Willibald Dörfler
Automorphismen von X-Summen von Graphen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), No. 4, 581–589

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101127

Czechoslovak Mathematical Journal, 22 (97) 1972, Praha

AUTOMORPHISMEN VON X-SUMMEN VON GRAPHEN

WILLIBALD DÖRFLER, Wien

(Eingegangen am 19. August 1971)

Das lexikographische Produkt von Graphen und Mengensystemen und seine Verallgemeinerung, die X-Summe, wurden bereits von verschiedenen Autoren (sh. Literaturverzeichnis) untersucht. Die Fragestellung war, unter welchen Bedingungen das Produkt nur natürliche Automorphismen besitzt. In der vorliegenden Arbeit wird die Automorphismengruppe des lexikographischen Produktes und der X-Summe auf Kommutativität, Transitivität, Regularität und Primitivität untersucht.

Ein Graph X besteht aus einer Menge $V(X)$, den Knoten von X, und einer Menge $E(X)$ von ungeordneten Paaren $[x, y]$ verschiedener Elemente von $V(X)$, den Kanten von X. Es ist $|X| = |V(X)|$. X heißt ein endlicher Graph, wenn $|X| < \infty$ gilt. Ist $A \subset V(X)$, so wird mit $[A]$ der von A in X aufgespannte Teilgraph bezeichnet. Ein Weg in X ist eine Folge von verschiedenen Knoten x_i, $i = 1, \ldots, n, n + 1$ mit $[x_i, x_{i+1}] \in E(X)$, $i = 1, \ldots, n$ und der Weg verbindet x_1 mit x_{n+1}. X heißt zusammenhängend, wenn je zwei Knoten von X durch einen Weg in X verbunden sind.

Es seien X, Y zwei Graphen. Eine bijektive Abbildung $\varphi : V(X) \to V(Y)$ heißt Isomorphismus von X auf Y, wenn $[x, y] \in E(X)$ ist genau dann, wenn $[\varphi x, \varphi y] \in E(Y)$ ist. Ein Isomorphismus φ von X auf X heißt Automorphismus. Die Gruppe der Automorphismen von X wird mit $G(X)$ bezeichnet. X heißt asymmetrisch, wenn $|G(X)| = 1$ ist.

Definition. Gegeben sei ein Graph X mit $|X| > 1$ und Graphen Y_x, $x \in V(X)$, deren Knotenmengen paarweise disjunkt sind. Unter der *X-Summe Z der Y_x* vesteht man dann folgenden Graphen:

$$\text{(I)} \qquad V(Z) = \bigcup_{x \in V(X)} V(Y_x)$$

$$\text{(II)} \qquad E(Z) = \bigcup_{x \in V(X)} E(Y_x) \cup \{[z_1, z_2] \mid z_1 \in V(Y_{x_1}),\ z_2 \in V(Y_{x_2}),\ [x_1, x_2] \in E(X)\}\,.$$

Sind die Knotenmengen der Y_x nicht paarweise disjunkt, so ist ihre X-Summe Z erklärt als die X-Summe der Graphen $\bar{Y}_x$ mit $V(\bar{Y}_x) = \{(x, y) \mid y \in V(Y_x)\}$, $E(Y_x) = \{[(x, y_1), (x, y_2)] \mid [y_1, y_2] \in E(Y_x)\}$. Für die X-Summe der Y_x werden wir kurz $X(Y_x)$ schreiben. Eine X-Summe $X(Y_x)$ mit $|X| > 1$ heißt echt, wenn $|Y_x| > 1$ für mindestens ein $x \in V(X)$ gilt. Sind in $Z = X(Y_x)$ alle $Y_x \cong Y$, so heißt $X(Y_x)$ das lexikographische Produkt $X \circ Y$ von X und Y. Eine X-Summe ist *zusammenhängend* genau dann, wenn X zusammenhängend ist.

Ist $E(X) = \emptyset$, so heißt $X(Y_x)$ die *Summe* der Graphen Y_x. Ist X vollständig, so heißt $X(Y_x)$ die *Kosumme* (vgl. [9]) der Graphen Y_x. Mit $+$ wird die Summe, mit $\oplus$ die Kosumme (bei endlich vielen Graphen) bezeichnet. Ist $\bar{X}$ das Komplement von X, so gilt $\overline{X + Y} = \bar{X} \oplus \bar{Y}$. Ein Graph heißt *prim* bezüglich der Summe (Kosumme), wenn er sich nicht als Summe (Kosumme) zweier nicht leerer Graphen darstellen läßt. Jeder Graph hat eine eindeutige Darstellung als Summe primer Summanden, nämlich seiner Zusammenhangskomponenten. Ebenso hat jeder Graph eine eindeutige Darstellung als Kosumme primer Kosummanden. Ist $X = X_1 + X_2$, $|X_i| \geqq 1$, $i = 1, 2$, so ist X prim bezüglich der Kosumme, und aus $X = X_1 \oplus X_2$ folgt, daß X prim bezüglich der Summe ist.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset V(X)$ heißt *nach außen frei in* X, wenn aus $[x, a_0] \in E(X)$ für ein $a_0 \in A$ und ein $x \in V(X) - A$ folgt, daß $[x, a] \in E(X)$ ist für alle $a \in A$. Ein Teilgraph H von X *heißt nach außen frei in* X, wenn $V(H)$ nach außen frei in X ist.

Die leere Menge, einzelne Knoten und $V(X)$ bilden die trivialen nach außen freien Teilmengen. In $X(Y_x)$ ist für jedes x die Knotenmenge $V(Y_x)$ eine nach außen freie Teilmenge, was direkt aus der Definition der X-Summe folgt. Somit entspricht jeder Darstellung eines Graphen Z als X-Summe von Graphen Y_x eine Partition von $V(Z)$ in nach außen freie Teilmengen und umgekehrt. Wenn man ausgehend von einer Partition M: $V(Z) = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ in nach außen freie Teilmengen A_α den Graphen Z/M definiert durch

$$V(Z/M) = \{A_\alpha\}\,, \quad \alpha \in I$$

$$E(Z/M) = \{[A_\alpha, A_\beta] \mid \exists x \in A_\alpha,\ y \in B_\beta,\ [x, y] \in E(Z)\}\,,$$

so ist offensichtlich $Z \cong Z/M\,([A_\alpha])$.

Sind $V(Z) = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ und $V(Z) = \bigcup_{\beta \in K} B_\beta$ zwei Partitionen von $V(Z)$ in nach außen freie Teilmengen, sodaß gilt: $A_{\alpha_0} = \bigcup_{\beta \in K'} B_\beta$ mit $K' \subset K$ und $|B_\beta| = 1$ für $\beta \in K'$, für jedes $\alpha \neq \alpha_0$ ist $A_\alpha = B_{\beta(\alpha)}$ und jedes B_β, $\beta \in K - K'$ tritt hier auf, so sagen wir, daß die Partition der B_β durch Auflösen von A_{α_0} in die Knoten aus der Partition der A_α hervorgeht.

Lemma 1. *Es seien A und B nach außen freie Teilmengen in X. Dann ist auch $A \cap B$ nach außen frei in X. Ist $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ nach außen frei in X. Ist $A \cap B \neq \emptyset, A, B$, so ist $[A \cap B]$ entweder Summand oder Kosummand von $[A]$, $[B]$ und $[A \cup B]$. Insbesondere sind dann $A - B$ und $B - A$ nach außen frei in X.*

Beweis. Es wird nur gezeigt, daß unter der Voraussetzung des Lemmas $[A \cap B]$ entweder Summand oder Kosummand von $[A]$ ist. Alles andere ergibt sich leicht daraus und aus der Definition von „nach außen frei". Zunächst sei für $x_0 \in A \cap B$ und $y_0 \in A - B$ die Kante $[x_0, y_0] \in E(X)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} &[x, y_0] \in E(X) \quad \text{für alle} \quad x \in B \Rightarrow \\ &[x, y] \in E(X) \quad \text{für alle} \quad x \in B - A\,, \quad y \in A \Rightarrow \\ &[x, y] \in E(X) \quad \text{für alle} \quad x \in A \cap B\,, \quad y \in A - B\,. \end{aligned}$$

Also ist $[A \cap B]$ Kosummand von A. Gibt es keine Kante zwischen Knoten aus $A \cap B$ und $A - B$, so ergibt sich analog, daß $A \cap B$ Summand von A ist.

Wir nennen einen Graphen Z *unzerlegbar*, wenn sich Z nicht als echte X-Summe mit einem geeigneten X darstellen läßt.

Satz 1. *Es sei Z ein Graph ohne nach außen freie vollständige Teilgraphen mit mehr als zwei Knoten. Besitzt Z eine Darstellung als X-Summe unzerlegbarer Graphen Y_x, so ist diese bis auf Auflösungen in Knoten eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Voraussetzungen des Satzes seien erfüllt und es seien $V(Z) = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ und $V(Z) = \bigcup_{\beta \in K} B_\beta$ zwei Zerlegungen in nach außen freie Teilmengen, sodaß alle $[A_\alpha]$ und $[B_\beta]$ unzerlegbar sind, und ferner für wenigstens ein α $|A_\alpha| > 1$ und ein β $|B_\beta| > 1$ gilt. Wir betrachten die Durchschnitte $A_\alpha \cap B_\beta$ für $(\alpha, \beta) \in I \times K$. Dann ist für jedes $\alpha \in I$ $A_\alpha = \bigcup_\beta (A_\alpha \cap B_\beta)$. Es werde α so gewählt, daß $|A_\alpha| > 1$ ist, und es sei nicht $A_\alpha = B_\beta$ für ein β. Der Fall, daß für alle β mit $A_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$ $|B_\beta| = 1$ ist, entspricht der Auflösung von A in die Knoten und widerspricht nicht der Behauptung des Satzes. Ist jedoch für ein β mit $A_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$ $|B_\beta| > 1$, so kann B_β nicht in A_α enthalten sein, weil A_α unzerlegbar ist und $A_\alpha = \bigcup_\beta (A_\alpha \cap B_\beta)$ eine Partition von A_α in nach außen freie Teilmengen ergibt. Ebenso sind $A_\alpha \subset B_\beta$ und $|A_\alpha \cap B_\beta| > 1$ unmöglich. Ist $|A_\alpha - B_\beta| = 1$, so muß aus demselben Grund $|A_\alpha - B_\beta| = |B_\beta - A_\alpha| = 1$ sein, woraus aber mit Lemma 1 folgt, daß $A_\alpha \cup B_\beta$ ein Dreieck in Z aufspannt, das in Z nach außen frei ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Als einzige Möglichkeit bleibt also die Auflösung von A in die Knoten. Ebenso sieht man, daß für jedes β entweder B_β gleich einem A_α ist oder $B_\beta = \bigcup_{\alpha \in I'} A_\alpha$ mit $|A_\alpha| = 1$ für $\alpha \in I' \subset I$ gilt.

Definition. Ein Automorphismus φ von $X(Y_x)$ heißt *natürlich*, wenn für alle $x \in V(X)$ gilt $\varphi Y_x = Y_{x'}$. Analog wird ein natürlicher Isomorphismus zweier X-Summen definiert.

Jedem natürlichen Automorphismus φ von $X(Y_x)$ entspricht ein Automorphismus μ von X, der definiert ist durch

$$\mu x = x' \Leftrightarrow \varphi Y_x = Y_{x'} \quad \text{für alle} \quad x \in V(X)\,.$$

Die natürlichen Automorphismen bilden eine Gruppe, die aber im allgemeinen nicht gleich der Automorphismengruppe von $X(Y_x)$ ist. Die natürlichen Automorphismen eines lexikographischen Produktes $X \circ Y$ bilden das Kranzprodukt $G(X) \circ G(Y)$ von $G(X)$ und $G(Y)$. Dabei ist das Kranzprodukt zweier Permutationsgruppen G auf M und H auf N erklärt als die Gruppe aller Permutationen φ auf $M \times N$, für die gilt

$$\varphi(x, y) = (\mu x, \varphi_x y) \quad \text{mit} \quad \mu \in G\,, \quad \varphi_x \in H\,, \quad (x, y) \in M \times N\,.$$

In [5] wird untersucht, unter welchen Bedingungen $X(Y_x)$ nur natürliche Automorphismen besitzt. Um das Resultat anzuführen, brauchen wir noch folgenden Begriff:

Definition. Sind X und Y zwei Graphen, so heißt die Abbildung φ von $V(X)$ in $V(Y)$ ein *starker Homomorphismus*, wenn gilt: ist für $x, y \in V(X)$ $\varphi x \neq \varphi y$' so ist $[\varphi x, \varphi y] \in E(Y)$ genau dann, wenn $[\varphi^{-1}x]$ Kosummand von $[\varphi^{-1}x \cup \varphi^{-1}y]$ ist. In $Z = X(Y_x)$ sei für $A \subset V(X)$ $S(A) := [\bigcup_{x \in A} V(Y_x)]$.

Satz A. *Es sei $Z = X(Y_x)$. Dann besteht $G(Z)$ nur aus natürlichen Automorphismen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(I) *Gibt es $x' \neq x''$ in $V(X)$ mit $[x', x''] \notin E(X)$ und ist $\{x', x''\}$ nach außen frei in X, so ist $Y_{x'}$ prim zur Summe.*

(II) *Gibt es $x' \neq x''$ in $V(X)$ mit $[x', x''] \in E(X)$ und ist $\{x', x''\}$ nach außen frei in X, so ist $Y_{x'}$ prim zur Kosumme.*

(III) *Ist M eine Partition von $V(X)$ in nach außen freie Teilmengen A_α und $\varphi : X \to X/M$ ein starker Homomorphismus von X auf X/M mit*

$$S(A_\alpha) \cong S(\varphi^{-1}A_\alpha) \quad \textit{für alle} \quad \alpha\,,$$

so gibt es zwischen $S(A_\alpha)$ und $S(\varphi^{-1}A_\alpha)$ nur natürliche Isomorphismen.

(IV) *Ist $c \in V(X)$ Summand oder Kosummand von X, dann ist Y_c nicht die X-Summe von Graphen Y'_x, $x \in V(X)$, mit $Y'_x \cong Y_x$ für $x \neq c$.*

Ist $Z = X \circ Y$ und ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so gibt es einen nicht natürlichen Automorphismus von Z.

Wir kommen jetzt zur Untersuchung der Automorphismengruppe einer X-Summe.

Lemma 2. *Ist $A \subset V(X)$ nach außen frei in X und ist φ ein Automorphismus von $[A]$, so ist die Abbildung $\bar{\varphi} : V(X) \to V(X)$ mit $\bar{\varphi}x := \varphi x$ für $x \in A$ und $\bar{\varphi}x := x$, $x \notin A$ ein Automorphismus von X.*

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus der Voraussetzung, daß A nach außen frei in X ist.

Aus Lemma 2 folgt sofort:

Satz 2. *Ist die Automorphismengruppe $G(Z)$ der X-Summe $Z = X(Y_x)$ abelsch, so ist $G(Y_x)$ abelsch für alle $x \in V(X)$.*

Satz 3. *Es sei $Z = X(Y_x)$ und $G(Z)$ abelsch. Gibt es zu $z \in V(Y_x)$ ein $\psi \in G(Z)$ mit $\psi z \notin V(Y_x)$, so ist z Fixknoten von $G(Y_x)$.*

Beweis. Die Voraussetzungen seien erfüllt. Angenommen, es gibt $\varphi \in G(Y_x)$ mit $\varphi z \neq z$. Dann sei $\bar{\varphi}$ der φ nach Lemma 2 entsprechende Automorphismus von Z. Es gilt: $\bar{\varphi}\psi z = \psi z \neq \psi\bar{\varphi}z$, im Widerspruch dazu, daß $G(Z)$ abelsch ist.

Satz 4. *Es sei $Z = X \circ Y$ und $G(Z)$ abelsch. Dann sind $G(X)$ und $G(Y)$ abelsch und mindestens einer der beiden Faktoren X und Y ist asymmetrisch.*

Beweis. Zuerst bemerken wir, daß jeder Automorphismus $\mu \in G(X)$ natürliche Automorphismen von $X \circ Y$ induziert und daher $G(X)$ sicher abelsch ist. $G(Y)$ ist abelsch nach Satz 2. Ist $|G(X)| > 1$, so ist nach Satz 3 Y asymmetrisch. Ist $|G(Y)| > 1$, dann folgt wieder aus Satz 3, daß X asymmetrisch ist.

Satz 5. *Es sei $Z = X \circ Y$ und $G(Z)$ abelsch. Ist $|G(Y)| > 1$, so besitzt Z nur natürliche Automorphismen.*

Beweis. Wie nehmen an, daß unter den Voraussetzungen des Satzes Z nicht nur natürliche Automorphismen besitzt. Dann ist jedoch eine der Bedingungen (I)–(IV) aus Satz A nicht erfüllt. Da $|G(Y)| > 1$ ist, gibt es ein $\varphi \in G(Y)$ und ein $\bar{y} \in V(Y)$ mit $\varphi\bar{y} \neq \bar{y}$. Ist (I) nicht erfüllt, so ist $Y = Y_1 + Y_2$ und es sei $\bar{y} \in V(Y_1)$. Die Abbildung $\psi : V(Z) \to V(Z)$ mit $\psi(x', y) = (x'', y)$, wenn $y \in V(Y_1)$, $\psi(x'', y) = (x', y)$, wenn $y \in V(Y_1)$, und $\psi z = z$ sonst, ist ein Automorphismus von Z mit $\psi(x', \bar{y}) \notin V(Y_x)$. Andererseits ist nach Lemma 2 auch $\bar{\varphi}$ mit $\bar{\varphi}(x', y) = (x', \varphi y)$ und $\bar{\varphi}z = z$ sonst ein Automorphismus von Z, was jedoch im Widerspruch zu Satz 3 steht. Analog ergibt sich ein Widerspruch, wenn (II) nicht erfüllt ist. Sind (I) und (II) erfüllt, so ergibt sich aus dem Beweis des Satzes A in [5], daß für einen nicht natürlichen Automorphismus ψ von Z gelten muß: ist für ein $x \in V(X)$ $\psi\, V(Y_x)$ nicht enthalten in einem $V(Y_{x'})$, so ist für $C_x = \{x' \mid x' \in V(X), \psi\, V(Y_x) \cap V(Y_{x'}) \neq \emptyset\}$ $|C_x| \geqq 3$ und für höchstens ein $x' \in C_x$ ist $\psi\, V(Y_x) \cap V(Y_{x'}) \neq V(Y_{x'})$. Ist daher (III) nicht erfüllt, aber gelten (I) und (II), und ist ψ ein nicht natürlicher Automorphismus von Z, so muß es ein $Y_x(\cong Y)$ geben mit $\psi\, V(Y_x) \cap V(Y_x) = \emptyset$ oder $\psi^{-1}\, V(Y_x) \cap V(Y_x) = \emptyset$, was wieder

Satz 3 widerspricht. Ist schließlich (IV) nicht erfüllt, so sieht man leicht, daß es einen nicht natürlichen Automorphismus ψ von Z gibt mit $\psi V(Y_x) \cap V(Y_x) = \emptyset$ für ein x. Also führt jeder der Fälle (I)–(IV) zu einem Widerspruch, womit der Satz bewiesen ist.

Definition. Eine Permutationsgruppe G auf der Menge M heißt *transitiv*, wenn es zu $x, y \in M$ ein $\varphi \in G$ gibt mit $\varphi x = y$.

Im folgenden verstehen wir unter einer *maximalen nach außen freien Teilmenge* $A \subset V(X)$ eine nichttriviale nach außen freie Teilmenge, sodaß daraus, daß $B \supset A$ gilt und B nach außen frei in X ist, folgt, daß $B = A$ oder $B = V(X)$ ist. Entsprechend ist eine *minimale nach außen freie Teilmenge* erklärt.

Satz 6. *Es sei Z nicht vollständig und $E(Z) \neq \emptyset$, und $G(Z)$ sei transitiv. Gibt es in Z eine maximale nach außen freie Teilmenge A, so ist $Z = X \circ Y$ mit geeigneten Graphen X und $Y(|Y| \geqq 2)$, sodaß $G(Z)$ isomorph dem Kranzprodukt $G(X) \circ G(Y)$ ist.*

Beweis. Die Voraussetzungen des Satzes seien erfüllt. Es sei $\varphi \in G(Z)$ beliebig. Es kann dann nicht sein, daß $\varphi A \subset A$ oder $A \subset \varphi A$ ist, da mit A auch φA eine maximale nach außen freie Teilmenge ist. Wir betrachten zuerst den Fall, daß $A \cap \varphi A \neq A, \emptyset$ ist. Da A maximal ist, ergibt sich mit Lemma 1, daß $A \cup \varphi A = V(Z)$ ist, und daß Z daher entweder in eine Summe oder Kosumme von primen Graphen Y_α zerfällt. Dabei kann nicht für alle α $|Y_\alpha| = 1$ sein, weil sonst $E(Z) = \emptyset$ oder Z vollständig wäre. Aus der Transitivität folgt, daß alle $Y_\alpha \cong Y$ für ein Y sein müssen, also ist $Z \cong X \circ Y$, wobei für X entweder $E(X) = \emptyset$ ist oder X vollständig ist. Direkt oder mit Satz A ist zu sehen, daß $G(Z) \cong G(X) \circ G(Y)$ ist in beiden Fällen, weil $X \circ Y$ nur natürliche Automorphismen zuläßt. Es bleibt also zu betrachten, daß für alle $\varphi, \psi \in G(Z)$ entweder $\varphi A = \psi A$ oder $\varphi A \cap \psi A = \emptyset$ ist. Da alle φA, $\varphi \in G(Z)$ nach außen frei in X sind und $[A] \cong [\varphi A]$ gilt, ist dann $Z \cong X \circ [A]$, wobei $X = Z/M$ ist und M die Partition von $V(Z)$ in die φA, $\varphi \in G(Z)$, bedeutet. Aus der Maximalität von A folgt, daß X nur triviale nach außen freie Teilmengen besitzt, woraus sich mit Hilfe von Satz A die Beziehung $G(Z) \cong G(X) \circ G([A])$ ergibt.

Satz 7. *Es sei Z ein nicht vollständiger Graph mit transitiver Automorphismengruppe. Gibt es in Z einen nach außen freien vollständigen Teilgraphen H mit $|H| \geqq 2$, so gibt es eine Darstellung $Z \cong X \circ Y$ mit vollständigem Y, sodaß gilt $G(Z) \cong G(X) \circ G(Y)$.*

Beweis. Es sei Z ein Graph, der den Voraussetzungen des Satzes genügt. Wir zeigen zunächst, daß es einen eindeutig bestimmten, maximalen nach außen freien vollständigen Teilgraphen Y von Z gibt mit $V(Y) \supset V(H)$. Dazu sei $\{Y_\alpha\}$, $\alpha \in I$, eine bezüglich der Inklusion ihrer Knotenmengen total geordnete Familie von nach außen freien vollständigen Teilgraphen mit $V(Y_\alpha) \supset V(H)$. Dann ist auch $[W]$ mit $W = \bigcup_{\alpha \in I} V(Y_\alpha)$ nach außen frei und vollständig. Denn ist $[z, w] \in E(Z)$ für $z \notin W$, $w \in W$

und $x \neq w$ aus W beliebig, so gibt es ein $j \in I$ mit $w \in V(Y_j)$ und $x \in V(Y_j)$, sodaß auch $[z, x] \in E(Z)$ ist. Also ist W nach außen frei. Ebenso folgt, daß W vollständig ist. Mit dem Lemma von Zorn folgt die Behauptung. Daß der maximale Graph Y mit diesen Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, ergibt sich unmittelbar aus Lemma 1. Natürlich ist $Y \neq Z$, weil Z nicht vollständig ist.

Zum weiteren Beweis betrachten wir wieder alle Bilder des Teilgraphen Y unter den Automorphismen von $G(Z)$. Aus den Eigenschaften von Y folgt mit Lemma 1 sofort, daß für alle $\varphi, \psi \in G(Z)$ entweder $\varphi V(Y) = \psi V(Y)$ oder $\varphi V(Y) \cap \psi V(Y) = \emptyset$ ist. Da $\bigcup_{\in G(Z)} \varphi V(Y) = V(Z)$ ist, und alle $\varphi V(Y)$ nach außen frei sind, gilt $Z \cong X \circ Y$ mit geeignetem X. Angenommen $\psi \in G(X \circ Y)$ wäre nicht ein natürlicher Automorphismus von $X \circ Y$. Es bezeichne C_x für $x \in V(X)$ die Menge $\{w \mid w \in V(X), \psi V(Y_x) \cap \cap V(Y_w) \neq \emptyset\}$. Dann können wir annehmen, daß es ein $x \in V(X)$ gibt mit $|C_x| \geqq 2$. Denn ist $|C_x| = 1$ für alle $x \in V(X)$, so muß es Knoten x und x' in $V(X)$ geben mit $\psi V(Y_x) \subset V(Y_w)$ und $\psi V(Y_{x'}) \subset V(Y_w)$ für ein $w \in V(X)$. Dann genügt es aber ψ durch ψ^{-1} zu ersetzen. Da Y_x nach außen frei in Z und vollständig ist, ist C_x nach außen frei in X und C_x spannt in X einen vollständigen Teilgraphen auf, und daher ist auch $S(C_x) = [\{z \mid z \in V(Y_w), w \in C_x\}]$ in Z nach außen frei und vollständig, was aber der Maximalität (bezüglich beider Eigenschaften) von Y bzw. φY, $\varphi \in G(Z)$ widerspricht, denn es kann nicht $C_x = V(X)$ sein.

Durch Übergang zum Komplement erhält man den

Satz 7'. *Es habe Z mit $E(Z) \neq \emptyset$ eine transitive Automorphismengruppe. Gibt es in Z einen nach außen freien gesättigten Teilgraphen H mit $E(H) = \emptyset$ und $|H| \geqq 2$, so gibt es eine Darstellung $Z \cong X \circ Y$, wobei $E(Y) = \emptyset$ ist und $G(Z) \cong G(X) \circ G(Y)$ gilt.*

Satz 8. *Es sei Z ein Graph mit folgenden Eigenschaften: Z ist nicht vollständig und $E(Z)$ ist nicht leer, die Automorphismengruppe $G(Z)$ ist transitiv und in Z gibt es eine minimale nach außen freie Teilmenge. Dann gibt es eine Darstellung $Z \cong X \circ Y$, $|X|, |Y| \geqq 2$, sodaß $G(Z) \cong G(X) \circ G(Y)$ ist.*

Beweis. Es sei Z ein Graph mit den im Satz angegebenen Eigenschaften und A eine minimale nach außen freie Teilmenge von Z. Wir unterscheiden die Fälle $|A| = 2$ und $|A| \geqq 3$ und betrachten zunächst den zweiten Fall. Wegen der Minimalität von A kann für zwei Automorphismen $\varphi, \psi \in G(Z)$ nicht $\varphi A \subset \psi A$ gelten. Wäre $\varphi A \cap \cap \psi A \neq \emptyset$, $\varphi A, \psi A$ für ein Paar $\varphi, \psi \in G(T)$, so enthält entweder $\varphi A \cap \psi A$ oder $\varphi A - \psi A$ mehr als 2 Elemente und bildet nach Lemma 1 eine nach außen freie Teilmenge B mit $\varphi^{-1}B \subset A$, im Widerspruch zur Minimalität von A. Also muß für je zwei $\varphi, \psi \in G(Z)$ entweder $\varphi A = \psi A$ oder $\varphi A \cap \psi A = \emptyset$ sein und wie im Satz 6 folgt daraus, daß $Z \cong X \circ [A]$ mit geeignetem X ist. Aus dem Beweis oder direkt mit Hilfe der Minimalität von A sieht man, daß $G(Z) \cong G(X) \circ G([A])$ gilt. Es sei jetzt $|A| = 2$ und $A = \{x, y\}$. Ist $[x, y] \in E(Z)$, so ist $[A]$ ein nach außen freier vollständiger Teilgraph und die Behauptung folgt aus Satz 7. Ist $[x, y] \notin E(Z)$, so wendet man Satz 7' an.

Satz 9. *Es sei Z ein endlicher Graph mit transitiver Automorphismengruppe* $G(Z)$. *Ist* $Z \cong X(Y_x)$, *so ist* $G(Y_x)$ *transitiv für alle* $x \in V(X)$.

Beweis. Die Voraussetzungen seien erfüllt. Ist $|Y_x| = 1$, so ist nichts zu zeigen. Seien daher $z_1 \neq z_2$ zwei verschiedene Knoten aus $V(Y_x)$. Zu zeigen ist, daß ein Automorphismus φ von Y_x existiert mit $\varphi z_1 = z_2$. Dazu sei ψ ein Automorphismus von Z mit $\psi z_1 = z_2$. Ist $\psi\, V(Y_x) = V(Y_x)$, so ist die Einschränkung von ψ auf $V(Y_x)$ der gewünschte Automorphismus von Y_x. Also sei $\psi\, V(Y_x) \neq V(Y_x)$ und daher $V(Y_x) \cap \cap\, \psi\, V(Y_x) \neq \emptyset, V(Y_x), V(\psi Y_x)$, weil $|Y_x| < \infty$ ist. Dann ist aber $H = [V(Y_x) \cap \psi\, V(Y_x)]$ Summand oder Kosummand von $[V(Y_x) \cup \psi\, V(Y_x)]$ und $[V(Y_x) \cup \psi\, V(Y_x)]$ ist nach außen frei in Z. Im folgenden betrachten wir nur Summanden. Analog gilt die Überlegung für Kosummanden. Die Zerlegung von Y_x in Summanden ist eindeutig bis auf Isomorphie und Reihenfolge der Summanden. Daher sind die Summanden von Y_x bzw. von ψY_x, welche nicht in $Y_x \cap \psi Y_x$ liegen, eindeutig bestimmt. Da ψ ein Automorphismus von Z ist, gibt es daher zu jedem Summanden in $Y_x - \psi Y_x$ einen isomorphen Summanden in $\psi Y_x - Y_x$ und umgekehrt. Somit gibt es einen Automorphismus von $[V(Y_x) \cup \psi\, V(Y_x)]$, der $Y_x - \psi Y_x$ und $\psi Y_x - Y_x$ vertauscht und auf $V(Y_x) \cap \psi\, V(Y_x)$ die Identität ist. Ist wie in Lemma 2 $\bar{\alpha}$ der durch α induzierte Automorphismus von Z, so ist $\varphi = \bar{\alpha} \circ \psi \in G(Z)$ und es ist $\varphi z_1 = z_2$, sowie $\varphi\, V(Y_x) = V(Y_x)$.

Bemerkung. Im allgemeinen folgt aus der Transitivität von $G(Z)$ nicht, daß $G(X)$ transitiv ist. Für das lexikographische Produkt wurde Satz 9 von W. Imrich in [6] bewiesen.

Definition. Eine Permutationsgruppe G auf der Menge M heißt *regulär*, wenn G transitiv ist, und wenn aus $\alpha x = x$ für ein $\alpha \in G$ und ein $x \in M$ folgt, daß α die Identität ist.

Satz 10. *Es sei Z ein endlicher Graph mit regulärer Automorphismengruppe. Dann gibt es in Z nur triviale nach außen freie Teilmengen.*

Beweis. Es sei Z so wie im Satz angegeben. Für $|Z| > 2$ kann dann Z nicht vollständig sein und $E(Z)$ kann nicht leer sein, weil sonst $G(Z)$ nicht regulär wäre. Für $|Z| \leqq 2$ ist der Satz aber richtig. Gibt es in Z eine nicht triviale nach außen freie Teilmenge, so gibt es eine minimale solche Teilmenge wegen $|Z| < \infty$ und man kann Satz 8 anwenden. Also ist $Z \cong X \circ Y$, $|X|, |Y| \geqq 2$, mit $G(Z) \cong G(X) \circ G(Y)$, sodaß $G(Y)$ transitiv ist. Dann gibt es aber einen Automorphismus φ von Z, der nur auf genau einem Y_x von der Identität verschieden ist. Widerspruch zur Regularität von $G(Z)$.

Folgerung 1. *Für keinen Graphen X, $|X| < \infty$, gibt es eine endliche echte X-Summe $X(Y_x)$ mit regulärer Automorphismengruppe.*

Definition. Ist G eine Permutationsgruppe auf M, so heißt $B \subset M$ ein *Block* von G, wenn für alle $\varphi \in G$ entweder $\varphi B = B$ oder $\varphi B \cap B = \emptyset$ gilt. Die leere Menge, M und die einpunktigen Teilmengen von M sind die *trivialen Blöcke*. G heißt *primitiv*, wenn G transitiv ist und nur triviale Blöcke besitzt.

Satz 11. *Es sei Z ein endlicher Graph mit primitiver Automorphismengruppe. Dann ist entweder Z vollständig oder $E(Z) = \emptyset$ oder es gibt in Z nur triviale nach außen freie Teilmengen.*

Beweis. Jeder vollständige Graph und jeder Graph Z mit $E(Z) = \emptyset$ haben primitive Automorphismengruppen. Es sei also Z nicht vollständig und $E(Z) \neq \emptyset$. Wir verwenden wieder Satz 8. Gibt es in Z eine nach außen freie Teilmenge A, $|A| \geqq 2$, $A \neq V(X)$, so ist $Z \cong X \circ Y$, $|X|, |Y| \geqq 2$ und $X \circ Y$ besitzt nur natürliche Automorphismen. Das bedeutet jedoch, daß für jedes $x \in V(X)$ die Menge $V(Y_x)$ ein nichttrivialer Block von $G(Z)$ ist. Widerspruch!

Folgerung 2. *Keine echte endliche X-Summe von Graphen Y_x besitzt eine primitive Automorphismengruppe.*

Bemerkung. Die Aussage der Folgerung 2 gilt nicht für unendliche Graphen, was durch Beispiele gezeigt werden kann.

Literatur

[1] *W. Dörfler* und *W. Imrich*, Über die X-Summe von Mengensystemen. Combinat. Theory Appl., Colloquia math. Soc. János Bolyai *4*, 297—309 (1970).

[2] *W. Dörfler*, Über die X-Summe von gerichteten Graphen. Arch. Math. *22*, 24—36 (1971).

[3] *F. Harary*, On the group of the composition of two graphs. Duke Math. J. *26*, 29—34 (1959).

[4] *R. L. Hemminger*, The lexicographic product of graphs. Duke Math. J. *33*, 499—501 (1966).

[5] *R. L. Hemminger*, The Group of an X-Join of Graphs. J. combinat. Theory *5*, 408—418.

[6] *W. Imrich*, Assoziative Produkte von Graphen. Österr. Akad. Wiss. Math. Naturw. Kl. Sitzber. II *180*, 203—239 (1972).

[7] *G. Sabidussi*, The composition of graphs. Duke Math. J. *26*, 693—696 (1959).

[8] *G. Sabidussi*, The lexicographic product of graphs. Duke Math. J. *28*, 573—578 (1961).

[9] *A. A. Zykov*, Einige Eigenschaften linearer Komplexe (russ.) Mat. Sbor. *24*, 163—188 (1949). Engl. Übersetzung: Amer. Math. Soc. Transl. Nr. *79*, Providence, R.I., 1952.

Anschrift des Verfassers: Technische Hochschule Wien, III. Institut für Mathematik, Karlsplatz 13, A-1040 Wien, Österreich.