Czechoslovak Mathematical Journal

Josef Doležal

Regelflächenpaare mit einer abwickelbaren Quasifleknodalfläche

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), No. 2, 291–311

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101099`

Czechoslovak Mathematical Journal, 22 (1972), Praha

REGELFLÄCHENPAARE MIT EINER ABWICKELBAREN QUASIFLEKNODALFLÄCHE

JOSEF DOLEŽAL, Brno

(Eingegangen am 20. April 1971)

1. TYPEN DER REGEFLÄCHENPAARE

Im projektiven Raum P_3 sei mit P-Paar ein Paar von Regelflächen R_{12}, R_{34} bezeichnet. Die Regelflächen befinden sich in ein-eindeutiger Korrespondenz, wobei jeder Erzeugenden (A_1, A_2) der Fläche R_{12} eine Erzeugende (A_3, A_4) der Fläche R_{34} entspricht. Die entsprechenden Geraden werden durch denselben Wert des Parameters u bestimmt, wobei u alle reellen Werte aus einem offenen Intervall I annimmt. Wir werden voraussetzen, dass $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ für alle Parameterwerte $u \in I$ windschief sind.

Betrachten wir zwei entsprechende Geraden $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ des P-Paares, die durch den Parameterwert $u = u_0$ gegeben sind. Jede Gerade (X, Z), die die Geraden $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ und auch ihre benachbarten Geraden auf der beiden Flächen R_{12}, R_{34} schneidet, heisst die Quasifleknodalgerade (einfach Q-Gerade) des P-Paares. Die Schnittpunkte der Q-Geraden mit den Geraden $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ für $u = u_0$ nennt man zugeordnete Quasifleknodalpunkte des P-Paares (weiter nur Q-Punkte). Bei Änderung des Parameters u bilden allgemein die Q-Punkte die Quasifleknodalkurven (Q-Kurven) und die Q-Geraden die Quasifleknodalflächen (Q-Flächen) des P-Paares.

Jede Q-Gerade ist durch folgende vier Gleichungen bestimmt (mit $\times$ bezeichnen wir das Plückersche Produkt):

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(X, Z) \times (A_1, A_2) = 0\,, \quad (X, Z) \times (A_3, A_4) = 0\,, \\ &(X, Z) \times \mathrm{d}(A_1, A_2) = 0\,, \quad (X, Z) \times \mathrm{d}(A_3, A_4) = 0\,. \end{aligned}$$

Es sei nun eine Fläche Φ als Tangentenfläche einer Kurve $(Y(u))$ von der Differentialklasse C^4 gegeben. Man setze voraus, dass

$$(Y, Y', Y'', Y''') \neq 0$$

für alle $u \in I$ gilt.

Wir werden jetzt alle P-Paare finden, die die gegebene Fläche Φ als eine Q-Fläche besitzen. Die Tangenten der Kurve (Y) sind also Q-Geraden des P-Paares. Man kann setzen:

$$X = A_1 = tY + t_1Y' , \quad A_2 = \varkappa Y + \varkappa_1 Y' + \varkappa_2 Y'' + \varkappa_3 Y''' ,$$
$$Z = A_3 = vY + v_1 Y' , \quad A_4 = cY + c_1 Y' + c_2 Y'' + c_3 Y''' . \tag{2}$$

Die Bedingung $(A_1, A_2, A_3, A_4) \neq 0$ liefert die Ungleichung

$$(\varkappa_2 c_3 - \varkappa_3 c_2)(tv_1 - t_1 v) \neq 0 .$$

Wenn man die Gleichungen (2) in Betracht nimmt, sind die ersten zwei Gleichungen von (1) identisch erfüllt, aus den übrigen folgt:

$$t_1 \varkappa_3 = 0 , \quad v_1 c_3 = 0 .$$

Diese Gleichungen und die vorangehende Ungleichung bieten folgende Möglichkeiten dar:

$$\text{a)}\ t_1 = 0 , \quad c_3 = 0 ; \quad t \neq 0 , \quad v_1 \neq 0 , \quad \varkappa_3 \neq 0 , \quad c_2 \neq 0 ,$$
$$\text{b)}\ v_1 = 0 , \quad \varkappa_3 = 0 ; \quad v \neq 0 , \quad t_1 \neq 0 , \quad c_3 \neq 0 , \quad \varkappa_2 \neq 0 . \tag{3}$$

Geometrisch bedeutet das, z. B. im Falle a), dass (A_1, A_2) eine willkürliche Gerade ist, die die Rückkehrkante (Y) schneidet und in der Tangentialebene der Fläche Φ nicht liegt, dagegen aber (A_3, A_4) eine beliebige mit (Y, Y') nicht zusammenfallende Tangente der Fläche Φ ist. Im Falle b) sind beide Geraden umgetauscht.

Setzt man die Bedingungen $t_1 = c_3 = 0$ in (2) ein, so sieht man, dass die Parameter $\varkappa$ und c_1 die Lage der Geraden (A_1, A_2) und (A_3, A_4) nicht beeinflussen. Wir setzen also

$$\varkappa = 0 , \quad c_1 = 0 .$$

Durch Normierung des Punktes Y und passende Wahl des Parameters u kann man erzielen, dass die Differentialgleichung der Kurve (Y) die sog. Laguerre-Forsythesche Form [5] erhält

$$Y^{(\mathrm{IV})} = -4\Theta_3 Y' - (\Theta_4 + 2\Theta_3') Y . \tag{4}$$

Die Normierung der Punkte A_2, A_3, A_4 kann so durchgeführt werden, dass

$$\varkappa_3 = 1 , \quad v_1 = 1 , \quad c_2 = 1$$

sein wird. Die Eckpunkte des beweglichen Tetraeders werden also in folgender Form ausgedrückt

$$\begin{aligned} A_1 &= Y , \\ A_2 &= \qquad \varkappa_1 Y' + \varkappa_2 Y'' + Y''' , \\ A_3 &= vY + Y' , \\ A_4 &= cY \qquad\quad + Y'' . \end{aligned} \tag{5}$$

Die differentielle Verrückung des Tetraeders ist durch die Gleichungen bestimmt:

$$\mathrm{d}A_i = \omega_i^j A_j\,, \quad \omega_i^j = u_i^j\,\mathrm{d}u\,, \quad i, j = 1, 2, 3, 4\,.$$

Durch Differenzieren von (5) erhält man die folgende Tabelle:

$$(6) \quad \begin{aligned}
u_1^1 &= -v\,, & u_2^1 &= -[v(\varkappa_1' - \varkappa_1\varkappa_2 - 4\Theta_3) + c(\varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1) + \\
& & &\quad + (\Theta_4 + 2\Theta_3')]\,,\\
u_1^2 &= 0\,, & u_2^2 &= \varkappa_2\,,\\
u_1^3 &= 1\,, & u_2^3 &= \varkappa_1' - \varkappa_1\varkappa_2 - 4\Theta_3\,,\\
u_1^4 &= 0\,, & u_2^4 &= \varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1\,,\\
u_3^1 &= v' - v^2 - c\,, & u_4^1 &= v\varkappa_1 + c\varkappa_2 - vc + c'\,,\\
u_3^2 &= 0\,, & u_4^2 &= 1,\\
u_3^3 &= v\,, & u_4^3 &= c - \varkappa_1\,,\\
u_3^4 &= 1\,, & u_4^4 &= -\varkappa_2\,.
\end{aligned}$$

Beide Flächen R_{12} und R_{34} können windschief oder abwickelbar sein. Die Erzeugende (A_1, A_2) wird eine Torsalgerade, wenn die Determinante

$$|A_1, A_2, A_1', A_2'| = u_2^4 u_1^3 |A_1, A_2, A_3, A_4|$$

verschwindet. Das ist nur so möglich, dass

$$(7) \qquad u_2^4 = 0$$

gilt. Wenn wir mit K den Kuspidalpunkt der Geraden (A_1, A_2) bezeichnen, dann muss $\mathrm{d}K$ von A_1 und A_2 linear abhängig sein, woraus sich

$$(8) \qquad K = u_2^3 A_1 - u_1^3 A_2$$

ergibt. In ähnlicher Weise bestimmt man die Bedingung dafür, dass (A_3, A_4) eine Torsalgerade wird, nämlich

$$(9) \qquad u_3^1 = 0\,.$$

Der Kuspidalpunkt ist in diesem Falle der Punkt A_3.

Wenn (7) bzw. (9) für alle Parameterwerte $u \in I$ gilt, dann sind R_{12} bzw. R_{34} Torsen mit der Rückkehrkante (K) bzw. (A_3).

Es seien nun $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ zwei entsprechende Erzeugenden des P-Paares. Wir werden alle ihre Q-Geraden bestimmen. Wir nehmen an, das (XZ), wo

$$(10) \qquad X = x^1 A_1 + x^2 A_2\,, \quad Z = z^3 A_3 + z^4 A_4$$

bedeutet, eine Q-Gerade ist. Wenn wir die letzten Ausdrücke in (1) einsetzen, so bekommen wir nach kurzer Berechnung

$$
(11) \qquad \begin{aligned} u_1^3 x^1 z^4 - u_2^4 x^2 z^3 + u_2^3 x^2 z^4 &= 0\,, \\ u_4^2 x^1 z^4 - u_3^1 x^2 z^3 - u_4^1 x^2 z^4 &= 0\,. \end{aligned}
$$

Die Koordinaten aller zugeordneten Q-Punkte genügen dem System (11). Offensichtlich ist es immer mit den der Geraden (A_1, A_3) entsprechenden Werten $x^2 = 0$, $z^4 = 0$ erfüllt.

Durch den Punkt A_1 geht ausser (A_1, A_3) keine weitere Q-Gerade. Wenn man nämlich in (10) $x^2 = 0$ setzt, dann folgt aus (11) wegen $x^1 \neq 0$, $u_1^3 = u_4^2 = 1$ nur $z^4 = 0$. Dagegen können durch den Punkt A_3 mehrere Q-Geraden gehen. In der Tat, wenn man in (10) $z^4 = 0$, $x^2 \neq 0$ einsetzt, so folgt aus (11) wegen $z^3 \neq 0$

$$
u_2^4 x^2 = 0\,, \quad u_3^1 x^2 = 0\,.
$$

Wenn nun u_2^4 und u_3^1 gleich Null sind, ist x^2 willkürlich zu nehmen. Durch den Punkt A_3 geht ein Büschel der Q-Geraden. Wenn aber $u_2^4 \neq 0$ oder $u_3^1 \neq 0$, dann geht durch A_3 ausser (A_1, A_3) keine Q-Gerade mehr. Nach (7) und (9) schliesst man, dass durch A_3 dann und nur dann ein Büschel der Q-Geraden durchgeht, wenn beide Geraden (A_1, A_2), (A_3, A_4) torsal sind.

Wir werden jetzt alle Q-Geraden des Geradenpaares (A_1, A_2), (A_3, A_4) bestimmen, welche weder mit A_1 noch mit A_3 inzident sind. Wir müssen also $x^2 z^4 \neq 0$ voraussetzen. Dividiert man das System (11) durch den Ausdruck $x^2 z^4$, so erhält man das System

$$
(12) \qquad u_1^3 \varrho - u_2^4 \sigma + u_2^3 = 0\,, \quad u_4^2 \varrho - u_3^1 \sigma - u_4^1 = 0\,,
$$

wo $\varrho = x^1 : x^2$, $\sigma = z^3 : z^4$ ist.

Die Existenz der gesuchten Q-Geraden hängt von der Lösbarkeit des Systems (12) ab.

Definition. Man betrachte alle Q-Geraden, die ein festes Paar der sich entsprechenden Geraden (A_1, A_2), (A_3, A_4) durchschneiden. Dieses Geradenpaar benennen wir mit

P_2-*Paar*, wenn es ausser (A_1, A_3) nur eine einzige Q-Gerade des betreffenden Paares gibt,

P_1-*Paar*, wenn es ausser (A_1, A_3) keine weitere Q-Gerade gibt,

P_{01}-Paar, wenn alle Q-Geraden ein Büschel mit dem Zentrum A_3 bilden,

P_0-*Paar*, wenn alle Q-Geraden eine Quadrik bilden.

Die Bezeichnung erweitert sich ohne weiteres auf die sich entsprechenden Flächen R_{12}, R_{34}, wenn alle Geradenpaare des P-Paares dieselbe Eigenschaft besitzen.

Die Matrix

$$(13)\qquad \begin{pmatrix} u_1^3 & -u_2^4 & u_2^3 \\ u_4^2 & -u_3^1 & -u_4^1 \end{pmatrix}$$

besitzt folgende Minoren 2. Ordnung

$$(14)\qquad \begin{aligned} \Delta_1 &= u_2^4 u_4^2 - u_1^3 u_3^1 = u_2^4 - u_3^1 , \\ \Delta_2 &= u_2^3 u_4^2 + u_1^3 u_4^1 = u_2^3 + u_4^1 , \\ \Delta_3 &= u_2^3 u_3^1 + u_2^4 u_4^1 . \end{aligned}$$

A) Wenn $\Delta_1 \neq 0$ ist, dann hat das System (12) nur eine Lösung

$$(15)\qquad \varrho = \Delta_3 : \Delta_1 , \quad \sigma = \Delta_2 : \Delta_1 .$$

Die Ungleichung $\Delta_1 \neq 0$ charakterisiert das P_2-Paar.

B) Wenn $\Delta_1 = 0$, können folgende Möglichkeiten eintreten

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \Delta_2 \neq 0 , \quad \Delta_3 \neq 0 , \qquad &&\text{c)}\ \Delta_2 = 0 , \quad \Delta_3 \neq 0 , \\ &\text{b)}\ \Delta_2 \neq 0 , \quad \Delta_3 = 0 , \qquad &&\text{d)}\ \Delta_2 = 0 , \quad \Delta_3 = 0 . \end{aligned}$$

Im weiteren soll h den Rang der Matrix (13) bedeuten.

Fall a) $h = 2$. Ausser (A_1, A_3) existiert keine andere Q-Gerade. Die Erzeugenden (A_1, A_2), (A_3, A_4) sind keine Torsalgeraden, da im entgegengesetzten Falle aus $u_2^4 = 0$ oder $u_3^1 = 0$ die Gleichung $\Delta_3 = 0$ gegen die Voraussetzung folgen möchte. Es handelt sich hier um ein P_1-Paar. Die Ungleichung $\Delta_2 \neq 0$ ist eine Folge der Ungleichung $\Delta_3 \neq 0$.

Fall b) $h = 2$. Aus $\Delta_1 = \Delta_3 = 0$, $\Delta_2 \neq 0$ folgt $u_2^4 = u_3^1 = 0$. Beide entsprechenden Erzeugenden sind torsal. Die Q-Geraden bilden nur das oben behandelte Büschel mit dem Zentrum A_3, sonst gibt es keine anderen Q-Geraden. Man hat ein P_{01}-Paar.

Fall c) ist auszuschliessen, da die Gleichungen $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ mit der Ungleichung $\Delta_3 \neq 0$ in einem Widerspruch stehen.

Fall d) $h = 1$. Die Gleichung $\Delta_3 = 0$ ist eine Folge der übrigen Gleichungen $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$. Das System (12) reduziert sich auf eine Gleichung

$$\varrho - u_2^4 \sigma + u_2^3 = 0 .$$

Die zugeordneten Q-Punkte sind

$$\begin{aligned} X &= (u_2^4 \sigma - u_2^3) A_1 + A_2 , \\ Z &= \sigma A_3 + A_4 . \end{aligned}$$

Das Geradenpaar (A_1, A_2), (A_3, A_4) ist ein P_0-Paar. Die Q-Geraden (XZ) gehören einer Quadrik Γ an, die folgende Parameterdarstellung hat:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= u_2^4 \sigma - u_2^3 , \quad & \xi_3 &= \sigma\tau , \\ \xi_2 &= 1 , & \xi_4 &= \tau . \end{aligned}$$

Nach Elimination der Parameter τ und σ erhält man die Gleichung:

$$\xi_1\xi_4 - u_2^4\xi_2\xi_3 + u_2^3\xi_2\xi_4 = 0 .$$

Die Quadrik Γ kann einfach sein oder sie kann zerfallen.

a) Wenn die entsprechenden Erzeugenden $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ regulär sind, ist Γ einfach. Man benutzt die Bezeichnung P_0^r.

b) Wenn die entsprechenden Erzeugenden $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ beide torsal sind, entartet Γ in zwei Büschel mit den Zentren A_3 und den durch (8) gegebenen Punkt K. Man führt die Bezeichnung P_0^s ein.

Es ergibt sich daher der

Satz 1. *Ein Paar der sich entsprechenden Erzeugenden (A_1, A_2) (A_3, A_4) der Flächen R_{12}, R_{34} ist für $u = u_0$ ein*

a) *P_2-Paar, wenn $\Delta_1 \neq 0$,*
b) *P_1-Paar, wenn gleichzeitig $\Delta_1 = 0$, $\Delta_3 \neq 0$,*
c) *P_{01}-Paar, wenn gleichzeitig $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 = 0$,*
d) *P_0-Paar, wenn gleichzeitig $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ gilt, wobei man*

ein P_0^r-Paar, wenn $u_2^4 \neq 0$, $u_3^1 \neq 0$,
ein P_0^s-Paar, wenn $u_2^4 = 0$, $u_3^1 = 0$, erhält.

Gelten die oberen Bedingungen für alle $u \in I$, dann beziehen sich die Behauptungen des Satzes auf das P-Paar der Flächen R_{12}, R_{34}.

Das P-Paar setzt sich im Falle eines P_2-Paares aus zwei windschiefen oder einer windschiefen und einer abwickelbaren Fläche, im Falle eines P_1-Paares aus zwei windschiefen, im Falle eines P_{01}-Paares aus zwei abwickelbaren, im Falle eines P_0^r-Paares aus zwei windschiefen, im Falle eines P_0^s-Paares aus zwei abwickelbaren *Flächen zusammen.*

Die Rückkehrkante der Torse R_{12} ist die in (8) gegebene Kurve (K), diejenige der Torse R_{34} ist (A_3).

Wenn P ein P_0^s-Paar ist, dann geht die Schmiegebene δ_1 der Kurve (K) durch den entsprechenden Punkt A_3 und umgekehrt die Schmiegebene δ_2 der Kurve (A_3) durch den entsprechenden Punkt K. Die letztere Behauptung z. B. geht aus folgender Determinante heraus:

$$(\delta_2 K) = (A_3, A_3', A_3'', K) = (u_3^4)^2\, \Delta_2(A_1, A_2, A_3, A_4) = 0 .$$

Die Ebenen $\delta_1 \equiv (A_1, A_2, A_3)$, $\delta_2 \equiv (A_3, A_4, K)$ sind die Ebenen der beiden Büschel der Q-Geraden.

2. INVOLUTORISCHE PAARE

Wir setzen voraus, dass die Flächen R_{12}, R_{34} windschief sind und betrachten ein Raumviereck $M_1M_2M_3M_4$ mit diesen Eigenschaften: Die Eckpunkte M_1, M_2 liegen auf der Geraden (A_1, A_2), die Eckpunkte M_3, M_4 liegen auf der entsprechenden Geraden (A_3, A_4). Die Tangentialebene der Fläche

R_{12} im Punkte M_1 schneidet die Gerade (A_3, A_4) im Punkte M_3,
R_{34} im Punkte M_3 schneidet die Gerade (A_1, A_2) im Punkte M_2,
R_{12} im Punkte M_2 schneidet die Gerade (A_3, A_4) im Punkte M_4,
R_{34} im Punkte M_4 schneidet die Gerade (A_1, A_2) im Punkte M_1.

Die Vierecke von angegebenen Eigenschaften nennt man involutorische Vierecke des Geradenpaares $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$. Die Bedingung dafür, dass ein solches Paar involutorische Vierecke besitzt, ist nach [7]

$$u_2^4u_4^2 + u_2^3u_3^2 + u_4^1u_1^4 + u_3^1u_1^3 = 0 . \tag{16}$$

Wenn die Gleichung (16) für ein bestimmtes $u = u_0$ erfüllt wird, dann gibt es eine einparametrische Menge von involutorischen Vierecken. Wenn (16) für alle $u \in I$ gültig ist, dann wird ein solches P-Paar als ein involutorisches P-Paar bezeichnet. Die Gleichung (16) wurde in [7] unter der Voraussetzung, dass Φ eine windschiefe Fläche ist, hergeleitet. Man kann aber leicht ihre Richtigkeit auch für Torsen bestätigen.

Involutorische P-Paare sind immer P_2-Paare. In der Tat, die Gleichung (16) reduziert sich unter Gebrauch von (6) auf die Form:

$$u_2^4 + u_3^1 = 0 . \tag{17}$$

Aus den Voraussetzungen, dass weder R_{12} noch R_{34} Torsen sind, folgen die Ungleichungen $u_2^4 \neq 0$, $u_3^1 \neq 0$. Aus ihnen und aus (14) ergibt sich weiter $\Delta_1 \neq 0$. Das P-Paar ist demnach ein P_2-Paar.

Die involutorischen P-Paare und die P_1-Paare stehen in folgender Beziehung:

Satz 2. *Es seien die Fläche Φ, die Fläche R_{12} und ausserdem die Leitkurve (A_4) der Fläche R_{34} gegeben.*

a) *Um ein involutorisches P-Paar zu erhalten, ist es notwendig und hinreichend, dass die Leitkurve (A_3) der Fläche R_{34} einem gewissen Riccatischen Kurvensystem ^1R auf der Fläche Φ angehört.*

b) *Um ein P_1-Paar zu erhalten, ist es notwendig und hinreichend, dass die Leitkurve (A_3) der Fläche R_{34} einem gewissen Riccatischen Kurvensystem ^2R auf der Fläche Φ angehört.*

In jedem Punkte (A_3) werden die Tangenten zu den ^1R und ^2R Systemen von den Geraden (A_3A_1), (A_3A_4) harmonisch getrennt.

Beweis. Die Gleichung (17) charakterisiert ein involutorisches P-Paar. Unter Benutzung von (6) erhält (17) die Gestalt:

$$v' + (\varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1) - c - v^2 = 0 \,. \tag{18}$$

Wenn aber P ein P_1-Paar ist, dann muss Δ_1 gleich Null sein, d. h. nach (14)

$$v' - (\varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1) - c - v^2 = 0 \,. \tag{19}$$

Da die Leitkurven (A_1), (A_2), (A_4) nach der Voraussetzung gegeben sind, sind auch die Funktionen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und c bekannt. Die Gleichungen (18) und (19) stellen dann Riccatische Differentialgleichungen für die unbekannte Funktion v dar. Die Funktion v bestimmt die Kurve (A_3). Durch jeden Punkt der Fläche Φ geht eine einzige ${}^1R$- bzw. ${}^2R$-Kurve, welche durch die Gleichungen (18) bzw. (19) bestimmt ist.

Die Tangente zur Kurve (A_3) ist die Gerade

$$(A_3, A_3') = -u_3^1(A_1, A_3) + u_3^4(A_3, A_4) \,.$$

Wir setzen in die rechte Seite dieser Gleichung für u_3^4 und u_3^1 nach (6) ein. Nach (18) und (19) sind die Tangenten ${}^1t$ bzw. ${}^2t$ zu den ${}^1R$- bzw. ${}^2R$-Kurven folgende Geraden

$$\begin{aligned} {}^1t &= -(\varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1)(A_3, A_1) + (A_3, A_4) \,, \\ {}^2t &= (\varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1)(A_3, A_1) + (A_3, A_4) \,. \end{aligned}$$

Daraus kann schon leicht hergeleitet werden, dass die Geraden (A_3, A_1), (A_3, A_4), ${}^1t$, ${}^2t$ einen harmonischen Quadrupel bilden.

3. P-PAARE MIT ZWEI ABWICKELBAREN QUASIFLEKNODALFLÄCHEN

Wir führen nun einen neuen Koordinatentetraeder mit den Eckpunkten B_1, B_2, B_3, B_4 ein:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \,, & B_3 &= A_3 \,, \\ B_2 &= A_2 + \varrho A_1 \,, & B_4 &= A_4 + \sigma A_3 \,. \end{aligned} \tag{20}$$

Dabei stellen ϱ und σ Funktionen des Parameters u dar. Offensichtlich ist

$$(B_1, B_2, B_3, B_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4) \,.$$

Die infinitesimale Verrückung des neuen Tetraeders ist durch die Gleichungen

$$\mathrm{d}B_i = b_i^k B_k \,, \quad i, k = 1, 2, 3, 4$$

bestimmt. Differenziert man die Gleichungen (20), so folgt unter Gebrauch von (6) die Tabelle

$$
\begin{aligned}
(21)\qquad & b_1^1 = u_1^1 \, du\,, && b_2^1 = [u_2^1 + \varrho(u_1^1 - u_2^2)] \, du + d\varrho\,,\\
& b_1^2 = 0\,, && b_2^2 = u_2^2 \, du\,,\\
& b_1^3 = du\,, && b_2^3 = (u_2^3 - \sigma u_2^4 + \varrho) \, du\,,\\
& b_1^4 = 0\,, && b_2^4 = u_2^4 \, du\,,\\
& b_3^1 = u_3^1 \, du\,, && b_4^1 = (u_4^1 + \sigma u_3^1 - \varrho) \, du\,,\\
& b_3^2 = 0\,, && b_4^2 = du\,,\\
& b_3^3 = (u_3^3 - \sigma) \, du\,, && b_4^3 = [u_4^3 + \sigma(u_3^3 - u_4^4) - \sigma^2] \, du + d\sigma\,,\\
& b_3^4 = du\,, && b_4^4 = (u_4^4 + \sigma) \, du\,.
\end{aligned}
$$

Wir werden voraussetzen, dass P ein P_2-Paar ist, d. h. es existiert eine einzige Q-Fläche $\bar{\Phi} \neq \Phi$. Wir lassen ihre Q-Punkte mit B_2 und B_4 zusammenfallen. Die Q-Geraden sind also (B_1, B_3), (B_2, B_4). Die Koordinaten ϱ und σ sind durch die Ausdrücke (15) gegeben, d. h., es ist

$$
(22)\qquad \varrho = \frac{u_2^3 u_3^1 + u_2^4 u_4^1}{u_2^4 - u_3^1}\,, \qquad \sigma = \frac{u_2^3 + u_4^1}{u_2^4 - u_3^1}\,.
$$

Auf Grund von (22) ist weiter

$$
(23)\qquad b_2^3 = 0\,, \quad b_4^1 = 0\,.
$$

Wir stellen uns jetzt die Frage, unter welchen Bedingungen auch die Fläche $\bar{\Phi}$ eine Torse wird. Es muss dann

$$
(B_2, B_4, dB_2, dB_4) = 0
$$

gelten.

Nach Durchführung der Rechnung ergibt sich wegen (23)

$$
(24)\qquad b_2^1 b_4^3 = 0\,.
$$

Satz 3. *Wenn beide Q-Flächen Φ und $\bar{\Phi}$ eines P_2-Paares Torsen sind, dann liegt die Rückkehrkante der Fläche $\bar{\Phi}$ auf R_{12} oder R_{34}. Im ersten Falle ist b_2^1, im zweiten b_4^3 gleich Null.*

Beweis. Wir nehmen an, dass b_2^1 gleich Null ist. Man hat dann wegen (23)

$$
(25)\qquad dB_2 = b_2^2 B_2 + b_2^4 B_4\,.
$$

Daraus folgt, dass die Geraden $(B_2 B_4)$ eine Torse mit der Rückkehrkante (B_2) auf der Fläche R_{12} erzeugen.

Wenn wir b_4^3 gleich Null voraussetzen, dann ist wegen (23)

$$dB_4 = b_4^2 B_2 + b_4^4 B_4 \,. \tag{26}$$

Ähnlich wie oben zeigt sich auch die Gerade (B_2B_4) als die Tangente der Q-Kurve (B_4). Die Bedingungen $b_2^1 = 0$ bzw. $b_4^3 = 0$ sind also hinreichend dafür, dass $\bar{\Phi}$ eine Torse mit der Rückkehrkante (B_2) bzw. (B_4) ist. Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingungen folgt aus (24).

Wir werden nun den Fall ermitteln, wenn ausser Φ und $\bar{\Phi}$ noch eine weitere Fläche aus dem P-Paar eine Torse ist. Man muss folgende Fälle unterscheiden:

a) R_{12} ist eine Torse, die Rückkehrkante der Fläche $\bar{\Phi}$ liegt auf R_{12},
b) R_{12} ist eine Torse, die Rückkehrkante der Fläche $\bar{\Phi}$ liegt auf R_{34},
c) R_{34} ist eine Torse, die Rückkehrkante der Fläche $\bar{\Phi}$ liegt auf R_{12},
d) R_{34} ist eine Torse, die Rückkehrkante der Fläche $\bar{\Phi}$ liegt auf R_{34}.

Im Folgenden untersuchen wir die Bedingungen, unter welchen die vier angegebenen Fälle existieren, und beschreiben, auf welche Weise die betrachteten Flächenquadrupel gebildet werden können.

Fall a) Aus den Voraussetzungen, dass R_{12} eine Torse ist und dass die Rückkehrkante der Fläche $\bar{\Phi}$ auf R_{12} liegt, ergibt sich

$$u_2^4 = 0 \,, \quad b_2^1 = 0 \,.$$

Wenn diese Gleichungen ausführlich geschrieben werden, erhalten wir nach (6) und (21) folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1 &= 0 \,, \\ -(\Theta_4 + 2\Theta_3') + (\varkappa_1' - \varkappa_1\varkappa_2 - 4\Theta_3)\varkappa_2 - (\varkappa_1' - \varkappa_1\varkappa_2 - 4\Theta_3)' &= 0 \,. \end{aligned} \tag{27}$$

Aus der ersten Gleichung drücken wir explizit die Funktion $\varkappa_1$ aus und setzen sie in die zweite. Die so entstandene gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung für die Unbekannte $\varkappa_2$ hat eine von drei Konstanten abhängige Lösung. Die erhaltenen Funktionen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ bestimmen die Fläche R_{12}, dagegen sind beide Funktionen v und c, die die Fläche R_{34} bestimmen, ganz willkürlich zu wählen. Da $u_2^4 = 0$, ist nach (21) auch $b_2^4 = 0$. Aus der Gleichung (25) ergibt sich, dass der Punkt B_2 fest ist. Folglich sind R_{12} sowie $\bar{\Phi}$ Kegelflächen mit einem gemeinsamen Scheitel, in welchem beide Rückkehrkanten entartet worden sind.

Fall b) Die Fläche R_{12} ist eine Torse und die Fläche $\bar{\Phi}$ hat ihre Rückkehrkante auf R_{34}. Dann ist es notwendig und hinreichend, dass

$$u_2^4 = 0 \,, \quad b_4^3 = 0$$

oder

$$\begin{aligned} \varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1 &= 0 \,, \\ \sigma' - \sigma^2 + \sigma(v + \varkappa_2) + c - \varkappa_1 &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

ist.

Dabei bekommt σ unter Benutzung von (6) und (22) die Gestalt:

$$\sigma = \frac{\varkappa_1' - \varkappa_1\varkappa_2 - 4\Theta_3 + v\varkappa_1 + c\varkappa_2 - vc + c'}{-v' + v^2 + c}.$$

Nach Eliminieren der Grössen $\varkappa_1$ und σ erhalten wir aus den drei vorangehenden Gleichungen eine Differentialgleichung

$$\varphi(\varkappa_2''', c'', v'', \ldots) = 0,$$

wo an Stelle der Punkte Ableitungen der Funktionen von niedrigerer Ordnung stehen. Denken wir uns c und v, d. h. die Fläche R_{34}, als gegeben, dann kann aus der Gleichung $\varphi = 0$ die Funktion $\varkappa_2$ und aus (28) $\varkappa_1$, d. h. die Fläche R_{12} ermittelt werden.

Fall c) Die Fläche R_{12} ist eine Torse, die Fläche $\bar{\Phi}$ hat ihre Rückkehrkante auf R_{34}. Es sind also u_3^1 und b_2^1 gleich Null. Daraus ergibt sich das System von Differentialgleichungen:

$$(29) \qquad v' - v^2 - c = 0,$$

$$\varrho' - \varrho(v + \varkappa_2) - [v(\varkappa_1' - \varkappa_1\varkappa_2 - 4\Theta_3) + c(\varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1) + \Theta_4 + 2\Theta_3'] = 0.$$

Für ϱ muss man noch:

$$(30) \qquad \varrho = v\varkappa_1 + c\varkappa_2 - vc + c'$$

einsetzen. Beim Berechnen des Systems schreiten wir wie im vorangehenden Falle fort. Durch das Einsetzen der Grösse c aus der ersten Gleichung (29) in die zweite bei Beachtung von (30) ergibt sich eine Differentialgleichung $\psi(v''', \varkappa_1'', \varkappa_2'', \ldots) = 0$, in der wir wieder $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ als willkürliche, die Fläche R_{12} bestimmende Funktionen betrachten können. Die Fläche R_{34} ist durch die Funktionen v und c gegeben, wobei v eine Lösung von $\psi = 0$ ist und c aus (29) folgt.

Fall d) In diesem Falle werden die Grössen u_3^1 und b_4^3 Null gleich gesetzt. Man erhält das System

$$v' - v^2 - c = 0,$$

$$\sigma' - \sigma^2 + \sigma(v + \varkappa_2) + c - \varkappa_1 = 0,$$

$$\sigma = \frac{\varkappa_1' - \varkappa_1\varkappa_2 - 4\Theta_3 + v\varkappa_1 + c\varkappa_2 - vc + c'}{\varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1}.$$

Aus diesem System ergibt sich wieder eine Differentialgleichung dritter Ordnung für die unbekannte Funktion v. Die Funktionen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ können willkürlich gewählt werden, die Funktionen v und c sind die Lösungen des Systems. Damit sind beide Flächen R_{12}, R_{34} bestimmt.

In allen vier Fällen war es möglich, zwei Funktionen, die eine der Flächen des P-Paares bestimmen, ganz willkürlich zu wählen. Die andere Fläche war von der Wahl drei willkürlicher Konstanten bei Lösung gewisser gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung abhängig.

4. ROSENFELDSCHES BILD DES P-PAARES IN S_5

Der Gegenstand der Betrachtungen in diesem Kapitel ist die Abbildung des P-Paares in den projektiven Raum S_5. Das Bild des P-Paares ist ein Paar der Kurven π_{12}, π_{34}. Die Korrespondenz zwischen den Geraden des P-Paares in S_3 überträgt sich auf die Korrespondenz zwischen den Punkten der Kurven π_{12}, π_{34} in S_5. Das Bild der Geraden (A_i, A_k) bezeichnen wir mit A_{ik}.

Ein Paar sich entsprechender Geraden (A_1, A_2), (A_3, A_4) bildet sich in das Paar der Punkte A_{12}, A_{34} ab. Ihre Verbildungslinie λ bildet bei veränderlichem u eine Regelfläche (λ) in S_5, die wir das Rosenfeldsche Bild des P-Paares bezeichnen [1]. Die Tangentialebenen der Fläche (λ) längs einer Erzeugenden λ bestimmen einen Tangentialraum T. Als Charakter m von λ bezeichnen wir die Dimension des Raumes T [3]. Es ist offensichtlich m gleich 3 oder 2. Wenn die in den Punkten A_{12}, A_{34} konstruierten Tangenten an die Kurven π_{12}, π_{34} keinen gemeinsamen Punkt haben, so ist m gleich 3, wenn sie sich schneiden, so ist m gleich 2. Besitzen sämtliche Geraden λ denselben Charakter m, so sagen wir, dass auch die Fläche (λ) den Charakter m besitzt.

Als Charakter des P-Paares in S_3 bezeichnen wir den Charakter des Rosenfeldschen Bildes des betrachteten P-Paares in S_5.

Der Zusammenhang zwischen einem P-Paare und dessen Charakter ist durch den folgenden Satz ausgedrückt:

Satz 4. *Ein P-Paar ist dann und nur dann ein*

1) P_2-*Paar, wenn es den Charakter* 3 *besitzt und wenn gleichzeitig der Tangentialraum T den Punkt* A_{13} *nicht enthält,*
2) P_1-*Paar, wenn es den Charakter* 3 *besitzt und wenn gleichzeitig der Raum T den Punkt* A_{13} *enthält, dagegen aber den Punkt* A_{23} *nicht,*
3) P_{01}-*Paar, wenn es den Charakter* 3 *besitzt und wenn gleichzeitig der Raum T die Punkte* A_{13} *und* A_{23} *enthält,*
4) P_0-*Paar, wenn es den Charakter* 2 *besitzt.*

Beweis. Als Ecken des Koordinatensexaeders in S_5 ist es zweckmässig die Punkte A_{ik} zu nehmen. Jeder Punkt R kann mit Hilfe der Koordinaten r_{ik} ausgedrückt werden:

$$R = r_{12}A_{12} + r_{13}A_{13} + r_{14}A_{14} + r_{23}A_{23} + r_{24}A_{24} + r_{34}A_{34} . \tag{31}$$

Die Tangentialebene der Fläche (λ) im Punkte A_{12} ist von den Punkten A_{12}, A_{34} und A'_{12}, diejenige im Punkte A_{34} von Punkten A_{34}, A_{12} und A'_{34} aufgespannt. Man erhält durch Differenzieren

$$\begin{aligned} A'_{12} &= (u_1^1 + u_2^2) A_{12} + u_3^2 A_{13} + u_2^4 A_{14} - u_1^3 A_{23} , \\ A'_{34} &= \qquad\qquad - u_4^1 A_{13} + u_3^1 A_{14} - u_4^2 A_{23} + (u_3^3 + u_4^4) A_{34} . \end{aligned} \tag{32}$$

Der Raum T ist durch die Punkte A_{12}, A_{34}, A'_{12}, A'_{34} bestimmt. Seine Dimension ist gleich 3, wenn die vier genannten Punkte linear unabhängig sind. Sie ist gleich 2, wenn sie linear abhängig sind. Die Dimension des Raumes

$$T = (A_{12}, A_{34}, u_2^3 A_{13} + u_2^4 A_{14} - u_1^3 A_{23}, -u_4^1 A_{13} + u_3^1 A_{14} - u_4^2 A_{23})$$

ist folglich 3, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} u_2^3 & u_2^4 & -u_1^3 \\ -u_4^1 & u_3^1 & -u_4^2 \end{pmatrix}$$

den Rang 2 hat; und ist gleich 2, wenn sie den Rang 1 hat. Die Matrix stimmt bis auf die Folge der Spalten und die Vorzeichen bei diesen mit der Matrix (13) überein und hat denselben Rang wie (13).

A) Die Matrix (13) hat gerade dann den Rang $h = 2$, wenn P ein P_2-, P_1- oder ein P_{01}-Paar ist. Um sich zu überzeugen, ob der Punkt A_{13} im Raume T liegt oder nicht, muss man feststellen, wann die Punkte

$$A_{12}, A_{34}, A_{13}, u_2^4 A_{14} - u_1^3 A_{23}, u_3^1 A_{14} - u_4^2 A_{23}$$

linear unabhängig oder abhängig sind. Es zeigt sich, dass sie linear unabhängig (abhängig) sind, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_2^4 & u_1^3 \\ u_3^1 & u_4^2 \end{vmatrix}$$

ungleich (gleich) Null ist. Die Determinante war in (14) als Δ_1 bezeichnet. Wir erhalten also nach dem Satz 1:

a) $\Delta_1 \neq 0 \Leftrightarrow P$ ist ein P_2-Paar, der Punkt A_{13} gehört dem Raume T nicht an,

b) $\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow P$ ist ein P_1- oder P_{01}-Paar, der Punkt A_{13} gehört dem Raume T an.

Wir nehmen weiter an, dass Δ_1 gleich Null ist und fragen, wann der Punkt A_{23} im Raume T nicht liegt (liegt). Der Raum enthält nicht (enthält) den Punkt A_{23}, wenn die Punkte

$$A_{12}, A_{34}, A_{23}, u_2^3 A_{13} + u_2^4 A_{14}, -u_4^1 A_{13} + u_3^1 A_{14}$$

linear unabhängig (abhängig) sind, d. h., wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_2^3 & -u_4^1 \\ u_2^4 & u_3^1 \end{vmatrix}$$

ungleich (gleich) Null ist. Diese Determinante war oben mit Δ_3 bezeichnet, also

α) $\Delta_3 \neq 0 \Leftrightarrow P$ ist ein P_1-Paar, der Punkt A_{23} liegt im Raume T nicht,

β) $\Delta_3 = 0 \Leftrightarrow P$ ist ein P_{01}-Paar, der Punkt A_{23} liegt im Raume T.

B) Die Matrix (13) hat genau dann den Rang $h = 1$, wenn P ein P_0-Paar ist. Damit ist der Beweis beendet.

Für jedes $u \in I$ bestimmen die Funktionen $\varkappa_1, \varkappa_2$ in S_3 eine aus den ∞^2 durch A_1 gehenden Geraden und die Funktionen c, v eine aus ∞^2 in der Ebene (A_1, A_3, A_4) liegenden Geraden. Beide Geradenmengen bilden sich in S_5 als Punkte zweier ganz der Kleinschen Quadrik Q_4^2 angehörenden Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ab. Ändert sich der Parameter u, so erzeugen die Ebenen $\varepsilon_1(u), \varepsilon_2(u)$ zwei Monosysteme von Ebenen, welche sich in Korrespondenz befinden. Die entsprechenden Ebenen haben die Gerade (A_{13}, A_{14}) gemeinsam. Die oben genannten Kurven π_{12}, π_{34} schneiden die Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ in zwei sich entsprechenden Punkten A_{12}, A_{34}.

Wir führen nun in S_5 ein neues Koordinatensystem ein, dessen Eckpunkte N_i $(i = 1, \dots, 6)$ bei festem u unabhängig von den Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, c, v$ sind. Die Ecken seien

$$
\begin{aligned}
&N_1 = (YY'), \qquad && N_4 = (Y'Y''), \\
&N_2 = (YY''), && N_5 = (Y'Y'''), \\
&N_3 = (YY'''), && N_6 = (Y''Y''').
\end{aligned} \tag{33}
$$

Unter Gebrauch von (6) erhalten wir die Formeln:

$$
\begin{aligned}
A_{12} &= \varkappa_1 N_1 + \varkappa_2 N_2 + N_3, \\
A_{13} &= N_1, \\
A_{14} &= N_2, \\
A_{23} &= -\varkappa_1 v N_1 - \varkappa_2 v N_2 - v N_3 - \varkappa_2 N_4 - N_5, \\
A_{24} &= -\varkappa_1 c N_1 - \varkappa_2 c N_2 - c N_3 + \varkappa_1 N_4 - N_6, \\
A_{34} &= -cN_1 + vN_2 + N_4.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Das Ebenensystem (ε_1) bildet eine Mannigfaltigkeit mit den Leitkurven $(N_1), (N_2), (N_3)$. Das Ebenensystem (ε_2) bildet eine Mannigfaltigkeit mit den Leitkurven $(N_1), (N_2), (N_4)$. Man bildet nun in den Punkten $A_{12} \in \varepsilon_1$ bzw. $A_{34} \in \varepsilon_2$ die Tangentialräume

$$
\tau_{12} = (N_1, N_2, N_3, \mathrm{d}A_{12}), \quad \tau_{34} = (N_1, N_2, N_4, \mathrm{d}A_{34}). \tag{35}
$$

Aus (32) und (34) folgt nun

$$
\begin{aligned}
A'_{12} &= (\varkappa'_1 - 4\Theta_3) N_1 + (\varkappa'_2 + \varkappa_1) N_2 + \varkappa_2 N_3 + \varkappa_2 N_4 + N_5, \\
A'_{34} &= c' N_1 + (v' - c) N_2 + v N_3 - \varkappa_2 N_4 + N_5.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Durch Einsetzen der rechten Seiten (36) in (35) erhält man

$$
\begin{aligned}
\tau_{12} &= (N_1, N_2, N_3, \varkappa_2 N_4 + N_5), \\
\tau_{34} &= (N_1, N_2, N_4, v N_3 + N_5).
\end{aligned}
$$

Die Räume τ_{12} bzw. τ_{34} sind von $\varkappa_1$ bzw. c unabhängig. Es ist ersichtlich, dass bei u = konst., $\varkappa_2$ = konst. die Geraden (A_1, A_2) ein Büschel bilden, dem in S_5 eine Gerade in ε_1 entspricht. Ebenso bilden die Geraden (A_3, A_4) unter Beibehaltung u = konst., v = konst. ein Büschel, dem in S_5 eine Gerade in ε_2 entspricht. Daraus schliesst man:

Die Tangentialräume τ_{12}, τ_{34} der Monosysteme $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ in Punkten

a) der Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sind in einem vierdimensionalen Raum $N_6 = 0$ enthalten,

b) der Geraden $\varkappa_2$ = konst. in der Ebene ε_1 sowie der Geraden v = konst. in der Ebene ε_2, d. i. in Punkten der Geraden zweier Büschel mit gemeinsamem Zentrum N_1, bleiben fest.

Beide Tangentialräume τ_{12}, τ_{34} schneiden sich in der Ebene $\varepsilon_3 = (A_{13}, A_{14}, A_{23})$, die durch die gemeinsame Gerade der Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ geht.

5. DER ZUM P-PAAR ZUGEORDNETE K-KOMPLEX

Satz 5. *Es seien $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ zwei konjugierte Geraden des Schmiegkomplexes $L(u)$, der in einem Punkte $Y(u)$ der Kurve (Y) konstruiert ist. Gehört (Y) keinem linearen Komplex an, dann sind die entsprechenden Geraden (A_1, A_2), (A_3, A_4) entweder beide regulär und bilden ein P_1-Paar oder sind sie beide torsal und bilden ein P_{01}-Paar. Gehört dagegen (Y) einem linearen Komplex an, dann sind die Geraden $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ entweder keine Torsalgeraden und dann bilden sie ein P^r_0-Paar oder sind sie beide torsal und dann bilden sie ein P^s_0-Paar.*

Beweis. Mit dem Schmiegkomplex $L(u)$ in einem der Kurve (Y) angehörigen Punkte Y bezeichnen wir einen linearen Geradenkomplex, der fünf aufeinanderfolgende Tangenten der Kurve (Y) besitzt. Das Bild des Komplexes in S_5 liegt in einem linearen Raum S_4, der durch den Punkt $N_1 = (Y, Y')$ und seine vier nacheinander folgende Ableitungen bestimmt ist, d. h. nach (33) durch die Punkte

$$(37)\qquad N_1, N_2\,,\quad N_3 + N_4\,,\quad -4\Theta_3 N_1 + 2N_5\,,\quad 2\Theta_4 N_1 - 4\Theta_3 N_2 + 2N_6\,.$$

Es sei L das sekundäre Bild des Komplexes L, d. h. der Pol des Raumes S_4 in bezug auf die Quadrik Q_4^2. Die Koordinaten des Punktes L im Koordinatensystem mit den Ecken (33) bezeichnen wir mit l_{ik}. Der Punkt L und die Bilder $R(r_{ik})$ der Geraden des Komplexes L sind polar konjugiert in bezug auf die Quadrik Q_4^2

$$L \times R = l_{12}r_{34} + l_{13}r_{42} + l_{14}r_{23} + l_{23}r_{14} + l_{42}r_{13} + l_{34}r_{12}\,.$$

Da diese Gleichung für alle Punkte (37) erfüllt sein muss, ergibt sich

$$l_{12} = 0\,,\quad l_{13} = 0\,,\quad l_{24} = 0\,,\quad l_{34} = 0\,,$$
$$l_{14} + l_{23} = 0\,.$$

Für den Punkt L erhalten wir nun

$$L = N_3 - N_4$$

oder, wenn wir wieder zum Koordinatensystem mit den Ecken A_{ik} zurückkehren,

$$L = A_{12} - A_{34} - (\varkappa_1 + c) A_{13} + (v - \varkappa_2) A_{14} . \tag{38}$$

Wir verlangen nun, dass die Geraden $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ konjugierte Geraden sind. Wenn irgendeine Gerade q die Gerade (A_1, A_2) schneidet, dann schneidet sie auch die Gerade (A_3, A_4). Aus (38) folgen wegen $L \times q = 0$, $A_{12} \times q = 0$, $A_{34} \times q = 0$ die Gleichungen

$$\varkappa_1 = -c , \quad \varkappa_2 = v . \tag{39}$$

Diese beiden Gleichungen erscheinen als notwendige und auch hinreichende Bedingungen dafür, dass die Geraden $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ konjugierte Geraden des Schmiegkomplexes sind.

Wir drücken jetzt die Grössen aus (14) mit Hilfe von (6) aus:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1 - v' + v^2 + c , \\ \Delta_2 &= \varkappa_1' - \varkappa_1\varkappa_2 - 4\Theta_3 + v\varkappa_1 + c\varkappa_2 - vc + c' , \\ \Delta_3 &= (\varkappa_1' - \varkappa_1\varkappa_2 - 4\Theta_3)(v' - v^2 - c) + \\ &\quad + (\varkappa_2' - \varkappa_2^2 + \varkappa_1)(v\varkappa_1 + c\varkappa_2 - vc + c') . \end{aligned} \tag{40}$$

Sind $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ konjugierte Geraden, ergibt sich unter Gebrauch von (39)

$$\Delta_1 = 0 , \quad \Delta_2 = -4\Theta_3, \quad \Delta_3 = -4\Theta_3(v' - v^2 - c) . \tag{41}$$

Die geometrische Bedeutung der Bedingung $\Theta_3 = 0$ ist, dass die Kurve (Y) einem linearen Komplex angehört [5]. Aus (41) folgt:

A) $\Theta_3 \neq 0 \Leftrightarrow \Delta_1 = 0$, $\Delta_2 \neq 0$. Wenn die Geraden $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ Torsalgeraden sind, ergibt sich $\Delta_3 = 0$. Wenn sie keine Torsalgeraden sind, ist $\Delta_3 \neq 0$ und die Behauptung des ersten Teiles des letzten Satzes ist eine Folgerung des Satzes 1.

B) Es sei $\Theta_3 = 0$. Die Kurve (Y) gehört einem linearen Komplex an und alle Schmiegkomplexe $L(u)$ für $u \in I$ fallen zusammen. Dann ist $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ und die Behauptung des zweiten Teiles des Satzes folgt wie oben. Damit ist der Beweis beendet.

Wir ordnen nun dem betrachteten P-Paar einen quasispezialen Komplex K zu [4]. Er wird durch alle Geraden gebildet, die die beiden sich entsprechenden Geraden $(A_1, A_2), (A_3, A_4)$ schneiden. Der Komplex K kann in zwei Arten in ∞^2 Geradenbüschel zerlegt werden. Bei der ersten Zerlegung befinden sich ihre Zentren in Punkten B_2 der Geraden (A_1, A_2), wobei $\gamma_1 = (B_2, A_3, A_4)$ die Büschelebenen sind, bei der zweiten in Punkten B_4, wobei $\gamma_2 = (B_4, A_1, A_2)$ die Büschelebenen sind.

Wenn ϱ und σ sowie u unabhängige Parameter sind, stellen sich die Geraden des Komplexes als

$$R = (\varrho A_1 + A_2, \sigma A_3 + A_4) \tag{42}$$

dar. Ausser ihnen gehören zum Komplex noch diejenigen Geradenbüschel, die ihre Scheitel in A_1 und A_3 haben, d. h. die folgenden Geraden:

$$(A_1, A_3), \quad (A_1, \sigma A_3 + A_4), \quad (\varrho A_1 + A_2, A_3)\,. \tag{43}$$

Satz 6. *Der zu einem P-Paar zugeordnete Komplex K ist genau dann ein linearer Komplex, wenn folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden:*

1. *Die Kurve (Y) gehört zu dem linearen Komplex K.*

2. *Die entsprechenden Geraden (A_1, A_2), (A_3, A_4) des P-Paares sind konjugierte Geraden des Komplexes K.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass K ein linearer Komplex ist. Die Koordinaten des sekundären Bildes A im Koordinatensystem mit den Ecken A_{ik} seien durch a_{ik} bezeichnet. Da die Bilder der Geraden (42) mit A polar konjugiert sind, erhält man

$$-a_{13} + \sigma a_{14} + \varrho a_{23} - \varrho\sigma a_{24} = 0\,.$$

Diese Gleichung muss von ϱ und σ unabhängig sein, also ist

$$a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$$

und wir erhalten

$$A = a_{12}A_{12} + a_{34}A_{34}\,. \tag{44}$$

Der Pol A ist für alle Parameterwerte u, ϱ, σ fest, daher

$$\mathrm{d}A = \Gamma A\,, \quad \Gamma = \Gamma(u, \varrho, \sigma, \mathrm{d}u, \mathrm{d}\varrho, \mathrm{d}\sigma)\,.$$

Aus (44) erhält man nach Differentiation unter Beachtung, dass die Punkte A_{ik} linear unabhängig sind, folgendes System

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a_{12} + a_{12}(u_1^1 + u_2^2)\,\mathrm{d}u - a_{12}\Gamma &= 0\,, \\ \mathrm{d}a_{34} + a_{34}(u_3^3 + u_4^4)\,\mathrm{d}u - a_{34}\Gamma &= 0\,, \\ u_2^3 a_{12} - u_4^1 a_{34} &= 0\,, \\ u_2^4 a_{12} + u_3^1 a_{34} &= 0\,, \\ u_1^3 a_{12} + u_4^2 a_{34} &= 0\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt, dass die Matrix (13) den Rang 1 haben muss und dass es sich also notwendigerweise um ein P_0-Paar handelt. Nach (6) folgt aus der letzten Gleichung $a_{12} + a_{34} = 0$. Durch Elimination von Γ aus (45) folgt

$$u_1^1 + u_2^2 - u_3^3 - u_4^4 = 0 ,$$

woraus man $\varkappa_2 = v$ bekommt. Da jedes P_0-Paar durch $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ charakterisiert wird, erhalten wir noch zwei weitere Bedingungen $\varkappa_1 = -c$, $\Theta_3 = 0$, insgesamt also drei Bedingungen:

$$\Theta_3 = 0 , \quad \varkappa_1 = -c , \quad \varkappa_2 = v . \tag{46}$$

Die erste dieser Gleichungen drückt die erste Behauptung des Satzes aus, die zwei übrigen stimmen mit den Gleichungen (39) überein und drücken die zweite Behauptung des letzten Satzes aus. Umgekehrt, wenn die zwei Bedingungen des Satzes erfüllt sind, dann ergeben sich daraus die Gleichungen (46). Man kann sich leicht überzeugen, dass der Punkt A und die Geraden (43) polar konjugiert sind und dass der Punkt A fest ist.

Im weiteren setzen wir voraus, dass K kein linearer Komplex ist. Wir fragen jetzt nach der Lage der Inflexionszentren der einzelnen Komplexgeraden. Im allgemeinen hat jede Gerade vier Inflexionszentren. Diejenigen Geraden, die mehr als vier Zentren haben, werden wir als besondere Geraden bezeichnen und lassen sie ausser Betracht.

Satz 7. *Es sei K ein dem P-Paar zugeordneter Komplex, der nicht linear ist. Gerade dann, wenn 2 Inflexionszentren jeder nicht besonderen Geraden in einem Punkte der Fläche R_{12} und die übrigen 2 in einem Punkte der Fläche R_{34} zusammenfallen, handelt es sich um ein P_0-Paar. Gerade dann, wenn 2 Inflexionszentren in einem Punkte der Fläche R_{12} zusammenfallen, während die anderen 2 verschieden sind, handelt es sich um ein P_{01}-Paar.*

Beweis. Die Geraden eines Quasispezialkomplexes haben stets ein Inflexionszentrum auf der Fläche R_{12} und ein zweites auf der Fläche R_{34} [4]. Wir setzen voraus, dass die Gerade R keine besondere Gerade ist und dass sie weder dem Büschel mit dem Scheitel A_1 noch demjenigen mit dem Scheitel A_3 angehört.

Man nimmt an, dass der Punkt

$$X = B_2 + tB_4 \tag{47}$$

auf der Komplexgerade $R = (B_2, B_4)$ ein Inflexionszentrum ist. Dann muss die Ebene Π, die dem Punkte X in der Normalkorrelation auf der Komplexgeraden zugeordnet ist, stationär sein. Die durch den Punkt X gehenden Geraden bilden eine Kegelfläche. Da der Scheitel X der Kegelfläche fest ist, folgt

$$\mathrm{d}X = \mu X , \quad \mu = \mu(u, \varrho, \sigma, t, \mathrm{d}t) \tag{48}$$

(μ ist der Proportionalitätsfaktor). Wenn wir die Gleichung (47) differenzieren, erhalten wir unter Beachtung von (48) folgendes System von Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&b_1^2 + tb_4^1 &&= 0\,,\\
&b_2^2 + tb_4^2 - \mu &&= 0\,,\\
&b_2^3 + tb_4^3 &&= 0\,,\\
&b_2^4 + tb_4^4 - \mu t + \mathrm{d}t &&= 0\,.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Den in der Form b_i^k beim Differential $\mathrm{d}u$ stehenden Ausdruck bezeichnen wir mit β_i^k. Nach (21) ist also

$$
b_2^1 = \beta_2^1\,\mathrm{d}u + \mathrm{d}\varrho\,, \quad b_4^3 = \beta_4^3\,\mathrm{d}u + \mathrm{d}\sigma
\tag{50}
$$

und $b_i^k = \beta_i^k$ für alle übrigen Formen. Aus dem System (49) eliminieren wir zuerst den Faktor μ und danach drücken wir die Differentiale $\mathrm{d}\varrho$, $\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}t$ mittels $\mathrm{d}u$ aus. Es ergibt sich das System:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\varrho &= -(\beta_2^1 + t\beta_4^1)\,\mathrm{d}u\,,\\
t\,\mathrm{d}\sigma &= -(\beta_2^3 + t\beta_4^3)\,\mathrm{d}u\,,\\
\mathrm{d}t &= \left[-\beta_2^4 + t(\beta_2^2 - \beta_4^4) + \beta_4^2 t^2\right]\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Die Tangentialebene

$$
\Pi = (B_2, B_4, \mathrm{d}B_2)
$$

der Kegelfläche entlang der Geraden R bekommt unter Benutzung der Gleichungen (51) die Gestalt:

$$
\Pi = \beta_2^3(B_2, B_4, B_3) - t\,\beta_4^1(B_1, B_2, B_4)\,.
\tag{52}
$$

Durch Differenzieren dieser Gleichung und nachfolgendes Einsetzen der Differentiale $\mathrm{d}\varrho$, $\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}t$ aus (51) ergibt sich die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\Pi &= (B_2, B_4, B_3)\left\{\mathrm{d}\beta_2^3 + \left[\beta_2^3(\beta_2^2 + \beta_3^3 + \beta_4^4) - t\beta_4^1\beta_1^3\right]\mathrm{d}u\right\} +\\
&+ (B_1, B_2, B_4)\left\{-t\,\mathrm{d}\beta_4^1 + \left[\beta_2^3\beta_1^3 + \beta_4^1\beta_2^4 - t\beta_4^1(2\beta_2^2 + \beta_1^1) - \beta_4^1\beta_4^2 t^2\right]\mathrm{d}u\right\}.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Dabei ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\beta_2^3 &= \left[\beta_2^{3\prime} - \beta_1^3(\beta_2^1 + t\beta_4^1) + \beta_2^4(\beta_2^3 + t\beta_4^3)\,t^{-1}\right]\mathrm{d}u\,,\\
\mathrm{d}\beta_4^1 &= \left[\beta_4^{1\prime} + \beta_4^2(\beta_2^1 + t\beta_4^1) - \beta_3^1(\beta_2^3 + t\beta_4^3)\,t^{-1}\right]\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}
$$

Die Ebene Π soll stationär sein, daher muss

$$
\mathrm{d}\Pi = \chi\Pi\,, \quad \chi = \chi(u, \varrho, \sigma, t, \mathrm{d}u)
$$

gelten.

In diese Gleichung setzt man die rechten Seiten von (52) und (53) ein und vergleicht die Koeffizienten bei (B_2, B_4, B_3) und (B_1, B_2, B_4). Nach Eliminieren der Grösse χ ergibt sich nach einigen Umformungen folgende quadratische Gleichung für die Unbekannte t:

$$(54) \qquad 2\beta_4^1(\beta_4^1\beta_1^3 + \beta_2^3\beta_4^2)\, t^2 + [\beta_2^3\beta_4^{1\prime} - \beta_2^{3\prime}\beta_4^1 + \beta_2^3\beta_4^1(\beta_2^2 - \beta_4^4 - \beta_3^3 + \beta_1^1) + \\ + \beta_2^1(\beta_4^1\beta_1^3 + \beta_2^3\beta_4^2) - \beta_4^3(\beta_4^1\beta_2^4 + \beta_3^1\beta_2^3)]\, t - 2\beta_2^3(\beta_4^1\beta_2^4 + \beta_3^1\beta_2^3) = 0\,.$$

Ihre Wurzeln bestimmen die Parameter der Inflexionszentren der Geraden R, die nicht auf den Flächen R_{12}, R_{34} liegen. Sie sind allgemein verschieden. Wir betrachten nun die Fälle, wenn ein weiteres Inflexionszentrum mit B_2 oder B_4 zusammenfällt.

Um zwei in B_2 zusammenfallende Zentren zu erhalten, ist es notwendig und hinreichend, dass der Gleichung (54) für alle Werte der Parameter ϱ, σ, u die Wurzel t gleich Null genügt. Der Ausdruck

$$\beta_2^3 = u_2^3 + \varrho - \sigma u_2^4$$

kann nicht für alle Werte von ϱ und σ verschwinden. Man muss also voraussetzen, dass

$$(55) \qquad \beta_4^1\beta_2^4 + \beta_3^1\beta_2^3 = 0\,.$$

Wir setzen hierin aus (21) ein und erhalten

$$u_2^3u_3^1 + u_2^4u_4^1 - \sigma(u_3^1 - u_2^4) = 0$$

oder kurz $\Delta_1 - \sigma\Delta_3 = 0$ und daraus $\Delta_1 = 0, \Delta_3 = 0$. Diese beiden Bedingungen charakterisieren die P_0- und P_{01}-Paare.

Um zwei in B_2 zusammenfallende Inflexionszentren zu bekommen, ist es notwendig und hinreichend, dass der Gleichung (54) über alle Grenzen wachsendes t genügt. Da der Ausdruck

$$\beta_4^1 = u_4^1 + \sigma u_3^1 - \varrho$$

nicht für alle ϱ und σ gleich Null sein kann, muss man voraussetzen:

$$(56) \qquad \beta_4^1\beta_1^3 + \beta_2^3\beta_4^2 = 0\,.$$

Wenn man hierin aus (21) einsetzt, so erhält man

$$u_4^1 + u_2^3 + \sigma(u_3^1 - u_2^4) = 0$$

nud daraus $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$. Diese beiden Gleichungen charakterisieren das P_0-Paar.

Zwei Inflexionszentren fallen im Punkte B_2 bei den P_0- und P_{01}-Paaren, im Punkte B_4 beim P_0-Paar zusammen und umgekehrt. Das war zu beweisen.

Wir bemerken noch, dass bei gleichzeitiger Gültigkeit der beiden Gleichungen (55) und (56) der Koeffizient beim linearen Glied der Gleichung (54) zu folgender Gestalt gebracht werden kann:

$$(57) \qquad \left(\frac{\beta_4^1}{\beta_2^3}\right)' + \frac{\beta_4^1}{\beta_2^3} \cdot (u_1^1 + u_2^2 - u_3^3 - u_4^4) \,.$$

Dabei ist nach (21)

$$(58) \qquad -\beta_4^1 = -u_4^1 - \sigma u_3^1 + \varrho \,, \quad \beta_2^3 = u_2^3 - \sigma u_2^4 + \varrho \,.$$

Da die Matrix (13) den Rang 1 hat, sind die rechten Seiten der Gleichungen (58) einander gleich und der Koeffizient (57) erhält die Gestalt $2(v - \varkappa_2)$. Ist auch dieser Koeffizient gleich Null, folgen aus (40) die Gleichungen (46). Da alle Koeffizienten der Gleichung (54) gleich Null sind, kann jeder Punkt der Geraden als Inflexionszentrum angesehen werden, was mit der allgemeinen Theorie im Einklang ist, da in diesem Falle ein linearer Komplex vorhanden ist.

Literatur

[1] *Фиников С. П.*, Теория пар конгруэнций, Москва 1956.

[2] *Ивлев Е. Т.*, О паре линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве, Геом. сборник 2, Труды Томского гос. унив., с. мех.-мат., Томск *161* (1962).

[3] *Klapka J.*, Über Paare der Geradenkongruenzen mit Rosenfeldschem Bild vom Charakter **4**, Math. Nachrichten 1966, Bd. *33*.

[4] *Кованцов Н. Й.*, Теория комплексов, 1963, Киев.

[5] *Lane E. P.*, A Treatise on projective diff. Geometry, Chicago 1942.

[6] *Vala J.*, Über die Regelflächenpaare mit einer nichtabwickelbaren Quasifleknodalfläche, Czechoslovak Mathematical Journal *18*, (*93*), 1968, Praha.

[7] *Vala J.*, Über die involutorischen Paare der Regelflächen, Matematický časopis *20* (1970) No 1.

Anschrift des Verfassers: Brno, Kraví hora XII, ČSSR (Vysoké učení technické).