Czechoslovak Mathematical Journal

Dietmar W. Dorninger

Über Eulersche und paare Hamiltonsche Graphen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), No. 4, 600–611

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101129

Czechoslovak Mathematical Journal, 22 (1972), Praha

ÜBER EULERSCHE UND PAARE HAMILTONSCHE GRAPHEN

DIETMAR DORNINGER, Wien

(Eingegangen am 16. September 1971)

1. EINLEITUNG

Nach *A. Kotzig* bezeichnen wir einen endlichen, ungerichteten n-regulären Graphen als *Hamiltonschen Graphen*, wenn er derart in n Linearfaktoren zerfällt, daß die Vereinigung von je zwei Linearfaktoren einen Hamiltonschen Kreis des Graphen ergibt.

Während die Klasse der beliebigen und ebenen Hamiltonschen Graphen bereits weitgehend untersucht wurde (Vgl. [4], [5]), beziehen sich die Ergebnisse über paare Hamiltonsche Graphen vorwiegend auf den Grad 3. *Kotzig* gibt in [5] eine Transformation an, mit deren Hilfe man alle paaren Hamiltonschen Graphen vom Grad 3 erhält, und zeigt, daß für die Knotenpunktsanzahl m eines jeden solchen Graphen gilt: $m \equiv 2 \pmod 4$.

Im folgenden soll die Klasse der paaren Hamiltonschen Graphen vom Grad n, insbesondere für $n < 6$ untersucht werden.

Dazu betrachten wir eine Teilklasse der gerichteten, k-valenten Eulerschen Graphen, welche die kantendisjunkte Vereinigung von $k/2$ kontinuierlich gerichteten Kreisen sind, und zeigen, daß man mittels einer einfachen Transformation aus der betrachteten Teilklasse alle paaren Hamiltonschen Graphen gewinnt. Dann beschäftigen wir uns mit der Existenz und Transformation von k-valenten Eulerschen Graphen – insbesondere für $k < 10$ – und wenden die gefundenen Resultate auf paare Hamiltonsche Graphen an.

2. PAARE HAMILTONSCHE GRAPHEN VOM GRAD n

Im folgenden betrachten wir nur endliche Graphen, welche ungerichtet oder gerichtet sein können. Bei gerichteten Graphen verwenden wir dieselbe Terminologie wie bei ungerichteten, nur setzen wir vor die einzelnen Begriffe die Worte „gerichtet“ bzw. „kontinuierlich gerichtet“. Der Zusatz „gerichtet“ bzw. „kontinuierlich gerichtet“ kann, falls keine Verwechslung möglich ist, entfallen. Schlingen und Mehrfachkanten seien nicht ausgeschlossen.

Für die Knotenpunkts- bzw. Kantenmenge eines Graphen G schreiben wir $V(G)$ bzw. $E(G)$. Hat eine (ungerichtete oder gerichtete) Kante k die Endpunkte P und Q, so verwenden wir für sie auch das (im allgemeinen mehrdeutige) Symbol PQ; ist k gerichtet, so sei P der Anfangs- und Q Zielpunkt von k.

Kantenfolgen seien stets als alternierende Folgen von Knotenpunkten und damit inzidenten Kanten angeschrieben.

Eine Kantenfolge, in der keine Kante zweimal auftritt, nennen wir *Kantenzug*; ein kontinuierlich gerichteter, geschlossener Kantenzug heiße *Zyklus*, eine kontinuerlich gerichtete Eulersche Linie (welche wir per definitionem als geschlossen voraussetzen) heiße *Eulerscher Zyklus*.

Nun betrachten wir für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Menge aller gerichteten $2n$-valenten Graphen Y, welche die kantendisjunkte Vereinigung von n kontinuierlich gerichteten Kreisen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sind – im Zeichen: $Y \doteq Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ – und definieren Mengen $\mathfrak{Y}_n(m)$ bzw. eine Menge $\overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$ von n-tupeln kontinuerlich gerichteter Kreise wie folgt:

$\mathfrak{Y}_1(m) = \{(Y_1) \mid Y_1 = Y;\ Y \doteq Y_1,\ |V(Y)| = m\}$,

$\mathfrak{Y}_2(m) = \{(Y_1, Y_2) \mid Y_1 \cup Y_2 = Y;\ Y \doteq Y_1 Y_2,\ |V(Y)| = m$; beginnt man bei einem beliebigen Knotenpunkt P aus $V(Y)$ einen in Kanten aus Y_1 und Y_2 alternierenden[1]) kontinuierlich gerichteten Kantenzug zu durchlaufen, so hat man, wenn dieser nicht mehr fortsetzbar ist, ganz Y durchlaufen$\}$,

$\overline{\mathfrak{Y}}_2(m) = \{(Y_1, Y_2) \mid Y_1 \cup Y_2 = Y;\ Y \doteq Y_1 Y_2$; ändert man im Kreise Y_2 den Richtungssinn aller Kanten, und ist der auf diese Weise aus Y_2 entstehende Kreis $\overline{Y}_2$, so gilt: $(Y_1, \overline{Y}_2) \in \mathfrak{Y}_2(m)\}$; und für $n \geqq 3$:

$$\mathfrak{Y}_n(m) = \{(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \mid \bigcup_{\nu=1}^{n} Y_\nu = Y;\ Y \doteq Y_1 Y_2 \ldots Y_n;\ \text{für } i < j;\ i, j \in \{2, 3, \ldots, n\}$$
ist $(Y_1, Y_i) \in \mathfrak{Y}_2(m)$ und $(Y_i, Y_j) \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)\}$.

Gilt für einen Graphen $Y : Y \doteq Y_1 Y_2 \ldots Y_n$, so bezeichnen wir das n-tupel $(Y_1, Y_2 \ldots \ldots, Y_n)$ als *Zerlegung* von Y.

Sei nun $Y_n'(m)$ ein Graph Y, welcher eine Zerlegung $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \in \mathfrak{Y}_n(m)$ besitzt, und symbolisiere $Y_n(m)$ den Graphen $Y_n'(m)$ zusammen mit dieser Zerlegung, dann können wir eine Transformation ε von $Y_n(m)$ wie folgt definieren:

Wir ersetzen jedes $P \in V(Y_n(m))$ durch eine gerichtete Kante $P_1 P_2$ und lassen von den mit P inzidierenden Kanten die Kante aus $E(Y_1)$, welche P zum Zielpunkt hat, sowie diejenigen Kanten aus $E(Y_2) \cup E(Y_3) \cup \ldots \cup E(Y_n)$, welche in P ihren Anfang nehmen, mit P_1 inzidieren, alle übrigen mit P_2. Alsdann sehen wir von den Richtungen sämtlicher Kanten ab. Der auf diese Weise erhaltene ungerichtete Graph sei $\varepsilon(Y_n(m))$.

---

[1]) dh., auf eine Kante aus Y_1 folgt stets eine Kante aus Y_2, und umgekehrt.

Satz 1. $\{\varepsilon(Y_n(m))\}$ *ist die Menge aller paaren Hamiltonschen Graphen vom Grad* $n+1$ *mit* $2m$ *Knotenpunkten.*

Beweis. Da der Satz für $n = 1$ sichtlich richtig ist, nehmen wir an, es sei $n > 1$. – Wir zeigen zunächst

(1): $\varepsilon(Y_n(m))$ ist Hamiltonsch.

Wir schreiben abkürzend X für $\varepsilon(Y_n(m))$ und ε^{-1} für den Übergang von X zu seinem Urbild $Y_n(m)$. Ist für $v = 1, 2, \ldots, n$ $E'(Y_v)$ die Menge, die man aus $E(Y_v)$ erhält, wenn man von den Richtungen der Kanten absieht, X_v derjenige Teilgraph von X, welcher durch $E(X) \cap E'(Y_v)$ definiert wird, und X_{n+1} der Teilgraph von X, welcher aus allen Kanten P_1P_2 besteht, so gilt offensichtlich, da die Y_v kontinuierlich gerichtete Kreise sind: X zerfällt in die linearen Faktoren $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ und $X_v \cup X_{n+1}$ ist für jedes v ein Kreis von X.

Nun betrachten wir für $i = 2, 3, \ldots, n$ den quadratischen Faktor $X_1 \cup X_i$ und nehmen an, daß dieser die disjunkte Vereinigung von $r > 1$ Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_r$ ist. Die Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_r$ alternieren in Kanten aus X_1 und X_i. Verleihen wir den Kanten von $X_1 \cup X_i$ nun diejenigen Richtungen, die sie in $Y_n(m)$ haben, so werden aus $K_1, K_2, \ldots, K_r$ kontinuierlich gerichtete, alternierende Kreise, welche bei ε^{-1} in r kantendisjunkte, in Kanten aus Y_1 und Y_i alternierende Zyklen übergehen. Da aber wegen $(Y_1, Y_i) \in \mathfrak{Y}_2(m)$ $Y_1 \cup Y_i$ höchstens einen solchen Zyklus besitzen kann, kann r nicht größer 1 sein im Widerspruch zur Voraussetzung.

Nun müssen wir beweisen, daß $X_i \cup X_j$ für $i < j$; $i, j \in \{2, 3, \ldots, n\}$ ein Kreis ist. Dazu nehmen wir an, $X_i \cup X_j$ bestehe aus mehr als einem Kreis, verleihen den Kanten von X_1 und X_j wieder die Richtungen, die sie in $Y_n(m)$ haben, wenden ε^{-1} an und zeigen analog wie oben, daß die Annahme, daß es mehr also einen Kreis in $X_i \cup X_j$ gibt, im Widerspruch dazu steht, daß $(Y_i, Y_j) \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$ ist.

Als nächstes beweisen wir

(2): $\varepsilon(Y_n(m))$ ist paar.

Dazu zeigen wir: $X_1 \cup X_{n+1} \cup X_i$ ist für jedes $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ paarer Teilgraph von X. Daraus folgt nämlich dann, da man im Kreise $X_1 \cup X_{n+1}$ die Knotenpunkte auf genau eine Weise so in zwei zueinander fremde Klassen einteilen kann, daß keine zwei Knotenpunkte ein und derselben Klasse miteinander durch eine Kante verbunden sind, daß X paar ist.

Wie wir beim Beweis von (1) gesehen haben, entsteht der Kreis $X_1 \cup X_i$ bei der Transformation ε aus einem in den Kanten aus Y_1 und Y_i alternierenden Eulerschen Zyklus Z von $Y_1 \cup Y_i$ (welcher durch Y_1 und Y_i eindeutig bestimmt ist). Dieses Z hat nun, da Y_1 und Y_i kontinuierlich gerichtete Kreise sind, die folgende Eigenschaft: Trifft man Z durchlaufend zum ersten Mal auf einen beliebigen Knotenpunkt P aus $V(Y_n(m))$ längs einer zu P hinführenden Kante aus Y_1 (Y_i), so kann man auf P zum zweiten Mal nur mehr über eine zu P hinführende Kante aus Y_i (Y_1) treffen. Weil nun Z in Kanten aus Y_1 und Y_i alterniert, folgt daraus, daß die Anzahl der Kanten von Z, die man benötigt, um von P wiederum zu P zu gelangen, stets ungerade ist. Das bedeutet, daß die Anzahl der Kanten, die man benötigt, um im Kreise $X_1 \cup X_i$ von P_1 zu P_2 zu gelangen, ebenfalls immer ungerade ist.

Nun betrachten wir den Graphen $X_1 \cup X_i \cup X_{n+1}$, welchen wir der Kürze halber mit X' bezeichnen. Offensichtlich ist der Teilgraph H' von X', den man aus $X_1 \cup X_i$ erhält, indem man eine beliebige Kante k aus $X_1 \cup X_i$ streicht, Gerüst von X'. Das H' zugehörige Fundamentalsystem (— eine Basis der Homologiegruppe mod 2; siehe [1], S. 61 und S. 147 —) sei $\mathfrak{F}$. Jeder Kreis aus $\mathfrak{F}$ hat eine gerade Anzahl von Kanten, denn k ergänzt H' zu $X_1 \cup X_i$, und für jede Kante $P_1P_2 \in E(X_{n+1})$ gilt, wie wir oben gezeigt haben, daß der von P_1 über Kanten von H' nach P_2 führende Weg eine ungerade Anzahl von Kanten hat. Da es aber nun dafür, daß jeder Kreis eines Graphen G eine gerade Anzahl von Kanten hat, hinreichend ist, daß dies für ein Fundamentalsystem von G gilt, (siehe [1], S. 152), folgt: X' ist ein paarer Graph.

Letztlich beweisen wir

(3): Man erhält alle paaren Hamiltonschen Graphen.

Sei X ein beliebiger paarer Graph mit $2m$ Knoten, der in die Linearfaktoren $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ derart zerfällt, daß die Vereinigung von je zwei Linearfaktoren einen Hamiltonschen Kreis des Graphen ergibt. Kontrahieren wir sämtliche Kanten von X_{n+1} (durch Identifikation der Endpunkte und Streichen der Kante) und behalten die auf diese Weise evëntuell auftretenden Mehrfachkanten und Schlingen bei, so erhalten wir aus X einen $2n$-regulären Graphen $\tilde{Y}$ mit m Knoten, welcher die kantendisjunkte Vereinigung von n Kreisen $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_n$ ist, deren Kantenmengen $E(X_1)$, $E(X_2), \ldots, E(X_n)$ sind. Bei der Kontraktion von X_{n+1} gehen die Hamiltonschen Kreise $X_1 \cup X_i$ und $X_i \cup X_j$ $(i < j;\ i, j \in \{2, 3, \ldots, n\})$ in alternierende Eulersche Linien $E(1, i)$ und $E(i, j)$ von $\tilde{Y}_1 \cup \tilde{Y}_i$ bzw. $\tilde{Y}_i \cup \tilde{Y}_j$ über. Da $X_1 \cup X_i \cup X_{n+1}$ für jedes i als Teilgraph eines paaren Graphen paar ist, ist die Anzahl der Kanten, die man in $E(1, i)$ durchlaufen muß, um von einem beliebigen Knotenpunkt P zu P zurückzugelangen, ungerade. Wählen wir daher einen beliebigen Knotenpunkt $A \in V(\tilde{Y})$ aus und durchlaufen für ein bestimmtes i von A aus, beginnend mit einer Kante a aus $E(X_1)$, die in Kanten aus X_1 und X_i alternierende Eulersche Linie $E(1, i)$, so werden, wenn wir alle durchlaufenden Kanten im Durchlaufungssinn richten, die Kreise $\tilde{Y}_1$ und $\tilde{Y}_2$ kontinuierlich gerichtet. Daraus folgt, daß die Kanten von $\tilde{Y}_1$ unabhängig von der Wahl der Eulerschen Linie $E(1, i)$ stets die gleichen Richtungen erhalten, soferne nur die Richtung von a jedesmal die gleiche ist. Richten wir also $\tilde{Y}$ — der dabei entstehende Graph sei Y — indem wir von A aus, beginnend mit a, alle $E(1, i)$ durchlaufen und den (noch ungerichteten) Kanten die Richtung des Durchlaufungssinnes verleihen, so erhalten wir aus den $\tilde{Y}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ kontinuierlich gerichtete Kreise Y_ν, für welche gilt: $(Y_1, Y_i) \in \mathfrak{Y}_2(m)$. Durchlaufen wir dann Y entlang einer Eulerschen Linie $E(i, j)$, so sehen wir, daß auch noch gilt: $(Y_i, Y_j) \in \mathfrak{Y}_2(m)$. Also ist Y ein Graph $Y_n(m)$. Für diesen Graphen gilt: $\varepsilon(Y_n(m)) = X$, *w.z.z.w.*

Nun bilden wir für $n = 1, 2, 3, \dots$ Teilmengen $\mathfrak{Y}_n^*(m)$ von $\mathfrak{Y}_n(m)$ wie folgt:

$$\mathfrak{Y}_1^*(m) = \mathfrak{Y}_1(m),$$
$$\mathfrak{Y}_2^*(m) = \mathfrak{Y}_2(m) \cap \overline{\mathfrak{Y}}_2(m) \text{ – und für } n \geqq 3,$$
$$\mathfrak{Y}_n^*(m) = \{(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) | \text{ für } \mu < \nu;\ \mu, \nu \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ ist } (Y_\mu, Y_\nu) \in \mathfrak{Y}_n^*(m)\},$$

schreiben $Y_n^*(m)$ für einen Graphen $Y_n(m)$, dessen Zerlegung $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in \mathfrak{Y}^*(m)$ ist, und beweisen folgenden

Satz 2. *Sei* $m \equiv 1 \pmod 2$. *Existiert ein Graph* $Y_n^*(m)$, *so existiert auch ein paarer Hamiltonscher Graph vom Grad* $2n + 1$ *mit* $2m$ *Knotenpunkten.*

Beweis. Es existiere für ein $m \equiv 1 \pmod 2$ ein Graph $Y_n^*(m)$ mit der Zerlegung $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in \mathfrak{Y}_n^*(m)$.

Wir konstruieren aus $Y_n^*(m)$ einen neuen Graphen $\overline{Y}_n^*(m)$ mit $V(\overline{Y}_n^*(m)) = V(Y_n^*(m))$ und $E(\overline{Y}_n^*(m)) \cap E(Y_n^*(m)) = \emptyset$, indem wir den Richtungssinn aller Kanten aus $Y_n^*(m)$, welche nicht aus Y_1 sind, ändern, die Richtungen der Kanten aus Y_1 aber beibehalten. – Die aus den Y_ν $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ auf diese Weise hervorgehenden kontinuierlich gerichteten Kreise seien $\overline{Y}_\nu$. – Dann bilden wir den Graphen $Y_n^*(m) \cup \overline{Y}_n^*(m)$. Dieser besitzt die Zerlegung $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \dots, \overline{Y}_n)$. $\delta(Y_n^*(m))$ symbolisiere die Bildung des Graphen $Y_n^*(m) \cup \overline{Y}_n^*(m)$ mit dieser Zerlegung.

Wir behaupten: $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \dots, \overline{Y}_n)$ ist aus $\mathfrak{Y}_{2n}(m)$.

Dazu genügt es offensichtlich zu zeigen, daß für $\nu = 1, 2, \dots, n$ $(Y_1, \overline{Y}_\nu) \in \mathfrak{Y}_2(m)$ ist und für $i = 2, 3, \dots, n$ und $\mu < \nu$; $\mu, \nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ $(Y_i, \overline{Y}_\nu)$ und $(\overline{Y}_\mu, \overline{Y}_\nu)$ aus $\mathfrak{Y}_2(m)$ sind.

Für $\nu \geqq 2$ ist $(Y_1, \overline{Y}_\nu) \in \mathfrak{Y}_2(m)$, denn da $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in \mathfrak{Y}_n^*(m)$ ist, ist $(Y_1, Y_\nu) \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$ und daher $(Y_1, \overline{Y}_\nu) \in \mathfrak{Y}_2(m)$.

Nun heben wir hervor, daß

(1) mit $(Y_1', Y_2') \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$ auch $(Y_2', Y_1') \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$ ist, und

(2) aus $(Y_1', Y_2') \in \mathfrak{Y}_2(m)$ ein Paar aus $\overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$ wird, wenn man die die Richtungen sämtlicher Kanten entweder von Y_1' oder Y_2' ändert,

und beweisen:

Für $i = 2, 3, \dots, n$, $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $i \neq \nu$ ist $(Y_i, \overline{Y}_\nu) \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$. – Ist nämlich $i < \nu$, so ist wegen $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in \mathfrak{Y}_n^*(m)$ das Paar $(Y_i, Y_\nu) \in \mathfrak{Y}_2(m)$ und daher wegen (2): $(Y_i, \overline{Y}_\nu) \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$. – Ist $i > \nu$, so ist $(Y_\nu, Y_i) \in \mathfrak{Y}_2(m)$ und deshalb gemäß (2) $(\overline{Y}_\nu, Y_i) \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$; daraus aber folgt nach (1): $(\overline{Y}_i, \overline{Y}_\nu) \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$.

Für $\mu < \nu$, $\mu, \nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ ist $(\overline{Y}_\mu, \overline{Y}_\nu) \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$, denn wegen $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in \mathfrak{Y}_n^*(m)$ ist $(Y_\mu, Y_\nu) \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$ und daher $(Y_\mu, \overline{Y}_\nu) \in \mathfrak{Y}_2(m)$; daraus aber folgt wegen (2): $(\overline{Y}_\mu, \overline{Y}_\nu) \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$.

Jetzt müssen wir noch zeigen, daß $(Y_1, \overline{Y}_1)$ und $(Y_i, \overline{Y}_i)$ aus $\overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$ sind.

Dies ist aber gleichbedeutend damit, daß für einen Graphen D, welcher die kantendisjunkte Vereinigung zweier (abgesehen von der Bezeichnung der Kanten) gleicher kontinuierlich gerichteter Kreise D_1 und D_2 ist, gilt: Ist die Knotenpunktsanzahl m von D ungerade, so ist $(D_1, D_2) \in \mathfrak{Y}_2(m)$.

Das ist aber der Fall, denn sei D_1 die kontinuierlich gerichtete Kantenfolge $P_1, a_1, P_2, a_2, \ldots, a_{m-1}, P_m, a_m, P_1$ $(P_r \in V(D),\ a_r \in E(D);\ r = 1, 2, \ldots, n)$ und D_2 die kontinuierlich gerichtete Kantenfolge $P_1, b_1, P_2, b_2, \ldots, b_{m-1}, P_m, b_m, P_1$ $(b_r \in E(D_2))$, und beginnt man in P_1 einen in den Kanten aus D_1 und D_2 alternierenden Zyklus Z zu durchlaufen, dessen erste Kante a_1 ist, so erhält man eine Folge: $P_1, a_1, P_2, b_2, P_3, a_3, \ldots$ usf., bis man wegen $m \equiv 1 \pmod 2$ zu P_m, a_m kommt, von wo man wie folgt weiterschreitet: $\ldots a_m, P_1, b_1, P_2, a_2, P_3, b_3, \ldots$ usf., bis man schließlich zu P_m, b_m, P_1 kommt, von wo man Z nicht mehr fortsetzen kann. Sichtlich ist die Kantenmenge von Z gleich $E(D_1) \cup E(D_2)$ und daher $(D_1, D_2) \in \mathfrak{Y}_2(m)$.

Damit haben wir nun bewiesen, daß $\delta(Y_n^*(m))$ ein Graph $Y_{2n}(m)$ ist, woraus nach Satz 1 folgt: $\varepsilon(\delta(Y_n^*(m)))$ ist ein paarer Hamiltonscher Graph vom Grad $2n + 1$ mit $2m$ Knotenpunkten.

2. PAARE HAMILTONSCHE GRAPHEN VOM GRAD $n < 6$

Satz 3. *Genau für alle ungeraden Zahlen $m \neq 3$ gibt es einen Graphen $Y_2^*(m)$.*

Beweis. Da gemäß [5] für die Knotenpunktsanzahl $2m$ eines paaren Hamiltonschen Graphen vom Grad $n > 2$ gilt: $2m \equiv 2 \pmod 4$, kann es gemäß Satz 1 für gerades m keinen Graphen $Y_2^*(m)$ geben. Desgleichen sieht man sofort, daß auch für $m = 3$ kein Graph $Y_2^*(m)$ existiert.

Für $m = 1$ gibt es einen Graphen $Y_2^*(m)$: es ist der Graph, welcher aus zwei gerichteten Schlingen besteht. Für $m = 5$ leistet der *Kuratowski*sche Graph mit 5 Knotenpunkten[2]) das Gewünschte.

Es bleibt also noch zu zeigen, daß für $m > 5$ ein Graph $Y_2^*(m)$ existiert. Dazu definieren wir zunächst für einen beliebigen Graphen $Y_2(m)$ mit der Zerlegung (Y_1, Y_2) die folgende Transformation π,[3]) welche $Y_2(m)$ in einen Graphen $Y_2(m + 2)$ überführt.

Wir betrachten den in Kanten aus Y_1 und Y_2 alternierenden Eulerschen Zyklus Z von $Y_2(m)$ (welcher durch (Y_1, Y_2) eindeutig gegeben ist) und wählen vier in Z (nicht notwendigerweise unmittelbar) aufeinanderfolgende Kanten a, b, c und d von $Y_2(m)$ aus, von denen a und b aus $E(Y_1)$ und c und d aus $E(Y_2)$ seien; a und b bzw. c und d können auch zusammenfallen. Hierauf fügen wir auf a einen Knotenpunkt A und auf b einen Knotenpunkt B ein, bzw., falls a und b zusammenfallen, auf a zwei aufeinanderfolgende Knotenpunkte A und B. Die durch die Einführung von A aus a

[2]) Siehe [6], S. 17.

[3]) Vgl. hierzu die Transformation π in [5] bzw. [4].

entstehenden Kanten gleicher Richtung wie a seien a_1 und a_2: a_1 habe A zum Ziel-, a_2 zum Anfangspunkt; die durch die Einführung von B aus b hervorgehenden Kanten seien b_1 und b_2, wobei B der Zielpunkt von b_1 und der Anfangspunkt von b_2 sei. Falls $a = b$ ist, sollen a_2 und b_1 beide die Kante AB beschreiben. – Dann ersetzen wir die Kanten c bzw. d durch je zwei Kanten c_1 und c_2 bzw. d_1 und d_2, wobei für den Fall, daß $c = d$ ist, c_2 und d_1 zusammenfallen sollen, auf folgende Art: War Z der Zyklus $P, p, \ldots, A_1, a, A_2, \ldots, B_1, b, B_2, \ldots, C_1, c, C_2, \ldots, D_1, d, D_2, \ldots, q, P$, so entstehe durch alle Ersetzungen aus Z der neue Zyklus Z': $P, p, \ldots, A_1, a_1, A, c_2, C_2, \ldots, D_1, d_1, B, b_2, B_2, \ldots, C_1, c_1, A, a_2, A_2, \ldots, B_1, b_1, B, d_2, D_2, \ldots, q, P$.

Der durch Z' beschriebene Graph Y' ist die kantendisjunkte Vereinigung zweier kontinuierlich gerichteter Kreise Y_1' und Y_2', deren Kantenmengen $E(Y_1) \cup \cup \{a_1, a_2, b_1, b_2\} - \{a, b\}$ bzw. $E(Y_2) \cup \{c_1, c_2, d_1, d_2\} - \{c, d\}$ sind. Da offensichtlich $(Y_1', Y_2') \in \mathfrak{Y}_2(m + 2)$ ist, ist Y' ein Graph $Y_2(m + 2)$.

Sei nun ein beliebiger Graph $Y_2^*(m)$ mit der Zerlegung (Y_1, Y_2) gegeben. – $\overline{Y}_2$ sei der kontinuierlich gerichtete Kreis, welcher aus Y_2 durch Änderung der Richtungen sämtlicher Kanten hervorgeht; $\overline{Z}$ sei der durch $(Y_1, \overline{Y}_2)$ eindeutig bestimmte, in Kanten aus Y_1 und $\overline{Y}_2$ alternierende Eulersche Zyklus von $Y \doteq Y_1\overline{Y}_2$; $\bar{c}$ und $\bar{d}$ seien die Kanten, welche durch Änderung der Richtungen aus zwei Kanten c und d hervorgehen.

Ist es möglich, auf $Y_2^*(m)$ eine Transformation π derart auszuüben, daß für die zur Transformation herangezogenen Kanten a, b, c und d (siehe oben) noch zusätzlich gilt: in $\overline{Z}$ folgen $a, b, \bar{c}$ und $\bar{d}$ oder aber $\bar{d}, \bar{c}, b$ und a (nicht notwendigerweise unmittelbar) aufeinander, so entsteht aus $Y_2^*(m)$ sichtlich ein Graph $Y_2^*(m + 2)$. – Die einen solchen Übergang vermittelnde Transformation π sei π^*.

Es gilt: Für $m \geqq 5$ kann man π^* auf jeden beliebigen Graphen $Y_2^*(m)$ ausüben, denn wählt man bloß für a eine beliebige Kante PQ aus Y_1, b gleich a, für c die zu Q hinführende und für d die zu P hinführende Kante aus Y_2, so ist offensichtlich alles erfüllt.

Also können wir durch wiederholte Anwendung von π^*, ausgehend von dem oben angegebenen *Kuratowski*schen Graphen $Y_2^*(5)$, schließen: zu jedem ungeraden $m > 5$ gibt es einen Graphen $Y_2^*(m)$, womit Satz 3 vollständig bewiesen ist.

Um einen Graphen $Y_2^*(m)$ anzugeben, genügt es allerdings auch schon, π^* höchstens einmal anzuwenden, denn es gilt der nachstehende Satz (in dessen Formulierung und Beweis der Kürze halber die Angabe der Kanten in den Kantenfolgen unterbleiben soll).

Satz 4. *Für jedes ungerade $m \not\equiv 0 \pmod 3$ ist der Graph, welcher die kantendisjunkte Vereinigung der beiden kontinuierlich gerichteten Kreise $Y_1 : P_1, P_2, P_3, \ldots \ldots, P_m, P_1$ und $Y_2 : P_1, P_3, P_5, \ldots, P_m, P_2, P_4, P_6, \ldots, P_{m-1}, P_1$ ist, ein Graph $Y_2^*(m)$.*

Beweis. (Y_1, Y_2) ist aus $\mathfrak{Y}_2(m)$, denn beginnt man in P_1 einen in den Kanten aus Y_1 und Y_2 alternierenden Kantenzug zu durchlaufen, so erhält man, falls $m \equiv 1 \pmod 3$ ist, die Folge: $P_1, P_2, P_4, P_5, P_7, \ldots, P_m, P_1, P_3, P_4, P_6, P_7, \ldots, P_{m-1}, P_m, P_2, P_3, P_5, \ldots, P_{m-2}, P_{m-1}, P_1$, falls $m \equiv 2 \pmod 3$ ist, die Folge: $P_1, P_2, P_4, P_5, P_7, \ldots \ldots, P_{m-1}, P_m, P_2, P_3, P_5, \ldots, P_m, P_1, P_3, P_4, P_6, \ldots, P_{m-2}, P_{m-1}, P_1$.

Kehrt man in Y_2 die Richtungen sämtlicher Kanten um und beginnt in P_1 einen in den Kanten aus Y_1 und $\overline{Y}_2$ alternierenden Kantenzug zu durchlaufen, so erhält man die Folge: $P_1, P_2, P_m, P_1, P_{m-1}, P_m, P_{m-2}, P_{m-1}, \ldots, P_3, P_4, P_2, P_3, P_1$.

Also ist (Y_1, Y_2) auch aus $\overline{\mathfrak{Y}}_2(m)$, *w.z.z.w.*

Die bisherigen Ergebnisse wollen wir nun auf paare Hamiltonsche Graphen übertragen.

Sei $m \neq 3$ und ungerade. Dann gibt es zu jedem m trivialerweise einen Graphen $Y_1^*(m)$ und nach Satz 3 einen Graphen $Y_2^*(m)$ (welcher, wie wir oben ausgeführt haben, sofort angebbar ist.). Bilden wir die Graphen $\varepsilon(\delta(Y_1^*(m))$ und $\varepsilon(\delta(Y_2^*(m))$, so sind diese nach Satz 2 [4]) paare Hamiltonsche Graphen vom Grad 3 bzw. Grad 5 mit $2m$ Knctenpunkten. – Letztere enthalten als Teilgraphen dann sicherlich auch paare Hamiltonsche Graphen vom Grad 4 mit $2m$ Knotenpunkten.

Da es, wie sofort zu sehen ist, keinen Graphen $Y_3(3)$ gibt, und nach Satz 1 $\{\varepsilon(Y_n(m))\}$ die Menge aller paaren Hamiltonschen Graphen vom Grad $n+1$ mit $2m$ Knotenpunkten ist, kann es für $m = 3$ keinen paaren Hamiltonschen Graphen vom Grad $n > 3$ geben. Wohl aber gibt es für $m = 3$ paare Hamiltonsche Graphen vom Grad $n \leqq 3$. (Man vgl. etwa [5] oder bilde die Graphen $\varepsilon(\delta(Y_1^*(3))$ bzw. $\varepsilon(Y_1(3))$.)

Trivialerweise existieren für beliebiges m paare Hamiltonsche Graphen vom Grad 2 mit $2m$ Knotenpunkten, nämlich die Graphen $\varepsilon(Y_1(m))$.

Da gemäß [5] für die Knotenpunktsanzahl $2m$ eines paaren Hamiltonschen Graphen vom Grad $n \geqq 3$ gilt $2m \equiv 2 \pmod 4$, gibt es für gerades m nur paare Hamiltonschen Graphen vom Grad 2.

Zusammenfassend erhalten wir also:

Satz 5. *Für jedes ungerade $m \neq 3$ kann man (sofort) einen paaren Hamiltonschen Graphen vom Grad $n < 6$ mit $2m$ Knotenpunkten angeben. Für $m = 3$ gibt es nur paare Hamiltonsche Graphen vom Grad $n \leqq 3$. – Für gerades m gibt es nur paare Hamiltonsche Graphen vom Grad 2.*

[4]) Siehe Beweis.

Im folgenden betrachten wir einen beliebigen Graphen $Y_3(m)$ mit der Zerlegung $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathfrak{Y}_3(m)$ und definieren eine Transformation $\varkappa\pi$ von $Y_3(m)$ wie folgt:

Zunächst üben wir auf den Teilgraphen $Y_1 \cup Y_2$ von $Y_3(m)$ die Transformation π aus – die Bezeichnungen seien dabei alle so wie oben bei der Definition von π gewählt – und lassen Y_3 unverändert. Dann wählen wir drei im kontinuierlich gerichteten Kreise Y_3 (nicht notwendigerweise unmittelbar) aufeinanderfolgende (paarweise verschiedene) Kanten e, f und g (– in dieser Reihenfolge –) aus, streichen diese Kanten und zeichnen fünf neue Kanten e_1, e_2, f', g_1 und g_2 im verbleibenden Graphen ein, was wir wie folgt beschreiben wollen (Transformation $\varkappa$):

War Y_3 der Kreis $E_1, e, E_2, \ldots, F_1, f, F_2, \ldots, G_1, g, G_2, \ldots, E_1$, so soll aus Y_3 der neue kontinuierlich gerichtete Kreis Y_3': $E_1, e_1, A, e_2, F_2, \ldots, G_1, g_1, B, g_2, E_2, \ldots, F_1, f', G_2, \ldots, E_1$ werden.

$\varkappa\pi(Y_3(m)) \doteq Y_1'Y_2'Y_3'$. (Y_1', Y_2') ist aus $\mathfrak{Y}_2(m+2)$. Wann ist $(Y_1', Y_3') \in \mathfrak{Y}_2(m+2)$? – Wie man leicht nachprüfen kann genau dann, wenn in dem durch (Y_1, Y_3) in $Y_3(m)$ eindeutig definierten, in den Kanten aus Y_1 und Y_3 alternierenden Zyklus ${}_1Z_3$ die Kanten a, b, e, f und g eine der folgenden Reihenfolgen haben, zunächst für $a \neq b$:

(1): a, b, e, f, g	(4): a, f, b, e, g	(7): a, f, e, g, b
(2): a, b, f, e, g	(5): a, g, b, f, e	(8): a, g, e, f, b
(3): a, b, f, g, e	(6): a, f, g, b, e	

Ist $a = b$, so reduzieren sich, weil wir bei der Transformation π auf der Kante a zuerst den Knotenpunkt A und dann B einfügen, diese acht Fälle auf die folgenden drei

(1'): a, e, f, g (2'): a, f, e, g (3'): a, f, g, e

Wann ist $(Y_2', Y_3') \in \overline{\mathfrak{Y}}_2(m+2)$?

Bezeichne $\overline{Y}_3$ den kontinuierlich gerichteten Kreis, welchen man uas Y_3 erhält, wenn man die Richtungen sämtlicher Kanten ändert, stehe $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ für die Kanten, die sich aus e, f, g bei dieser Richtungsänderung ergeben, und sei ${}_2Z_3$ der in den Kanten aus Y_2 und $\overline{Y}_3$ alternierende (eindeutig bestimmte) Eulersche Zyklus von $Y_2 \cup \overline{Y}_3$, so gilt, wie man aus den Fällen (1)–(8) folgern kann, da c und d bei π analog wie a und b durch je zwei neue Kanten ersetzt werden, die A bzw. B zum gemeinsamen Endpunkt haben: (Y_2', Y_3') ist aus $\overline{\mathfrak{Y}}_2(m+2)$ genau dann, wenn die Kanten c, $d, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ in ${}_2Z_3$ eine der folgenden Reihenfolgen haben:

$(\bar{1})$: $\bar{g}, \bar{f}, \bar{e}, d, c$	$(\bar{4})$: $\bar{g}, \bar{e}, d, \bar{f}, c$	$(\bar{7})$: $d, \bar{g}, \bar{e}, \bar{f}, c$
$(\bar{2})$: $\bar{g}, \bar{e}, \bar{f}, d, c$	$(\bar{5})$: $\bar{e}, \bar{f}, d, \bar{g}, c$	$(\bar{8})$: $d, \bar{f}, \bar{e}, \bar{g}, c$
$(\bar{3})$: $\bar{e}, \bar{g}, \bar{f}, d, c$	$(\bar{6})$: $e, d, g, \bar{f}, c$	

Ist $c = d$, so reduzieren sich diese acht Fälle auf die Fälle:

$$(\bar{7}'): c, \bar{g}, \bar{e}, \bar{f} \quad \text{und} \quad (\bar{8}'): c, \bar{f}, \bar{e}, \bar{g} .$$

Gibt es für einen Graphen $Y_3(m)$ (mindestens) eine Transformation $\varkappa\pi$, sodaß $\varkappa\pi(Y_3(m))$ ein Graph $Y_3(m+2)$ ist, so bezeichnen wir diese Transformation mit τ und nennen $Y_3(m)$ τ-transformierbar.

Satz 6. *Für $m \geqq 5$ ist jeder Graph $Y_3(m)$ τ-transformierbar.*

Beweis. Sei Y ein beliebiger Graph $Y_3(m)$ mit der Zerlegung (Y_1, Y_2, Y_3) und $m > 1$.

Wir wählen aus Y_2 eine beliebige Kante PQ (welche wegen $m > 1$ nicht Schlinge sein kann) und setzen $c = d = PQ$. Dann wählen wir für a die zu P hinführende Kante von Y_1 und setzen b gleich a. – Die Kante e sei die von Q wegführende, die Kante f die von P wegführende und g die zu Q hinführende Kante von Y_3.

Wir behaupten, daß wir die Kanten a, b, c, d, e, f, g derart gewählt haben, daß $\varkappa\pi(Y)$ definiert und ein Graph $Y_3(m+2)$ ist. – Beweis: *Erstens*: Die Kanten e, f, g sind paarweise verchieden, denn der einzig denkbare Fall einer Gleichheit, nämlich $f = g$, kann nicht eintreten, denn sonst wäre $P, c, Q, \bar{f}, P$ ein in Kanten aus Y_2 und $\bar{Y}_3$ alternierender Zyklus von $Y_2 \cup \bar{Y}_3$, der nicht mehr fortsetzbar wäre, im Widerspruch dazu, daß (Y_2, Y_3) aus einer Menge $\mathfrak{Y}_2(m)$ mit $m > 1$ ist. – *Zweitens*: Im Kreise Y_3 folgt e unmittelbar auf g, daher kann die Reihenfolge der aus Y_3 ausgewählten Kanten nur e, f, g sein. – *Drittens*: Durchlaufen wir beginnend bei P den alternierenden Eulerschen Zyklus ${}_2Z_3$ von $Y_2 \cup \bar{Y}_3$, so folgt zunächst auf c die Kante $\bar{g}$. Dann muß $\bar{e}$ (vor $\bar{f}$) folgen, denn wäre $\bar{f}$ die nächste Kante, so wäre ${}_2Z_3$ nach dem Durchlaufen von $\bar{f}$ zu Ende, obwohl $\bar{e}$ noch nicht vorgekommen ist; also ist die Reihenfolge der ausgewählten Kanten in ${}_2Z_3 : c, \bar{g}, \bar{e}, \bar{f}$, d. i. der Fall $(7')$ von oben. – *Viertens*: Durchlaufen wir ${}_1Z_3$: Auf a folgt sicher f, die Reihenfolge der übrigen Kanten ist entweder g vor e oder e vor g. Das aber sind die Fälle $(2')$ oder $(3')$ von oben.

Satz 7. *Für $m \geqq 5$ gibt es eine Transformation, mit deren Hilfe man jeden beliebigen paaren Hamiltonschen Graphen vom Grad $n < 5$ mit $2m$ Knotenpunkten auf einen n-regulären paaren Hamiltonschen Graphen mit $2m + 4$ Knotenpunkten transformieren kann.*

Beweis. Zunächst erweitern wir die Definion von τ wie folgt: $\tau(Y_2(m) := \pi(Y_2(m))$ und $\tau(Y_1(m))$ sei der Graph, der aus $Y_1(m)$ entsteht, wenn man auf zwei (nicht notwendigerweise verschiedenen) Kanten a und b so wie bei π Knotenpunkte A und B einfügt.

Sei X ein paarer Hamiltonscher Graph vom Grad $n < 5$ und $2m$ Knotenpunkten mit $m \geqq 5$.

Nach Satz 1 gibt es dann einen Graphen $Y_{n-1}(m)$, sodaß $\varepsilon(Y_{n-1}(m)) = X$ ist.

Da τ auf einen Graphen $Y_1(m)$ und π auf einen Graphen $Y_2(m)$ trivialerweise ausübbar ist und gemäß Satz 6 jeder Graph $Y_3(m)$ für $m \geqq 5$ τ-transformierbar ist, können wir den Graphen $\varepsilon(\tau(\varepsilon^{-1}(X)))$ bilden; dieser ist paar, Hamiltonsch, vom Grad n und hat $2m + 4$ Knotenpunkte. — $\varepsilon\tau\varepsilon^{-1}$ ist also die in Satz 7 gesuchte Transformation.

Der einfachste nichttriviale Fall, daß ein *paarer Hamiltonscher Graph zugleich Eulerscher Graph* ist, findet sich in den paaren Hamiltonschen Graphen vom Grad 4.

Im folgenden sei X stets ein solcher Graph, und es seien X_1, X_2, X_3 und X_4 stets Linearfaktoren von X, in welche X derart zerfällt, daß die Vereinigung von je zwei Linearfaktoren einen Hamiltonschen Kreis von X ergibt. — Dafür schreiben wir: $X \doteq X_1X_2X_3X_4$.

Nach [3], Satz 2, bzw. [2], Theorem 5, besitzt jedes X eine Eulersche Linie, in der alternierend auf eine Kante aus $X_1 \cup X_2$ eine Kante aus $X_3 \cup X_4$ folgt.

Wir fragen uns: Besitzt jedes X auch eine Eulersche Linie, deren Kanten alternierend aus X_1, X_2, X_3 und X_4 sind — oder, wie wir sagen werden, deren Kanten in X_1, X_2, X_3 und X_4 alternieren?

Wie schon einfache Beispiele zeigen, ist dies nicht der Fall, es gilt jedoch der folgende

Satz 8. *Für jede zulässige Knotenpunktsanzahl gibt es einen paaren Hamiltonschen Graphen $X \doteq X_1X_2X_3X_4$, der eine Eulersche Linie besitzt, deren Kanten in X_1, X_2, X_3 und X_4 alternieren.*

Dabei heiße eine Knotenpunktsanzahl m' *zulässig*, wenn es zu m' einen paaren Hamiltonschen Graphen vom Grad 4 mit m' Knotenpunkten gibt.

Den Beweis von Satz 8 führen wir mittels zweier Hilfssätze, welchen folgende Definition zu Grunde gelegt wird:

Sei $\overline{Y}_3(m)$ derjenige Graph, den wir aus einem Graphen $Y_3(m)$ mit der Zerlegung (Y_1, Y_2, Y_3) erhalten, indem wir die Richtungen sämtlicher Kanten von Y_3 ändern, und sei $\overline{Y}_3$ der dabei aus Y_3 entstehende kontinuierlich gerichtete Kreis, dann bezeichnen wir eine Kantenfolge von $Y_3(m)$, welche bei der Transformation von $Y_3(m)$ auf $\overline{Y}_3(m)$ in einen Eulerschen Zyklus von $\overline{Y}_3(m)$ übergeht, dessen Kanten alternierend aus Y_1, Y_2 und $\overline{Y}_3$ sind, als „in $Y_1, Y_2, \overline{Y}_3$ alternierende *Eulersche Kette*".

Hilfssatz 1. *Für jedes ungerade $m \neq 3$ gibt es einen Graphen $Y_3(m)$, der eine in $Y_1, Y_2, \overline{Y}_3$ alternierende Eulersche Kette besitzt.*

Beweis. Für $m = 1$ ist der Hilfssatz trivial. Für $m = 5$ leistet etwa der Graph, welcher die kantendisjunkte Vereinigung der kontinuierlich gerichteten Kreise $Y_1 : P_1, a_1, P_2, a_2, P_3, a_3, P_4, a_4, P_5, a_5, P_1$, $Y_2 : P_1, b_1, P_3, b_2, P_5\ b_3, P_2, b_4, P_4, b_5, P_1$ und $Y_3 : P_1, c_1, P_2, c_2, P_3, c_3, P_4, c_4, P_5, c_5, P_1$, das Gewünschte, und für $m \geqq 5$ kann man unschwer nachprüfen, daß die zum Beweis von Satz 6 definierte

Transformation τ [5]) einen Graphen $Y_3(m)$, welcher eine in $Y_1, Y_2, \overline{Y}_3$ alternierende Eulersche Kette besitzt, in einen Graphen $Y_3(m+2)$ überführt, welche ebenfalls eine in $Y_1, Y_2, \overline{Y}_3$ alternierende Eulersche Kette besitzt.

Hilfssatz 2. *Ist Y ein Graph $Y_3(m)$, der eine in $Y_1, Y_2, \overline{Y}_3$ alternierende Eulersche Kette K besitzt, so ist $\varepsilon(Y)$ ein Graph $X \doteq X_1X_2X_3X_4$, welcher eine Eulersche Linie* **L** *besitzt, deren Kanten in X_1, X_2, X_3 und X_4 alternieren.*

Beweis. Gemäß Satz 1 bzw. dessen Beweis ist $\varepsilon(Y)$ ein Graph $X \doteq X_1X_2X_3X_4$ mit $E(X_\nu) = E'(Y_\nu)$ [6]) für $\nu = 1, 2, 3$ und $E(X_4) = \{P_1P_2 \mid P \in V(Y)\}$. Wir zeigen: K geht bei ε über in L.

Sei P beliebig aus $V(Y)$ und seien $a_1 \in E(Y_1)$, $b_1 \in E(Y_2)$ und $c_1 \in E(Y_3)$ diejenigen Kanten von Y, die P zum Zielpunkt haben, $a_2 \in E(Y_1)$, $b_2 \in E(Y_2)$ und $c_2 \in E(Y_3)$ diejenigen Kanten von Y, die in P ihren Anfang nehmen, und $a'_1, b'_1, c'_1, a'_2, b'_2, c'_2$ die (ungerichteten) Kanten, die man aus $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ erhält, wenn man von den Richtungen der Kanten absieht. Dann gilt:

Der Knotenpunkt P wird in K genau dreimal durchlaufen, und zwar in den folgenden Teilfolgen von K, $T_1 : a_1, P, b_2, T_2 : b_1, P, c_1$, und $T_3 : c_2, P, a_2$, und diese Teilfolgen gehen bei ε über in die Folgen $\varepsilon(T_1) : a'_1, P_1, b'_2$, $\varepsilon(T_2) : b'_1, P_2, c'_1$ und $\varepsilon(T_3) : c'_2, P_1, P_1P_2, P_2, a'_2$.

Da dies für jedes P aus K gilt und K bei ε sichtlich in eine Eulersche Linie von X übergeht, folgt daraus unmittelbar die Behauptung unseres Hilfssatzes.

Satz 8 ist eine unmittelbare Konsequenz der Hilfssätze 1 und 2.

Literatur

[1] *König D.:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig (1936).

[2] *Kotzig A.:* Eulerian lines in 4-valent graphs and their transformations, in Theory of Graphs. Acad. Press: New York and London (1968) 219—230.

[3] *Kotzig A.:* Eulerovské čiary a rozklady pravidelného grafu párneho stupňa na dva faktory rovnakého stupňa. Mat.-fyz. čas. *6* (1956) 133—136.

[4] *Kotzig A.:* Hamilton graphs and Hamilton circuits. Proc. of the Symp. in Smolenice (1963) 63—82.

[5] *Kotzig A.:* Построение гамильтоновских графов третьей степени. Čas. pěst. mat. *87* (1962) 148—168.

[6] *Wagner K.:* Graphentheorie. Bibl. Inst., Mannheim (1970).

Anschrift des Verfassers: IV. Inst. f. Math. d. Techn. Hochsch. A-1040 Wien, Argentinierstr. 8/8a, Österreich.

[5]) Siehe Beweisanfang.

[6]) Der Strich bei E bedeutet, daß wir von den Richtungen der Kanten absehen.