Břetislav Novák

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), No. 3, 495–507

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101118

Czechoslovak Mathematical Journal, 22 (97) 1972, Praha

ÜBER GITTERPUNKTE IN MEHRDIMENSIONALEN ELLIPSOIDEN

BŘETISLAV NOVÁK, Praha

(Eingelangt am 5. August 1971)

1. Einleitung. Es sei

$$Q(u) = Q(u_j) = \sum_{j,l=1}^{r} a_{jl} u_j u_l \tag{1}$$

eine positiv definite quadratische Form in r Variablen, wo $r \geqq 2$ eine natürliche Zahl ist. Bezeichnen wir mit D die Determinante der Form Q und sei $\bar{Q}$ die mit Q konjugierte Form. Weiter seien

$$b_1, b_2, \ldots, b_r, \quad M_1 > 0, M_2 > 0, \ldots, M_r > 0 \tag{2}$$

und

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \tag{3}$$

reelle Zahlen. Für $x \geqq 0$ sei

$$A(x) = \sum \exp\,(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j)\,,$$

wo über alle r-tupel $u = [u_1, u_2, \ldots, u_r]$, für welche $Q(u) \leqq x$ und $u_j \equiv b_j \pmod{M_j}$, $j = 1, 2, \ldots, r$ ist, summiert wird und sei

$$V(x) = \frac{\pi^{r/2} x^{r/2} \exp\,(2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j)}{\sqrt{(D)} \prod_{j=1}^{r} M_j \Gamma(\frac{1}{2}r + 1)}\, \delta\,,$$

wo $\delta = 1$ wenn alle Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$ ganz sind, sonst ist $\delta = 0$.

Die Funktion $A(x)$ ist offenbar in $[0, +\infty)$ von rechts stetig. Es sei $\lambda_0 = 0$ und $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ seien alle Unstetigkeitspunkte der Funktion $A(x)$. $A(x)$ ist also in jedem Intervall $[\lambda_m, \lambda_{m+1})$, $m = 0, 1, \ldots$ konstant. Bezeichnen wir $a_0 = A(0)$, $a_n = A(\lambda_n) - A(\lambda_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ Dann ist also

$$A(x) = \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m\,.$$

Die Funktion $A(x)$ wurde (unter verschiedener Voraussetzungen über die Form (1) und die Zahlen (2) und (3)) von vielen Autoren untersucht (vgl. z. B. die Literaturhinweise in den Arbeiten [6], [8], [10]). Wenn von unseren Erwägungen der Trivialfall, wenn $A(x) = 0$ für alle x ist, ausgeschlossen wird, gelten für die Funktion

$$P(x) = A(x) - V(x) \tag{4}$$

z. B. die folgenden Ergebnisse:

$$P(x) = O(x^{r/2 - r/(r+1)}), \quad P(x) = \Omega(x^{(r-1)/4})$$

(LANDAU [5], S. 11–84);

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{\lg|P(x)|}{\lg x} = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma}, \tag{5}$$

für Formen (1) der Gestalt

$$Q(u) = a_1(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + a_2(u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \ldots + u_{r_1+r_2}^2),$$

$a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $r = r_1 + r_2$, $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $\alpha_j = b_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$, wobei $\gamma = \gamma(a_2/a_1)$ das Supremum aller solcher $\beta > 0$ ist, für welche die Ungleichung

$$\left|\frac{a_2}{a_1} q - p\right| < \frac{1}{q^\beta}$$

unendlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen p, q besitzt (JARNÍK [3])[1]);

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{\lg|P(x)|}{\lg x} = \left(\frac{r}{4} - \frac{1}{2}\right) \frac{2\gamma + 1}{\gamma + 1} \tag{6}$$

für Formen der Gestalt (1) mit ganzzahligen Koeffizienten unter der Voraussetzung, dass die Zahlen (2) ganz sind, $b_1 = b_2 = \ldots = b_r = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = \alpha$, $r > 6$, $\gamma = \gamma(\alpha)$ (der Verfasser [7]).

Schon in seinen ursprünglichen Arbeiten untersuchte Landau die Funktionen $P_0(x), P_1(x), \ldots$, welche rekurrent mittels der Beziehungen

$$P_0(x) = P(x), \quad P_{n+1}(x) = \int_0^x P_n(t)\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

definiert sind, Im Jahre 1968 wendete sich Prof. V. JARNÍK erneut zu diesem Problemkreis und bewies in einer von seinen letzten Arbeiten (siehe [4]) unter anderem dieses höchstinteressante Ergebnis:

[1]) Für $\gamma = +\infty$ verstehen wir unter dem Wert des Ausdruckes (5) dessen Grenzwert für $\gamma \to +\infty$, d. h. $\frac{1}{2}r - 1$. Ähnlich in den übrigen Fällen.

Für $\varrho > 0$ sei[2])

$$P_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^x P(t)\,(x - t)^{\varrho-1}\,\mathrm{d}t\,. \tag{8}$$

Für $\varrho > \frac{1}{2}(r - 1)$ ist dann[3])

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2})\,, \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2})\,.$$

Es seien die Koeffizienten der Form (1) und die Zahlen (2) ganz, $\delta = 1$. Für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$ ist dann

$$P_\varrho(x) = O(x^{\frac{1}{2}r-1})\,, \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}r-1})$$

(Für $\frac{1}{2}r - 2 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$, $\varrho \geqq 0$ sind also bisher definitive Ergebnisse nicht bekannt-ausführlicher siehe [4].)

Das Ergebnis (5) veralgemeinert B. Diviš (siehe [1]) folgendermassen:

Es sei $\gamma = \gamma(a_2/a_1, a_3/a_1, \ldots, a_\sigma/a_1)$ das Supremum aller solcher $\beta > 0$, für welche die Ungleichungen

$$\left|\frac{a_j}{a_1} q - p_j\right| < \frac{1}{q^\beta}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, \sigma$$

unendlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen $q, p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ besitzen. Das Ergebnis (5) gilt dann auch für die Form (1) der Gestalt

$$Q(u) = a_1(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \\ + a_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_{r_1+r_2}^2) + \ldots + a_\sigma(u_{r_1+\ldots+r_{\sigma-1}+1}^2 + \ldots + u_r^2)$$

bei folgenden Voraussetzungen: $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \ldots, a_\sigma > 0$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma = r$, $r_j \geqq 2(\gamma + 1)/\gamma$, $j = 1, 2, \ldots, \sigma$, $b_j = \alpha_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

In der Arbeit [2] wird dann gezeigt, dass wir bei den gegebenen Voraussetzungen für $r_j \geqq 2(\varrho + 1)(\gamma + 1)/\gamma$, $j = 1, 2, \ldots, \sigma$ die Beziehung

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\lg|P_\varrho(x)|}{\lg x} = \frac{r}{2} - 1 - \frac{\varrho + 1}{\gamma}\,. \tag{9}$$

bekommen. (In [2] und auch in [1] sind noch einige Abschätzungen auch für den Fall, dass $r_j < 2(\varrho + 1)(\gamma + 1)/\gamma$ für manche j ist, angeführt und es werden etwas allgemeinere Formen untersucht.)

Das Ziel dieser Arbeit wird die Untersuchung der Funktion (8) im zweiten Fall sein. Das Hauptergebnis kann in dem folgenden Satz zusammengefasst werden.

---

[2]) Für ganze ϱ bekommen wir offenbar dieselben Funktionen wir in (7).

[3]) Jarník beweist diese Beziehung unter der Voraussetzung $\alpha_j = b_j = 0$, $M_j = 1$. Es ist leicht zu sehen, dass der Beweis auch für unseren Fall gleicherweise durchläuft.

Hauptsatz. *Es seien die Koeffizienten der Form* (1) *un die Zahlen* (2) *ganz*, $b_1 = b_2 = \ldots = b_r = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = \alpha$, $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 3$. *Dann ist*

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\lg |P_\varrho(x)|}{\lg x} = \left(\frac{r}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{2\gamma + 1}{\gamma + 1} + \frac{\varrho}{2(\gamma + 1)},$$

wo $\gamma = \gamma(\alpha)$.

Es ist interessant dieses Ergebnis mit der Beziehung (9) für $\gamma < +\infty$ zu vergleichen. Im ersten Fall verkleinert sich der „wahre" Exponent mit zunehmendem ϱ, im zweiten ist dieses umgekehrt. Dieses kann dadurch erklärt werden, dass in dem ersten Fall die Funktion reell ist und beständig ihr Vorzeichen ändert und dass nach der „Integration" (d. h. für zunehmendes ϱ) diese Änderungen immer mehr kompensiert werden. Im zweiten Fall ist die Funktion $P(x)$ allgemein eine komplexe Funktion und mittels einer Integration können die Änderungen von arg $P(x)$ nicht so weit kompensiert werden, dass sich der Wert von $P_\varrho(x)$ wesentlich verkleinern könnte.

2. Allgemeine Formel für O-Abschätzungen. In der ganzen Arbeit setzen wir weiterhin voraus, dass die Koeffizienten der Form (1) und die Zahlen (2) ganz sind. Von unseren Erwägungen schliessen wir den Fall, dass $A(x) = 0$ für alle x wäre, aus und behalten die folgenden Verabredungen und Bezeichnungen.

Mit dem Buchstaben c bezeichnen wir (allgemein verschiedene) positive Konstanten, welche nur von der Form (1), den Zahlen (2), (3) und der nichtnegativen Zahl ϱ abhängen. $c(\varepsilon)$ bedeute eine noch von $\varepsilon > 0$ abhängende positive Konstante usw. Anstatt von $|A| \leqq cB$ schreiben wir kurz $A \ll B$; wenn noch $B \ll A$ ist, schreiben wir $A \asymp B$. Die Zahlen m, h, k (bzw. mit einem Index versehen) seien ganz, $k > 0$. Fall h und k gemeinsam auftreten sollten, sei immer $(h, k) = 1$. Die Zahl x sei hinreichend gross, d. h. $x > c$. Die Symbole O, o und Ω haben die übliche Bedeutung; die Konstanten in deren Definitionen sind vom „Typ c" mit einer einzigen Ausnahme: wenn in diesen Beziehungen die positive Grösse $\varepsilon > 0$ auftritt, dann lassen wir auch Konstanten vom „Typ $c(\varepsilon)$" zu. Ferner legen wir

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s)\,\mathrm{d}s = i\int_{-\infty}^{\infty} f(a + it)\,\mathrm{d}t$$

und

$$\int_I f(s)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\left(\frac{1}{x} + it\right)\mathrm{d}t,$$

wo I das Intervall mit den Endpunkten a, b, $a \leqq b$ ist (insofern die Integrale rechts als absolut konvergente Lebesguesche Integrale existieren).

Weiter bezeichnen wir

$$R_k = \min_{m_1, m_2, \ldots, m_r} \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - \alpha_j k\right).$$

Wir sagen nun das Paar h, k ist singular, wenn entweder die Beziehung

$$R_k = \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - \alpha_j k\right) \tag{10}$$

für mindestens zwei verschiedene Systeme $m_1, m_2, \ldots, m_r$ gilt, oder wenn (10) nur für ein einziges solches System gilt, für welches aber die verallgemeinerte Gauss'sche Summe

$$S_{h,k,(m)} = S_{h,k,(m_1,m_2,\ldots,m_r)} =$$

$$= \sum_{a_1,a_2,\ldots,a_r=1}^{k} \exp\left(-\frac{2\pi i h}{k} Q(a_j M_j + b_j) + \frac{2\pi i}{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{m_j}{M_j}(a_j M_j + b_j)\right).$$

Null gleich ist. Im sonstigen Fall sprechen wir über ein nichtsingulares Paar h, k. Die Zahl k nennen wir nun in dem Fall singular, wenn das Paar h, k für alle h singular ist. Schliesslich sagen wir, dass der Singularfall vorkommt, wenn soein $c_1 = c$ existiert, dass alle k, für welche $R_k < c_1$ ist, singular sind. (Wir sollten eigentlich sagen, dass k singular mit Rücksicht auf die Form (1), die Zahlen (2) und (3) usw. ist; diese halten wir aber für fest gegebene Grössen.)

Wir beweisen diesen allgemeinen Satz.

Satz 1. *Es sei $\varrho > 0$. Dann ist*

$$P_\varrho(x) = O\left(x^{r/4-1/2} \lg^\tau x \sum_{k \leqq \sqrt{x}}' k^\varrho \min{}^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right)\right), \tag{11}$$ [4]

wo $\tau = 1$ für $r = 2$, $\tau = 0$ für $r > 2$ und Σ' bedeutet, dass für singulare k wir 1 anstatt von R_k schreiben.

Den Beweis diesen Satzes führen wir auf dem Grund des Ausdruckes von Jarník für die Funktion $P(x)$ mittels eines Kurvenintegrales. Für komplexe s, $\operatorname{Re} s > 0$ sei

$$\Theta(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}. \tag{12}$$

Die Funktion $\Theta(s)$ ist, wie bekannt (siehe z. B. [5], S. 238) in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ regulär und es gilt $|\Theta(s)| \leqq c(\varepsilon)$ insofern $\operatorname{Re} s \geqq \varepsilon > 0$ ist. Nach der Benützung der Hankel'schen Formel ist es leicht zu sehen, dass wir für a, $\varrho > 0$

$$P_\varrho(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(s)\, e^{xs}}{s^{\varrho+1}} \,\mathrm{d}s \tag{13}$$

[4]) $\min(A, 1/B) = A$ für $A \geqq 0$, $B = 0$.

haben[5]), wobei

$$(14)\qquad F(s) = F(s;\alpha_j) = \Theta(s) - \frac{\pi^{r/2}\exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\right)}{\sqrt{(D)}\prod\limits_{j=1}^{r} M_j s^{r/2}}\ {}^{5)} .$$

ist.

Um den Satz 1 zu beweisen, wird es offenbar zweckmässig sein $a = 1/x$ in (13) zu legen; wir werden also die Abschätzungen der Funktion $F(s)$ in der Nähe der Imaginarachse benötigen:

Lemma 1. *Es sei* $s = 1/x + it$, $|t - 2\pi h/k| \ll 1/k\sqrt{x}$, $k \leqq \sqrt{x}$. *Dann gilt*

$$(15)\qquad \frac{F(s)}{s^{\varrho+1}} \ll x^{r/4+\varrho/2+1/2}$$

für $h = 0$. *Wenn* $h \neq 0$ *dann ist*

$$(16)\qquad F(s) \ll \frac{x^{r/2}\exp\left(-\dfrac{cR_k' x}{k^2\left(1 + x^2\left|t - \dfrac{2\pi h}{k}\right|^2\right)}\right)}{k^{r/2}\left(1 + x^2\left|t - \dfrac{2\pi h}{k}\right|^2\right)^{r/4}},$$

wobei $R_k' = 1$, *wenn das Paar* h, k *singular ist und* $R_k' = R_k$ *sonst.*

Beweis. Siehe [8], S. 61–63, insbesondere die Bemerkung 2.

Zerlegen wir nun folgenderweise das Intervall $(-\infty, \infty)$ in eine punktfremde Vereinigung von Intervallen $\mathfrak{B}_{h,k}$. Es sei $\mathfrak{F}$ das System aller Zahlen der Form h/k, $k \leqq \sqrt{x}$ (die Fareybrüche, welche zu $\sqrt{x}$ gehören). Wenn nun $h_1/k_1 < h/k < h_2/k_2$ drei nacheinander folgende Elemente von $\mathfrak{F}$ sind (d. h. zwischen h_1/k_1 und h_2/k_2 liegt genau ein Element von $\mathfrak{F}$ u. zw. h/k) dann sei

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left[2\pi\frac{h + h_1}{k + k_1}, 2\pi\frac{h + h_2}{k + k_2}\right).$$

Wie bekannt (siehe z. B. [5], S. 249–250) kann man

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left[2\pi\frac{h}{k} - \frac{\vartheta_1}{k\sqrt{x}}, 2\pi\frac{h}{k} + \frac{\vartheta_2}{k\sqrt{x}}\right)$$

schreiben, wo $\pi \leqq \vartheta_1, \vartheta_2 \leqq 2\pi$ ist. Für $t \in \mathfrak{B}_{h,k}$ haben wir also bestimmt

$$\left|t - 2\pi\frac{h}{k}\right| \ll \frac{1}{k\sqrt{x}}$$

[5]) Mit s^γ $(\gamma > 0)$ wird der Zweig der Funktion s^γ bezeichnet, welcher positiv für positive Werte von s ist.

und die Länge dieses Intervales ist höchstens $c/k\sqrt{x}$. Erwäge man noch, dass für $s = 1/x + it$ und $t \in \mathfrak{B}_{h,k}$ die Beziehung $e^{xs} \ll 1$ gilt und für $h \neq 0$, $t \in \mathfrak{B}_{h,k}$ ist $|s| \asymp h/k$. Diese Tatsachen werden wir ohne weitere Hinweise benützen.

Nach (15) ist

$$\int_{\mathfrak{B}_{0,1}} \left|\frac{F(s)}{s^{\varrho+1}}\right| dt \ll x^{r/4+\varrho/2}. \tag{17}$$

Nachdem offenbar $F(\bar{s}; \alpha_j) = \overline{F(s; -\alpha_j)}$, $\bar{Q}(m_j/M_j - \alpha_j k) = \bar{Q}(-m_j/M_j - (-\alpha_j k)$ ist und die Abschätzung (16) in gleicher Form für $F(s; \alpha_j)$ und $F(s; -\alpha_j)$ gilt, haben wir nach (13) und (17)

$$P_\varrho(x) \ll x^{r/4+\varrho/2} + \sum_{h>0, k\leqq\sqrt{x}} \int_{\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{F(s)}{s^{\varrho+1}}\right| dt. \tag{18}$$

Ist nun $h > 0$, dann ist nach dem oben angeführten Tatsachen und (16)

$$\int_{\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{F(s)}{s^{\varrho+1}}\right| dt \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}} \left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1} \int_0^{c/k\sqrt{x}} \frac{\exp\left(-cR_k' x/k^2(1+x^2u^2)\right)}{(1+x^2u^2)^{r/4}}\, du.$$

In der Arbeit [6] (S. 721–723) wurde bewiesen, dass für $T \geqq 0$

$$\int_0^{c/k\sqrt{x}} \frac{\exp\left(-cTx/k^2(1+x^2u^2)\right)}{(1+x^2u^2)^{\gamma}}\, du \ll \begin{cases} \dfrac{k^{2\gamma-1}}{x^{\gamma+1/2}} \min^{\gamma-1/2}\left(\dfrac{x}{k^2}, \dfrac{1}{T}\right) & \text{für} \quad \gamma = c > \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{\lg x}{x} & \text{für} \quad \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

gilt. Insgesamt haben wir also

$$\int_{\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{F(s)}{s^{\varrho+1}}\right| dt \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}} \left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1} \frac{k^{r/2-1}}{x^{r/4+1/2}} \min{}^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k'}\right)$$

für $r > 2$,

$$\int_{\mathfrak{B}_{h,k}} \left|\frac{F(s)}{s^{\varrho+1}}\right| dt \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}} \left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1} \frac{\lg x}{x}$$

für $r = 2$.

Für $r > 2$ also ist

$$P_\varrho(x) \ll x^{r/4+\varrho/2} + x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqq\sqrt{x}} k^\varrho \min^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k'}\right) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{\varrho+1}},$$

woher sofort (11) folgt, nachdem

$$x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqq\sqrt{x}} k^\varrho \min^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k'}\right) \gg x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqq\sqrt{x}} k^\varrho \gg x^{r/4+\varrho/2} \tag{19}$$

gilt. Ähnlicherweise haben wir

$$P_\varrho(x) \ll \lg x \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^\varrho$$

für $r = 2$. Dadurch ist der Satz bewiesen.

Wir bemerken, dass in der Arbeit [4] JARNÍK ähnlicherweise gezeigt hat, dass unter den Voraussetzungen $\alpha_j = b_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$

$$\begin{aligned}
P_\varrho(x) &= O(x^{r/2-1}) && \text{für } 0 \leqq \varrho < r/2 - 2\,, \\
P_\varrho(x) &= O(x^{r/2-1} \lg x) && \text{für } 0 < \varrho = r/2 - 2\,, \\
P_\varrho(x) &= O(x^{r/2-1} \lg^2 x) && \text{für } 0 = \varrho = r/2 - 2\,, \\
P_\varrho(x) &= O(x^{r/4+\varrho/2}) && \text{für } \varrho > r/2 - 2
\end{aligned}$$

gilt. Von (11) ergibt sich leicht

$$P_\varrho(x) \ll x^{r/2-1} \lg^\tau x \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^{\varrho - r/2 + 1}$$

und also gelten alle soeben angeführte Ergebnisse von Jarník für $\varrho > 0$, $r > 2$ auch ohne der Voraussetzung $\alpha_j = b_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Für $\varrho = 0$ sind die Ergebnisse $P(x) = O(x^{r/2-1})$ für $r > 4$, $P(x) = O(x^{r/2-1} \lg^2 x)$ für $r = 4$ in der Arbeit [6] bewiesen. In dieser Arbeit wurde gezeigt (vgl. Satz 2, S. 446, Bemerkung 7, S. 453 und Zusatz in der Bemerkung 1 (b), S. 380 der Arbeit [7]), dass für $r \geqq 4$ ($\tau_1 = 1$ für $r = 4$, $\tau_1 = 0$ für $r > 4$) ist

$$P(x) = O(x^{r/4-1/2} \lg^{\tau_1} x \sum_{k \leqq \sqrt{x}}' \lg 2k \min{}^{r/4-1/2} \left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right).$$

Für $r = 2, 3, 4$ ergibt sich für $\varrho > 0$ zusammen mit (19)

$$x^{r/4+\varrho/2} \ll x^{r/4-1/2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}}' k^\varrho \min{}^{r/4-1/2} \left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right) \ll x^{r/2-1} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^{\varrho - r/2 + 1} \ll x^{r/4+\varrho/2}\,.$$

Für die Funktion $P_\varrho(x)$ bekommen wir also in diesen Fällen vom Satz 1 O-Abschätzungen, welche von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ nicht abhängen und sind dazu noch schlechter als die Ergebnisse von Jarník von der Arbeit [4], welche auch für $\varrho = 0$ gelten:[3])

Für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ ist $P_\varrho(x) = O(x^{r/2 - r/(r+1-2\varrho)+\varrho})$, für $\varrho = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ ist $P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2} \lg x)$ und für $\varrho > \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ gilt $P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2})$.

Nach grösser Bemühung könnte gezeigt werden, dass für $\varrho = 0$, $r = 4$ man O-Formeln herleiten kann, in denen die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ nur auf den logarithmischen Faktor einen Einfluss haben. In den weiteren Anwendungen beschränken wir uns also auf den Fall $r > 4$ und wir können dann (11) und das zitierte analogische Ergebnis für $\varrho = 0$ in einem Satz zusammenfassen.

Satz 2. *Für $\varrho \geqq 0$, $r > 4$ ist*

$$P_\varrho(x) = O\Big(x^{r/4-1/2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}}' k^\varrho \min{}^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right), \tag{20}$$

wo für $\varrho = 0$, $\lg 2k$ anstatt von k^ϱ geschrieben werden muss.

Bei der Anwendung von diesem Satz im nächsten Paragraphen beschränken wir uns mit Rücksicht auf (19) und die erwähnten Ergebnisse von Jarník auf den Fall $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$. Für $\varrho = 0$ wurden einige Ergebnisse schon in der Arbeit [7] gezeigt.

3. Folgerungen des Satzes 2. Die Ergebnisse in diesem Paragraphen ergeben sich von der Kombination des Satzes 2, der Ergebnisse der Arbeit [11], in welcher die in (20) auftretenden Summen untersucht sind und von der Arbeit [10], welche die Herleitung von Ω-Abschätzungen für die Funktion $P_\varrho(x)$ enthält. Es sei immer $r \geqq 5$.

Führen wir zuerst an, dass wenn wir

$$P_k = \max_{j=1,2,\dots,r} \min_m |\alpha_j M_j k - m|$$

bezeichnen, dann ist offenbar

$$P_k^2 \asymp R_k$$

(siehe [6], Bemerkung 2, S. 431). Anstatt (20) kann man also

$$P_\varrho(x) = O\left(x^{r/4-1/2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}}' k^\varrho \min{}^{r/2-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{k}, \frac{1}{P_k}\right)\right) \tag{21}$$

schreiben, wobei wir für $\varrho = 0$ den Faktor k^ϱ durch $\lg 2k$ ersetzen.

Nun werden wir die Ergebnisse der Arbeit [11] und die Beziehung (21) kombinieren.

Satz 3. *Es gilt immer*

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1}) \qquad \textit{für} \quad 0 \leqq \varrho < \tfrac{1}{2}r - 2\,,$$

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1} \lg x) \qquad \textit{für} \quad 0 < \varrho = \tfrac{1}{2}r - 2\,,$$

und

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho/2}) \qquad \textit{für} \quad \varrho > \tfrac{1}{2}r - 2\,.$$

Wenn der Singularfall vorkommt, dann ist

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho/2}) \qquad \textit{für} \quad \varrho > 0\,,$$

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho/2} \lg x) \qquad \textit{für} \quad \varrho = 0\,.$$

Beweis. Wir können zwar teilweise den Satz 1 von [11] benützen, in diesem Fall ist es aber einfacher zu erwägen, dass nach dem Satz 2 (oder nach (21))

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^{\varrho+1-r/2})$$

ist und in dem Singularfall ist

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4-1/2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^\varrho)$$

mit der Abänderung $\lg 2k$ anstatt von k^ϱ für $\varrho = 0$.

Wenn die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ rational sind und der Singularfall nich vorkommt, besagt der Satz 1 von der Arbeit [10][6]) dass

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1})$$

ist. Zusammen mit dem Satz 3 haben wir also das definitive Ergebnis:

Satz 4. *Es seien* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *rational,* $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$. *Dann ist im nichtsingularen Fall*

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1}), \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1}).$$

Wenden wir uns zu dem Fall, wenn zumindest eine der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ irrational ist. Im Satz 3 der Arbeit [11] wurde gezeigt, dass für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$

$$\sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^\varrho \min{}^{r/2-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{k}, \frac{1}{P_k}\right) = o(x^{r/4-1/2})$$

ist. Wir haben also den folgenden Satz:

Satz 5. *Es sei zumindest eine der Zahlen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *irrational,* $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$. *Dann ist*

$$P_\varrho(x) = o(x^{r/2-1}) \tag{22}$$

(Für $\varrho = 0$ siehe [6], Satz 3, S. 447.) Dieses Ergebnis kann allgemein nicht verbessert werden. Dazu benützen wir den zweiten Teil des Satzes 3 von [11] (für $\varrho = 0$ siehe [6], Satz 4, S. 447):

Wenn die Funktion $\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ für $x > 0$, $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r] \in \mathfrak{M} = [0, 1/M_1) \times [0, 1/M_2) \times \ldots \times [0, 1/M_r)$ definiert und für jedes festen $x > 0$ stetig in $\mathfrak{M}$ ist und wenn eine in $\mathfrak{M}$ dichte Menge $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ so existiert, dass für jedes r-tupel $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r] \in \mathfrak{N}$

$$\limsup_{x \to +\infty} \Phi(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha.)\, x^{-r/4+1/2} > 0 \tag{23}$$

[6]) In [6], [9] ist der Singularfall auf eine etwas andere Weise definiert: wenn $R_k = 0$ ist, dann ist k singular. Für rationale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ fallen diese Begriffe offenbar zusammen.

ist und wenn schliesslich

$$0 \leqq \Phi(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^{\varrho} \min{}^{r/2-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{k}, \frac{1}{P_k} \right)$$

gilt, dann ist für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$ und für jede positive nichtzunehmende Funktion $\varphi(x)$, $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ und für alle $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r] \in \mathfrak{M}$ bis auf eine Menge erster Kategorie

$$\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = o(x^{r/4-1/2}), \quad \Phi(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = \Omega(x^{r/4-1/2}\, \varphi(x)) .$$

Es sei $\Phi(x) = |P_{\varrho}(x)|\, x^{1/2-r/4}$. Dann gelten alle Voraussetzungen der angeführten Behauptung. Eine nähere Begründung benötigt nur die Gültigkeit der Beziehung (23). Nach dem Satz 1 der Arbeit [10] gilt die Beziehung $P_{\varrho}(x) = \Omega(x^{r/2-1})$ in dem Fall, wenn ein nichtsingulares k existiert, für welches $R_k = 0$ ist. Wenn $R_k = 0$ ist, gilt (10) genau dann, wenn $m_j = \alpha_j M_j k$, $j = 1, 2, \ldots, r$ ist. Dieses bedeutet also, dass die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha$. rational sein müssen und dass für den kleinsten gemeinsamen Nenner H der Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$, H/k gelten muss. In [6] ist ferner gezeigt: wenn $(k, 2D \prod_{j=1}^{r} M_j^2) = 1$ ist, dann ist $|S_{h,k,(m)}| = k^{r/2}$ und also ist dieses k nicht singular (vgl. [6], Lemma 2, S. 430). Zusammenfassend kann man also behaupten, dass für rationale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ für welche $(H, 2D \prod_{j=1}^{r} M_j^2) = 1$ gilt, die Zahl $k = H$ nicht singular ist, $R_k = 0$ und also ist $P_{\varrho}(x) = \Omega(x^{r/2-1})$. Es sei $\mathfrak{N}$ die Menge aller $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r] \in \mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft, dass der kleinste gemeinsame Nenner H der Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$ mit $2D \prod_{j=1}^{r} M_j$ teilerfremd ist. Dann ist

$$\limsup_{x \to +\infty} \Phi(x)\, x^{1/2-r/4} > 0$$

für alle $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r] \in \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}$ ist offensichtlich in $\mathfrak{M}$ dicht. Mit Rücksicht zu der Tatsache, dass wenn man α_j mit $\alpha_j + 1/M_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$ ersetzt, dann ändert sich $P_{\varrho}(x)$ nur um eine von Null verschiedene multiplikative Konstante, gilt der folgende Satz: Satz 6. Es sei $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$ und sei $\varphi(x)$ eine positive nichtwachsende Funktion, $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$. Dann gilt (22) und

$$P_{\varrho}(x) = \Omega(x^{r/2-1}\, \varphi(x))$$

für alle Systeme $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ mit Ausnahme einer Menge erster Kategorie.

Wenden wir uns nun zu der Frage auf welche Weise die O- und Ω-Abschätzungen der Funktion $P_{\varrho}(x)$ vom arithmetischen Charakter des Systemes $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ abhängen.

Satz 7. *Es sei* $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$. *Dann gilt für fast alle Systeme* $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ (*im Sinne des r-dimensionale Lebesgueschen Masses*)

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4+\varrho+2} \lg^\tau x),$$

wobei $\tau = 3r - 1$ *für* $\varrho > 0$ *und* $\tau = 3r$ *für* $\varrho = 0$ *ist.*

Der Beweis ergibt sich sofort vom Satz 4 der Arbeit [11] und von (21).

Mit Rücksicht auf (19) bekommen wir also für fast alle Systeme $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ bis auf den logarithmischen Faktor das beste Ergebnis, welches man gar von dem Satz 2 erhalten kann.

Satz 8. *Es sei* $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$, $\gamma > 0$ *und für alle k gelte*

$$P_k \gg k^{-\gamma}.$$

Dann ist

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r/4-1/2)(2\gamma+1)/(\gamma+1)+(\varrho+1)/2(\gamma+1)} \lg^\tau x),$$

wo $\tau = 0$ *für* $\varrho > 0$ *und* $\tau = 1$ *für* $\varrho = 0$ *ist.*

Der Beweis folgt sofort von (21) und dem Satz 6 der Arbeit [11].

In der Arbeit [10] wurde die folgende Ω-Abschätzung bewiesen (siehe [10], Satz 2, S. 268):

Es sei $\gamma > 0$, $0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}r - 1$ *und es gebe unendlich viele nichtsingulare Paare* h, k, *für welche*

$$h \ll 1$$

und

$$R_k \ll k^{-2\gamma} \tag{24}$$

gilt. Dann ist

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r/4-1/2)(2\gamma+1)/(\gamma+1)+\varrho/2(\gamma+1)}). \tag{25}$$

(Bemerken wir, dass man beweisen kann, dass die Voraussetzungen über die Zahlen h, k allgemein nicht vermeidbar sind: in der Arbeit [7], S. 393–395 ist eine Form Q und Zahlensysteme (2) und (3) so kontruiert, dass der Singularfall entsteht, wobei die Beziehung (24) unnendlich viele Lösungen für jedes γ besitzt. Nach dem Satz 3 kann (25) nicht gelten. Wir geben noch an, dass die Voraussetzungen dieser Behauptung bestimmt erfüllt sind, wenn $b_1 = b_2 = \ldots = b_r = 0$ ist und wenn (24) unendlich viele Lösungen hat, wie dieses das Lemma 9 auf S. 392 in [7] bezeugt.)

Im Spezialfall $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = \alpha$ kann der Satz 8 noch vestärkt werden. Wir erwägen, dass dann

$$P_k \ll \langle \alpha k \rangle$$

ist, wobei wir für ein reelles t, $\langle t \rangle = \min |t - m|$ legen.

Satz 9. *Es sei* $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = \alpha$ *und für alle natürliche k gelte*

$$\langle \alpha k \rangle \gg k^{-\gamma}\,.$$

Dann ist

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r/4-1/2)(2\gamma+1)/(\gamma+1)+\varrho/2(\gamma+1)} \lg^\tau x)$$

für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 3$,

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r/4-1/2)(2\gamma+1)/(\gamma+1)+\varrho/2(\gamma+1)} \lg^\tau x) + O(x^{r/4+\varrho/2} \lg^{\tau+1} x)$$

für $0 \leqq \varrho = \frac{1}{2}r - 3$ *und*

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r/4-1/2)(2\gamma+1)/(\gamma+1)+\varrho/2(\gamma+1)} \lg^\tau x) + O(x^{r/4+\varrho/2} \lg^\tau x)$$

für $\varrho > \frac{1}{2}r - 3$, *wo* $\tau = 1$ *für* $\varrho = 0$, $\tau = 0$ *für* $\varrho > 0$ *ist.*

Der Beweis folgt von (21) und dem Satz 7 der Arbeit [11].

Den Satz, welcher in der Einleitung angeführt ist, bekommen wir sofort mit Hilfe des Lemmas 9, S. 392 der Arbeit [7], des Satzes 9 und der Ω-Abschätzung (25).

Bemerken wir noch zum Schluss, dass wir eine ganze Reihe von Teilergebnissen, welche eine Kombination von (21) und der Sätze der Arbeiten [10] und [11] mit sich bringt, da wörtlich nich angeführt haben. Ebenfalls ist es auch interessant die bewiesenen Ergebnisse mit ähnlichen, in [8] und [9] angeführten, Untersuchungen der Funktion $M_\varrho(x) = \int_0^x |P_\varrho(x)|^2 \, dt$ zu vergleichen.

Literaturverzeichnis

[1] *B. Diviš,* Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Czech. Math. J. *20 (95)* 1970, 130—139.

[2] *B. Diviš, B. Novák,* On lattice points in many dimensional ellipsoids — in Vorbereitung.

[3] *V. Jarník,* Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Tôhoku Math. Journal *30* (1929), 354—371.

[4] *V. Jarník,* Bemerkungen zu Landauschen Methoden in der Gitterpunktlehre, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Zur Erinnerung an E. Landau, Berlin 1968, 139—156.

[5] *E. Landau,* Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre, Berlin 1962.

[6] *B. Novák,* Verallgemeinerung eines Peterssonschen Satzes und Gitterpunkte mit Gewichten, Acta Arithmetica *XIII* (1968), 423—454.

[7] *B. Novák,* On lattice points with weight in high-dimensional ellipsoids, Acta Arithmetica *XIV* (1968), 371—397.

[8] *B. Novák,* Mean value theorems in the theory of lattice points with weight I, II, Comment. Math Univ. Carolinae *8* (1967), 711—733, *11* (1970), 53—81.

[9] *B. Novák,* Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre I, II, Czech. Math. J. *19 (94)* (1969), 154——180, Časopis pro pěst. mat. *96* (1971), 245—261.

[10] *B. Novák,* Über eine Methode der Ω-Abschätzung, Czech. Math. J. *21 (96)* (1971, 257—279.

[11] *B. Novák,* On certain sum in number theory, Comment. Math. Univ. Carolinae *12* (1971), 679—695.

Anschrift des Verfassers: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta KU).