} + \int_0^{y^{1/k}} (x-t^k)^{1/k}\,\mathrm{d}t + O(1)$$

$$= -(x-y)^{1/k}\, y^{1/k} + \int_0^{y^{1/k}} (x-t^k)^{1/k}\, \mathrm{d}t - \int_{(x-y)^{1/k}}^{x^{1/k}} (x-t^k)^{1/k}\, \mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{(x-y)^{1/k}}^{x^{1/k}} (x-t^k)^{1/k-1}\, t^{k-1}\, \psi(t)\, \mathrm{d}t +$$

$$+ \sum_{x-y<m^k\leqq x} \psi\big((x-m^k)^{1/k}\big) + O(1)$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^x (x-t)^{1/k-1}\, \psi(t^{1/k})\, \mathrm{d}t +$$

$$+ \sum_{x-y<m^k\leqq x} \psi\big((x-m^k)^{1/k}\big) + O\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right).$$

Bei Benutzung von (19) folgt daraus (20).

Beweis von (21). Nach (19) ist mit $v > 1$

$$\sum_{n^k\leqq y}' \psi_{v/k}^{(k)}\big((x-n^k)^{1/k}\big) = \frac{v-1}{k}\sum_{n^k\leqq y}' \int_0^{x-n^k} (x-n^k-t)^{(v-1)/k-1}\, \psi_{1/k}^{(k)}(t^{1/k})\, \mathrm{d}t =$$

$$= -2(v-1)\int_0^{(x-y)^{1/k}} t^{v-2} \sum_{n^k\leqq y}' \psi\big((x-t^k-n^k)^{1/k}\big)\, \mathrm{d}t -$$

$$- 2(v-1)\sum_{n^k\leqq y}' \int_0^{(y-n^k)^{1/k}} (x-n^k-t^k)^{(v-1)/k-1}\, t^{k-1}\, \psi(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Für die Summe unter dem ersten Integral wird (20) eingesetzt, und die zweite Summe wird durch partielle Integration des Integrals abgeschätzt.

$$\sum_{n^k\leqq y}' \psi_{v/k}^{(k)}\big((x-n^k)^{1/k}\big) = (v-1)\int_0^{(x-y)^{1/k}} t^{v-2}\Big\{\psi_{2/k}^{(k)}\big((x-t^k)^{1/k}\big) -$$

$$- \sum\nolimits_4' \psi\big((x-t^k-m^k)^{1/k}\big) + O\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right)\Big\}\, \mathrm{d}t + O\big(x^{(v-1)/k}\big)\,,$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_4) : x-y-t^k < m^k \leqq x-t^k\,.$$

Durch Vertausch von Integration und $\sum_4$ ergibt sich

$$\sum_{n^k\leqq y}' \psi_{v/k}^{(k)}\big((x-n^k)^{1/k}\big) = \frac{v-1}{k}\int_y^x (x-t)^{(v-1)/k-1}\, \psi_{2/k}^{(k)}(t^{1/k})\, \mathrm{d}t +$$

$$+ O\left(x^{(v-1)/k}\left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right) - \frac{2(v-1)}{k}\Big\{\sum_{y<m^k\leqq x-y}\int_0^y + \sum_{x-y<m^k\leqq x}\int_0^{x-m^k} +$$

$$+ \sum_{m^k\leqq y}' \int_{y-m^k}^{y}\Big\}(x-m^k-t)^{(v-1)/k-1}\, \psi(t^{1/k})\, \mathrm{d}t\,.$$

Durch Anwendung von (19) und partielle Integration ergibt sich (21).

Hilfssatz 3. *Mit* $y = x^\alpha$, $\alpha > 1 - 1/k + \varepsilon > 1 - 1/k$ *ist*

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = \sum_{\nu=2}^{n-1} O(x^{\nu(\nu-1)/k(\nu+1)+(n-\nu)\alpha/k} \log^2 x) + O(x^{(n-1)\alpha/k}) \tag{24}$$

für $n > k$,

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = nV_{k,n-1}\, \psi_{n/k}^{(k)}(x^{1/k}) + \sum_{\nu=2}^{n-1} O(x^{\nu(\nu-1)/k(\nu+1)+(n-\nu)\alpha/k} \log^2 x) + \tag{25}$$

$$+ O(x^{(n-1)\alpha/k-\alpha+1-1/k} \log^2 x) + O(x^{(n-2)\alpha/k+\alpha-1+1/k})$$

für $n \leqq k$.

Beweis. Nach (9) ist

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n n! \textstyle\sum_5 \psi((x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_5) : 0 \leqq a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq \dfrac{x - A_{n-2}}{2}, \quad a_1^k \leqq y = x^\alpha,$$

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n n! \{\textstyle\sum_6 + \displaystyle\sum_{a_1{}^k \leqq x^\alpha} \textstyle\sum_7\} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_6) : 0 \leqq a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq \dfrac{x - A_{n-2}}{2}, \quad a_2^k \leqq x^\alpha,$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_7) : x^\alpha < a_2^k \leqq a_3^k \leqq \ldots \leqq \dfrac{x - A_{n-2}}{2},$$

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n n! \{\textstyle\sum_6 - \displaystyle\sum_{a_1{}^k \leqq x^\alpha} \textstyle\sum_8 + \displaystyle\sum_{a_1{}^k \leqq x^\alpha} \textstyle\sum_9\} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_8) : (x - a_1^k)^\alpha < a_2^k \leqq x^\alpha < a_3^k \leqq a_4^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq \dfrac{x - A_{n-2}}{2},$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_9) : (x - a_1^k)^\alpha < a_2^k \leqq a_3^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq \dfrac{x - A_{n-2}}{2}.$$

Die Summe $\sum_9$ wird mit Hilfssatz 2 abgeschätzt, der hier in der Form

$$\Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) = O(x^{n(n-1)/k(n+1)} \log x) + \delta_{k,n}(x, y) \tag{26}$$

mit

$$\delta_{k,n}(x, y) = \begin{cases} O(y^{(n-1)k-1} x^{1-1/k} \log^2 x) & \text{für } k \geqq n \\ 0 & \text{für } k < n \end{cases}$$

benutzt wird. Verwendet man (26) mit $n - 1$ statt n und mit $y = (x - a_1^k)^\alpha$, so wird

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n n! \{\textstyle\sum_6 - \displaystyle\sum_{a_1{}^k \leqq x^\alpha} \textstyle\sum_8\} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) +$$

$$+ (x^{(n-1)(n-2)/kn+\alpha/k}) + (x^{\alpha/k} \delta_{k,n-1}(x, x^\alpha)).$$

Weiter ist

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n\, n!\,\{\sum_6 - \sum_{a_1^k \leqq x^\alpha} \sum_{10}\sum_{11} + \sum_{a_1^k \leqq x^\alpha} \sum_{10}\sum_{12}\}\, \psi((x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_{10}) : (x - a_1^k)^\alpha < a_2^k \leqq x^\alpha,$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_{11}) : (x - a_1^k - a_2^k)^\alpha < a_3^k \leqq a_4^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq \frac{x - A_{n-2}}{2},$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_{12}) : (x - a_1^k - a_2^k)^\alpha < a_3^k \leqq x^\alpha < a_4^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq \frac{x - A_{n-2}}{2}.$$

Jetzt wird $\sum_{11}$ mit (26) abgeschätzt, indem man in (26) n durch $n - 2$ ersetzt und $y = (x - a_1^k - a_2^k)^\alpha$ setzt. Es ergibt sich

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n\, n!\,\{\sum_6 + \sum_{a_1^k \leqq x^\alpha} \sum_{10}\sum_{12}\}\, \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) +$$
$$+ O(x^{(n-1)(n-2)/kn + \alpha/k}) + O(x^{(n-2)(n-3)/k(n-1) + 2\alpha/k}) +$$
$$+ O(x^{\alpha/k}\delta_{k,n-1}(x, x^\alpha)) + O(x^{2\alpha/k}\delta_{k,n-2}(x, x^\alpha)).$$

Ganz analog werden $\sum_{12}$ und alle weiteren Summen behandelt, so daß man

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n\, n! \sum_6 \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) +$$
$$+ \sum_{\nu=2}^{n-1} O(x^{\nu(\nu-1)/k(\nu+1) + (n-\nu)\alpha/k} \log^2 x) + \sum_{\nu=2}^{n-1} O(x^{(n-\nu)\alpha/k}\, \delta_{k,\nu}(x, x^\alpha))$$

erhält.

Vergleicht man jetzt $\sum_6$ mit $\sum_5$, so sieht man, daß die Bedingung $a^k \leqq x^\alpha$ von $\nu = 1$ auf $\nu = 2$ verschoben wurde. Also verfährt man mit $\sum_6$ und mit den entsprechenden folgenden Summen genauso wie mit $\sum_5$ bis

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n\, n! \sum_{13} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) + \tag{27}$$
$$+ \sum_{\nu=2}^{n-1} O(x^{\nu(\nu-1)/k(\nu+1) + (n-\nu)\alpha/k} \log^2 x) + O(x^{1 - 1/k + ((n-1)/k - 1)\alpha} \log^2 x),$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_{13}) : a_1^k \leqq a_2^k \leqq \ldots \leqq a_{n-1}^k \leqq x^\alpha.$$

Für $n > k$ wird $\sum_{13}$ trivial abgeschätzt, und man erhält (24). Für $n \geqq k$ wird $\sum_{13}$ mit Hilfe von Lemma 4 entwickelt:

$$-2^n\, n! \sum_{13} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) = -2^n\, n \sum_{a_1^k \leqq x^\alpha} \sum_{a_2^k \leqq x^\alpha} \cdots \sum_{a_{n-1}^k \leqq x^\alpha} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) =$$
$$= -2^n\, n \sum_{a_1^k \leqq x^\alpha} \cdots \sum_{a_{n-2}^k \leqq x^\alpha} \sum_{14} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) + O(x^{(n-1)\alpha/k + \alpha - 1}),$$

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_{14}) : (x - A_{n-2})^\alpha < a_{n-1}^k \leqq x^\alpha.$$

Wendet man auf $\sum_{14}$ (22) an, so folgt

$$-2^n\, n! \sum\nolimits_{13} \psi\big((x - A_{n-1})^{1/k}\big) =$$
$$= 2^{n-1}\, n \sum_{a_1{}^k \leqq x^\alpha} \cdots \sum_{a_{n-2}{}^k \leqq x^\alpha} \psi^{(k)}_{2/k}\big((x - A_{n-2})^{1/k}\big) + O\big(x^{(n-k)\alpha/k + \alpha - 1 + 1/k}\big) +$$
$$+ O\big(x^{(n-2)\alpha/k + (1-1/k)(1-\alpha)}\big)\,.$$

Durch wiederholte Anwendung derselben Schlußweise und von (23) ergibt sich

$$-2^n\, n! \sum\nolimits_{13} \psi\big((x - A_{n-1})^{1/k}\big) = nV_{k,n-1}\, \psi^{(k)}_{n/k}\big(x^{1/k}\big) + \tag{28}$$
$$+ O\big(x^{(n-2)\alpha/k + \alpha - 1 + 1/k}\big) + O\big(x^{(n-2)\alpha/k + (1-1/k)(1-\alpha)}\big)\,.$$

(27) und (28) ergeben zusammen (25).

5. BEWEIS DES SATZES

Es ist ein optimales α in der Abschätzung von

$$\Delta_{k,n}(x) = \Delta^{(1)}_{k,n}(x, y) + \Delta^{(2)}_{k,n}(x, y)$$

anzugeben.

I. $n > k$:

Nach (10) und (24) ist

$$\Delta_{k,n}(x) = O\big(x^{n(n-1)/k(n+1)} \log x\big) + O\big(x^{(n-1)\alpha/k}\big) +$$
$$+ \sum_{\nu=2}^{n-1} O\big(x^{\nu(\nu-1)/k(\nu+1) + (n-\nu)\alpha/k} \log^2 x\big)\,.$$

Mit $\alpha = 1 - 1/n$ folgt daraus

$$\Delta_{k,n}(x) = O\big(x^{n(n-1)/k(n+1)} \log x\big)\,.$$

II. $n \leqq k$:

Nach (10) und (25) ist

$$\Delta_{k,n}(x) = nV_{k,n-1}\, \psi^{(k)}_{n/k}\big(x^{1/k}\big) +$$
$$+ \sum_{\nu=2}^{n-1} O\big(x^{\nu(\nu-1)/k(\nu+1) + (n-\nu)\alpha/k} \log^2 x\big) +$$
$$+ O\big(x^{n(n-1)/k(n+1)} \log x\big) + O\big(x^{(n-1)\alpha/k - \alpha + 1 - 1/k} \log^2 x\big) + O\big(x^{(n-2)\alpha/k + \alpha - 1 + 1/k}\big)\,.$$

Bestimmt man α aus

$$\frac{n-1}{k}\alpha - \alpha + 1 - \frac{1}{k} = \frac{2}{3k} + \frac{n-2}{k}\alpha\,,$$

so wird

$$\alpha = \frac{3k - 5}{3(k - 1)}$$

und

$$\frac{n - 1}{k}\alpha - \alpha + 1 - \frac{1}{k} = \frac{(3n - 4)k - 5n + 8}{3k(k - 1)}.$$

Für $n \leqq k$ ist

$$\frac{(3n - 4)k - 5n + 8}{3k(k - 1)} < \frac{n - 1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Es ist

$$\frac{n - 2}{k}\alpha + \alpha - 1 + \frac{1}{k} = \frac{(3n - 5)k - 5n + 7}{3k(k - 1)} < \frac{(3n - 4)k - 5n + 8}{3k(k - 1)}$$

und

$$\frac{\nu(\nu - 1)}{k(\nu + 1)} + (n - \nu)\frac{\alpha}{k} \leqq \frac{(3n - 4)k - 5n + 8}{3k(k - 1)}$$

für $2 \leqq \nu \leqq k - 2$, daß heißt für $n \leqq k - 2$. Für $n = k, k - 1$ ist

$$\frac{n(n - 1)}{k(n + 1)} > \frac{(3n - 4)k - 5n + 8}{3k(k - 1)}.$$

Und daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Literatur

[1] *E. Krätzel,* Identitäten für die Anzahl der Gitterpunkte in bestimmten Bereichen, Math. Nachr. *36* 181—191 (1968).

[2] *E. Krätzel,* Bemerkungen zu einem Gitterpunktsproblem, Math. Ann. *179,* 90—96 (1969).

[3] *B. Randol,* A lattice-point problem II, Trans. Amer. Math. Soc. *177,* 102—113 (1967).

[4] *I. M. Vinogradov,* Über die Anzahl der Gitterpunkte in einer Kugel (russ.), Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. *27,* 957—968 (1963).

Anschrift des Verfassers: Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena, 69 Jena, Helmholtzweg 1, DDR.