Czechoslovak Mathematical Journal

Josef Vala

Über einige Mannigfaltigkeiten mit linearen Erzeugenden

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), No. 2, 242–265

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101096`

ÜBER EINIGE MANNIGFALTIGKEITEN MIT LINEAREN ERZEUGENDEN

JOSEF VALA, Brno

(Eingegangen am 31. Januar 1971)

Die Fragen der Deformation des Kongruenzenpaares wurden besonders im Buche [3] behandelt. In der Abhandlung [4] betrachtet man die geometrischen Eigenschaften eines solchen Paares in dem einzigen projektiven dreidimensionalen Raume. In den letzten Jahren untersucht man im Raume ungerader Dimension die sogenannten Pseudokongruenzen [2]. In dieser Abhandlung verallgemeinert man die Ergebnisse von [4] für die Paare der torsalen Pseudokongruenzen.

a) Im $(2m - 1)$-dimensionalen projektiven Raume P_{2m-1} $(m \geqq 2)$ betrachten wir das Paar P der Mannigfaltigkeiten $V, \bar{V}$. Die Mannigfaltigkeit V ist durch die m-parametrige (hinreichend glatte) Gesamtheit der $(m - 1)$-dimensionalen linearen Räume P_{m-1} gebildet. Ähnlich besteht $\bar{V}$ aus der m-parametrigen (hinreichend glatten) Gesamtheit der $(m - 1)$-dimensionalen linearen Räume $\bar{P}_{m-1}$. $u_1, u_2, \ldots, u_m$ seien die Hauptparameter, die die Lage der Erzeugenden $P_{m-1}, \bar{P}_{m-1}$ auf der entsprechenden Mannigfaltigkeit V, bzw. $\bar{V}$ bestimmen. Diese Parameter sollen alle Werte aus dem Gebiet Δ einnehmen. Das Paar P besitze die Korrespondenz $C : V(P_{m-1}) \to \bar{V}(\bar{P}_{m-1})$, wobei die zueinander zugeordneten Erzeugenden $P_{m-1}, \bar{P}_{m-1}$ stets denselben m Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ entsprechen. Für alle Werte $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \Delta$ sollen die sich entsprechenden Erzeugenden $P_{m-1}, \bar{P}_{m-1}$ keinen gemeinsamen Punkt haben.

Im Raume P_{2m-1} betrachten wir ein bewegliches Koordinatensystem mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_m, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_m$. Für jede gegebenen Werte der Hauptparameter aus dem Gebiet Δ sollen die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_m$ unabhängig sein und sollen zum Raume P_{m-1} gehören. Ähnlich sind die Punkte $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_m$ für alle angeführten Werte der Hauptparameter unabhängig und liegen in den zugehörigen Räumen $\bar{P}_{m-1}$. Für die infinitesimale Bewegung des Bezugssystems gilt dann:

$$(1) \qquad \mathrm{d}A_i = \omega_i^s A_s + \tilde{\omega}_i^s \bar{A}_s\,, \quad \mathrm{d}\bar{A}_i = \tilde{\bar{\omega}}_i^s A_s + \bar{\omega}_i^s \bar{A}_s\,,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m\,, \quad s = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Nach den Strukturgleichungen des projektiven $(2m - 1)$-dimensionalen Raumes folgt daraus:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{D}\omega_i^s &= [\omega_i^k, \omega_k^s] + [\tilde{\omega}_i^k, \tilde{\bar{\omega}}_k^s]\,, & \mathrm{D}\tilde{\omega}_i^s &= [\omega_i^k, \tilde{\omega}_k^s] + [\tilde{\omega}_i^k, \bar{\omega}_k^s]\,, \\ \mathrm{D}\tilde{\bar{\omega}}_i^s &= [\tilde{\bar{\omega}}_i^k, \omega_k^s] + [\bar{\omega}_i^k, \tilde{\bar{\omega}}_k^s]\,, & \mathrm{D}\bar{\omega}_i^s &= [\tilde{\bar{\omega}}_i^k, \tilde{\omega}_k^s] + [\bar{\omega}_i^k, \bar{\omega}_k^s]\,. \end{aligned}$$

Die Formen $\tilde{\omega}_i^s$, $\tilde{\bar{\omega}}_i^s$ sind die Hauptformen.

Der Berührraum τ_M *der Mannigfaltigkeit* V *im Punkte*

$$M = x^i A_i$$

ist der lineare Raum der niedrigsten Dimension, der die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_m$, $\mathrm{d}M$ enthält. Nach den Gleichungen (1) folgt leicht:

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{d}M = \mathrm{d}x^i A_i + x^i \omega_i^s A_s + x^i \tilde{\omega}_i^s \bar{A}_s\,.$$

Unter der Bezeichnung

$$\tilde{\omega}_i^s = a_i^{sk}\, \mathrm{d}u_k\,; \quad i, s, k = 1, 2, \ldots, m\,;$$

ist der Raum τ_M durch die Punkte

$$A_1, A_2, \ldots, A_m,\ x^i a_i^{s1} \bar{A}_s,\ x^i a_i^{s2} \bar{A}_s, \ldots, x^i a_i^{sm} \bar{A}_s$$

bestimmt. Es gilt:

$$\dim \tau_M \leqq 2m - 1\,.$$

Im allgemeinen Fall fällt der Raum τ_M mit P_{2m-1} zusammen. In dem anderen Falle ist M *der Brennpunkt der Erzeugenden* P_{m-1} der Mannigfaltigkeit V. Es gilt dann:

$$\text{(4)} \qquad \left| x^i a_i^{s1}, x^i a_i^{s2}, \ldots, x^i a_i^{sm} \right| = 0\,.$$

(Die Zeilen der Determinante auf der linken Seite sind mit den Werten $s = 1, 2, \ldots, m$ bestimmt.)

Wenn wir die Gesamtheit von m festen Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ und $x_1, x_2, \ldots \ldots, x_m$ als Veränderlichen betrachten, dann bilden die Brennpunkte des zugeordneten Raumes P_{m-1} die Punktmannigfaltigkeit V_{m-1}^m. Diese Mannigfaltigkeit ist algebraisch m-ter Ordnung. Wenn wir alle diese Mannigfaltigkeiten für $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \subset \Delta$ untersuchen, dann bilden sie die Mannigfaltigkeit V_b.

Ähnliche Beziehungen gelten auch für die Mannigfaltigkeit $\bar{V}$. Die zugeordneten Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir wie im vorangehenden Falle, man muß aber noch das Zeichnen — zufügen.

b) Im Raume P_{2m-1} betrachten wir $2m$ Punktmannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \ldots \ldots, (A_m), (\bar{A}_1), (\bar{A}_2), \ldots, (\bar{A}_m)$, die von den Hauptparametern $u_1, u_2, \ldots, u_m$ abhängig sind. Wir werden voraussetzen, daß für jede m Zahlen $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \subset \Delta$ die sich zugeordneten Punkte dieser Mannigfaltigkeiten linear unabhängig sind. Die Scheitel des beweglichen Koordinatensystems wählen wir in den sich entsprechenden Punkten dieser Mannigfaltigkeiten. Wir wählen die gleiche Bezeichnung wie im Abschnitt a). Ebenso gelten die Gleichungen (1), (2). Wir haben dann folgende Hauptformen: $\tilde{\omega}_i^s, \tilde{\overline{\omega}}_i^s$, für $i, s = 1, 2, \ldots, m$; $\omega_i^s, \overline{\omega}_i^s$ für solche Werte von $i, s = 1, 2, \ldots, m$, für welche $i \neq s$ gilt.

Die durch die einander entsprechenden Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_m$ bestimmten Räume bezeichnen wir mit P_{m-1}, ähnlich kann man die Räume $\overline{P}_{m-1}$ definieren. Wie im Abschnitt a) kann man die Mannigfaltigkeiten V, $\overline{V}$ bestimmen. Wir werden voraussetzen, daß für alle Gesamtheiten von m Zahlen von $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \subset \varDelta$ die Dimension der Berührräume der Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \ldots, (A_m), (\overline{A}_1), (\overline{A}_2), \ldots$ $\ldots, (\overline{A}_m)$ gleich m ist. Weiter soll $(A_1), (A_2), \ldots, (A_m) \subset V_b$, $(\overline{A}_1), (\overline{A}_2), \ldots, (\overline{A}_m) \subset \overline{V}_b$ gelten.

Für einen beliebigen Wert von $i = 1, 2, \ldots, m$ ist der Berührraum der Mannigfaltigkeit V im Punkte A_i durch die Punkte

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, \tilde{\omega}_i^s \overline{A}_s$$

bestimmt; nach (4) sind die Formen

$$\tilde{\omega}_i^1, \tilde{\omega}_i^2, \ldots, \tilde{\omega}_i^m \tag{5}$$

linear abhängig. Im folgenden werden wir voraussetzen, daß für alle Werte von $i =$ $= 1, 2, \ldots, m$ und für alle Gesamtheiten von $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \subset \varDelta$ die Berührräume τ_{A_i} die Dimension $(2m - 2)$ haben. Man kann für jeden Wert von i gerade $(m - 1)$ unabhängige Formen

$$\gamma_i^1, \gamma_i^2, \ldots, \gamma_i^{m-1}$$

so wählen, daß die Formen (5) ihre linearen Kombinationen sind.

Der Berührraum der Mannigfaltigkeit $(A_i) \subset V_b$ im Punkte A_i schneidet den zugehörigen Raum P_{m-1} in der Geraden t_i. Diese Gerade nennt man die *Torsalgerade der Mannigfaltigkeit* (A_i) *im Punkte* A_i. Für die Torsalrichtungen haben wir folgende Gleichungen:

$$\gamma_i^1 = 0, \gamma_i^2 = 0, \ldots, \gamma_i^{m-1} = 0\,. \tag{6}$$

Betrachten wir den zum Punkte A_i gehörigen Berührraum der Mannigfaltigkeit (A_i). Jede im System (6) angeführte Gleichung bestimmt in diesem Raum den Unterraum von der Dimension $(m - 1)$. Dieser Unterraum enthält die Gerade t_i. Der beliebige durch die Gerade t_i gehende Berührunterraum von der Dimension $(m - 1)$ kann durch die lineare Kombination der Gleichungen (6) bestimmt werden. Diese Berührunterräume bezeichnen wir als *Torsalunterräume der Mannigfaltigkeit* (A_i) im Punkte A_i.

Auf jeder der Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \ldots, (A_m)$ ist durch jede Angabe von m Werten $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus $\varDelta$ immer ein Punkt gegeben. Dadurch entsteht die Korrespondenz B der Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \ldots, (A_m)$. Ω sei die Pfaffsche Form in den Differentialen $du_1, du_2, \ldots, du_m$. Betrachten wir die Gesamtheit von m festen Werten $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \subset \Delta$ und die Relation

$$\Omega = 0 \,. \tag{7}$$

Dadurch ist in jedem der sich zugeordneten Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ein $(m - 1)$-dimensionaler Berührunterraum der Mannigfaltigkeit (A_1), bzw. $(A_2), \ldots$, bzw. (A_m) gegeben. Wenn i irgend ein Wert von $1, 2, \ldots, m$ ist und durch (7) im Punkte A_i der Torsalunterraum bestimmt ist und wenn diese Beziehung für alle Werte von $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_m$ aus dem Gebiet Δ gilt, dann folgt nach (6):

$$\Omega = q_i^1 \gamma_i^1 + q_i^2 \gamma_i^2 + \ldots + q_i^{m-1} \gamma_i^{m-1} \,. \tag{8}$$

$q_i^1, q_i^2, \ldots, q_i^{m-1}$ sind die Funktionen, die allgemein von den Hauptparametern und von den sekundären Parametern abhängen.

Die Korrespondenz B nennt man für die gegebenen Werte $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ *singulär*, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: 1. Durch die einzige Gleichung (7) sind in allen zugeordneten Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_m$ die Torsalunterräume gegeben. 2. Es existieren zwei unabhängige Gleichungen (7) und die Zahl i (aus der Gesamtheit $1, 2, \ldots, m$) so, daß durch jede dieser Gleichungen in den zugehörigen Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_m$ die Torsalunterräume gegeben sind.

Wir werden jetzt die vorangehenden Ergebnisse für den Fall $m = 2$ benützen. In diesem Falle sind $(A_1), (A_2)$ die Brennflächen der Geradenkongruenz V. Die Geraden t_{A_1}, t_{A_2} fallen mit der zugehörigen Erzeugenden der Kongruenz V zusammen. Wenn B singulär ist, dann sind alle Formen $\tilde{\omega}_i^s$, $i, s = 1, 2$, die Kombinationen der einzigen Form. Diese Form bezeichnen wir mit ω.

Für die Kleinschen Bilder der Erzeugenden (A_1, A_2) der Mannigfaltigkeit V gilt dann:

$$d(A_1, A_2) = (\omega_1^1 + \omega_2^2)(A_1, A_2) + \omega \Gamma \,; \tag{9}$$

Γ ist die Kombination der K-Punkte $(A_1, \bar{A}_1), (A_1, \bar{A}_2), (A_2, \bar{A}_1), (A_2, \bar{A}_2)$. Nach (9) ist das Kleinsche Bild der Mannigfaltigkeit V im allgemeinen eine Kurve, die Kongruenz zerfällt in eine Regelfläche.

c) Im folgenden werden wir wieder $m \geqq 2$ voraussetzen. Die Mannigfaltigkeiten $(\bar{A}_1), (\bar{A}_2), \ldots, (\bar{A}_m), \bar{V}$ sollen dieselbe Voraussetzungen wie $(A_1), (A_2), \ldots, (A_m), V$ erfüllen. Für die Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ kann man die gleichen Betrachtungen wie für V durchführen. Die zugeordneten Bezeichnungen muß man aber noch mit $-$ ergänzen.

Satz 1. *Wenn keine der Korrespondenzen $B, \bar{B}$ für keine Werte $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ singulär ist, dann kann man die infinitesimale Bewegung des Bezugssystems* *durch die Gleichungen*

$$\text{(10a)} \qquad \mathrm{d}A_i = \omega_i^s A_s + \varphi_i^{sr}\omega^i \bar{A}_s\,,$$

$$\text{(10b)} \qquad \mathrm{d}\bar{A}_i = \psi_i^{sr}\bar{\omega}_r A_s + \bar{\omega}_i^s \bar{A}_s\,,$$

$$i, s = 1, 2, \dots, m\,, \quad r = 1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, m\,,$$

ausdrücken. $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ *sind die linear unabhängigen Pfaffschen Hauptformen. Dasselbe gilt für die Formen* $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_m$; $\varphi_i^{sr}, \psi_i^{sr}$ *sind die Funktionen der Hauptparameter und im allgemeinen auch der sekundären Parameter.*

Die Behauptung beweisen wir für die Verhältnisse (10a), für (10b) ist der Beweis analogisch. Zuerst werden wir $m > 2$ voraussetzen. Wir suchen die Hauptformen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ so, daß für jeden Wert von $i = 1, 2, \dots, m$ das folgende System der Gleichungen gilt:

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned}
\omega_1 &= p_i^{11}\gamma_i^1 + p_i^{21}\gamma_i^2 + \dots + p_i^{(m-1)1}\gamma_i^{(m-1)}\,,\\
\omega_2 &= p_i^{12}\gamma_i^1 + p_i^{22}\gamma_i^2 + \dots + p_i^{(m-1)2}\gamma_i^{(m-1)}\,,\\
&\vdots\\
\omega_{i-1} &= p_i^{1(i-1)}\gamma_i^1 + p_i^{2(i-1)}\gamma_i^2 + \dots + p_i^{(m-1)(i-1)}\gamma_i^{(m-1)}\,,\\
\omega_{i+1} &= p_i^{1(i+1)}\gamma_i^1 + p_i^{2(i+1)}\gamma_i^2 + \dots + p_i^{(m-1)(i+1)}\gamma_i^{(m-1)}\,,\\
&\vdots\\
\omega_m &= p_i^{1m}\gamma_i^1 + p_i^{2m}\gamma_i^2 + \dots + p_i^{(m-1)m}\gamma_i^{(m-1)}\,.
\end{aligned}$$

Das zum bestimmten Wert von i angehörige System (11) bezeichnen wir mit R_i, alle Systeme R_i bilden das System R. Die Form ω_1 befindet sich in den $(m-1)$ Gleichungen des Systemes R $(i \neq 1)$.

Betrachten wir nun den $(m-1)$ dimensionalen linearen Raum H_{m-1} und in diesem Raum das Bezugssystem von m festen unabhängigen Eckpunkten $E_1, E_2, \dots, E_m$. A sei die Abbildung: $\mathrm{d}u_1 \to E_1$, $\mathrm{d}u_2 \to E_2, \dots, \mathrm{d}u_m \to E_m$. Setzen wir voraus, daß jeder der Hauptparameter und der sekundären Parameter einen bestimmten Wert einnimmt. Bei dem festen Wert von i $(i \neq 1)$ bilden dann die linearen Kombinationen der Bilder von Formen $\gamma_i^1, \gamma_i^2, \dots, \gamma_i^{m-1}$ den linearen $(m-2)$ dimensionalen Raum H_{m-2}. Unter Voraussetzung von allen Werten von $i \neq 1$ haben die zugeordneten Räume H_{m-2} im Allgemeinen einen Punkt gemein. Zu diesem Punkt gehört dann eine Hauptform (mit konstanten Koeffizienten). Wenn wir aber bei einer Wahl der Parameter die zugehörigen Räume mindestens eine gemeinsame Gerade haben, dann existieren zwei unabhängige Hauptformen, die in den zugehörigen Punkten $A_2, A_3, \dots$ $\dots, A_m$ die Torsalunterräume bestimmen. Diesen Fall müssen wir nach der Voraussetzung des Satzes ausschliessen. Aus folgenden Gleichungen (sie gelten für alle Werte von $\mathrm{d}u_1, \mathrm{d}u_2, \dots, \mathrm{d}u_m$):

$$\text{(12)} \qquad p_2^{11}\gamma_2^1 + p_2^{21}\gamma_2^2 + \dots + p_2^{(m-1)1}\gamma_2^{(m-1)} = p_3^{11}\gamma_3^1 + p_3^{21}\gamma_3^2 + \dots$$
$$\dots + p_3^{(m-1)1}\gamma_3^{(m-1)} = \dots = p_m^{11}\gamma_m^1 + p_m^{21}\gamma_m^2 + \dots + p_m^{(m-1)1}\gamma_m^{(m-1)}\,,$$

kann man die Koeffizienten $p_i^{11}, \ldots, p_i^{(m-1)1}$, $i = 2, 3, \ldots, m$, bis auf die Umnormung berechnen. Daraus bekommt man die Form ω_1. Ähnlich kann man die Formen $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_m$ finden.

Zwei verschiedene Fälle sind dann möglich: a) für jeden Wert von $i = 1, 2, \ldots, m$ bekommt man im Gebiet Δ die $(m - 1)$ unabhängigen Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ $\ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_m$, b) das vorangehende Verhältnis gilt nicht. Wir werden jetzt die beiden Fälle behandeln.

a) Für den festen Wert von i betrachten wir das zugeordnete System R_i, wo die Koeffizienten schon berechnet sind. Aus diesem System kann man $\gamma_i^1, \gamma_i^2, \ldots, \gamma_i^{(m-1)}$ als lineare Kombinationen der Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_m$ berechnen. Daraus bekommen wir die Formen $\tilde{\omega}_i^1, \tilde{\omega}_i^2, \ldots, \tilde{\omega}_i^m$. Wenn wir die zugeordneten Koeffizienten mit φ_i^{sr}; $i, s = 1, 2, \ldots, m$; $r = 1, 2, \ldots, (i - 1), (i + 1), \ldots, m$; bezeichnen und wenn wir alle Werte von i betrachten, dann bekommen wir die Gleichungen (10a). Es sind noch zwei Fälle möglich. Entweder sind die Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ $\ldots, \omega_m$ linear unabhängig, oder gilt das vorangehende Verhältnis nicht. Im ersten Falle ist der Satz erfüllt. Betrachten wir den zweiten Fall. Nach der Voraussetzung sind die Torsalunterräume durch die lineare Kombination der Gleichungen

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \ldots,\ \omega_{i-1} = 0,\ \omega_{i+1} = 0,\ \ldots,\ \omega_m = 0$$

gegeben, das gilt für jeden Wert von $i = 1, 2, \ldots, m$. Es sollen jetzt solche Werte der Parameter existieren, daß für diese Werte die Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ linear abhängig sind. Dann existiert ein fester Wert von i $(i = h)$ so, daß für diese Werte der Parameter

$$\omega_h = \varkappa^1 \omega_1 + \varkappa^2 \omega_2 + \ldots + \varkappa^{h-1} \omega_{h-1} + \varkappa^{h+1} \omega_{h+1} + \ldots + \varkappa^m \omega_m \tag{13}$$

gilt. Für alle Mannigfaltigkeiten (A_i), $i \neq h$, bestimmt die Gleichung $\omega_h = 0$ den Torsalunterraum in dem zugehörigen Punkt A_i. Im Punkte A_h sind die Torsalunterräume durch die lineare Kombination der Gleichungen

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \ldots,\ \omega_{h-1} = 0,\ \omega_{h+1} = 0, \ldots, \omega_m = 0$$

gegeben. Nach (13) ist aber die Gleichung $\omega_h = 0$ die lineare Kombination dieser Gleichungen. Durch die Gleichung $\omega_h = 0$ ist auch im Punkte A_h der Torsalunterraum gegeben. Nach den Voraussetzungen des Satzes 1 haben wir diesen Fall ausgeschlossen. Umgekehrt unter der Voraussetzung, daß für die bestimmten Werte von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus dem Gebiet Δ die Korrespondenz B singulär nach 1 ist und a) gilt, folgt die lineare Abhängigkeit der Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$.

b) Es existiert ein fester Wert von i $(i = n)$, daß für einige feste Werte von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ die Formen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_{n+1}, \ldots, \omega_m \tag{14}$$

linear abhängig sind. Dann existiert ein solcher Wert von i $(i = b,\ i \neq n)$, daß die Form ω_b die lineare Kombination der übrigen Formen (14) ist. Es ist auch möglich, daß die Formen bis auf eine Umnormung mit der Form ω_b zusammenfallen. Durch die Gleichung $\omega_b = 0$ ist in allen zugeordneten Punkten A_i $(i \neq b)$ der Torsalunterraum gegeben. Im Punkte A_b sind die Torsalunterräume durch die lineare Kombination der Gleichungen

$$(15) \qquad \omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \ldots,\ \omega_{b-1} = 0,\ \omega_{b+1} = 0,\ \ldots,\ \omega_m = 0$$

gegeben. Im allgemeinen ist die Form ω_b die lineare Kombination der Formen in den Gleichungen (15) (Offenbar mit Ausnahme der Form ω_n). Es ist auch möglich daß die Form ω_b bis auf eine Umnormung mit irgendeiner der Formen der Gleichungen (15) zusammenfällt. Die mit b) bezeichneten Fälle sind nach den Voraussetzungen der Gleichung 1 ausgeschlosen.

Setzen wir nun den Fall $m = 2$ voraus. Wenn B, $\bar{B}$ nicht singulär sind, dann folgt leicht:

$$(16) \qquad \begin{aligned} dA_1 &= \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \varphi_1^{12}\omega_2 \bar{A}_1 + \varphi_1^{22}\omega_2 \bar{A}_2\,,\\ dA_2 &= \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \varphi_2^{11}\omega_1 \bar{A}_1 + \varphi_2^{21}\omega_1 \bar{A}_2\,,\\ d\bar{A}_1 &= \psi_1^{12}\bar{\omega}_2 A_1 + \psi_1^{22}\bar{\omega}_2 A_2 + \bar{\omega}_1^1 \bar{A}_1 + \bar{\omega}_1^2 \bar{A}_2\,,\\ d\bar{A}_2 &= \psi_2^{11}\bar{\omega}_1 A_1 + \psi_2^{21}\bar{\omega}_1 A_2 + \bar{\omega}_2^1 \bar{A}_1 + \bar{\omega}_2^2 \bar{A}_2\,. \end{aligned}$$

d) Im folgenden werden wir wieder $m \geqq 2$ voraussetzen. Die Gleichungen der infinitesimalen Verrückung des Koordinatensystems sollen die Form (10a), (10b) haben. Wir schliessen alle im Satze 1 eingeführten singulären Fälle aus. i soll jetzt einen bestimmten Wert von $1, 2, \ldots, m$ annehmen. Durch die Gleichungen

$$(17) \qquad \omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \ldots,\ \omega_{i-1} = 0,\ \omega_{i+1} = 0,\ \ldots,\ \omega_m = 0$$

ist auf der Mannigfaltigkeit V die Schichte der einparametrigen Systeme der Räume P_{m-1} gegeben. In jedem von diesen Systemen sind die Punkte A_i (i ist fest) singulär in dem Sinne, daß der Berührraum dieses Systemes im Punkte A_i mit der entsprechenden Erzeugenden P_{m-1} zusammenfällt. Die angeführten Systeme bezeichnen wir als die zum Werte i gehörigen *Torsalsysteme der Erzeugenden* P_{m-1}. Ähnlich sind durch die Relationen

$$(18) \qquad \bar{\omega}_1 = 0,\ \bar{\omega}_2 = 0,\ \ldots,\ \bar{\omega}_{i-1} = 0,\ \bar{\omega}_{i+1} = 0,\ \ldots,\ \bar{\omega}_m = 0$$

auf der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ die zum Werte i gehörigen Schichten der *Torsalsysteme der Erzeugenden* $\bar{P}_{m-1}$ gegeben.

Für den festen Wert von i sind durch (17) auf der Mannigfaltigkeit V die Torsalsysteme gegeben; mit denselben Gleichungen sind im Allgemeinen auf der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ die nicht torsalen Systeme gegeben. Wenn aber für jeden Wert von i

($i = 1, 2, \ldots, m$) dem Torsalsystem wieder ein Torsalsystem entspricht, dann bezeichnen wir die Korrespondenz $C : V \to \bar{V}$ als *torsal*. Bei jedem Wert von $i = 2, 3, \ldots, m$ ist dann $\bar{\omega}_1$ die lineare Kombination der Formen ω_1, ω_h, $h = 2, 3, \ldots, m$, $h \neq i$. Die Formen $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_m$ sind aber linear unabhängig. Daraus folgt, daß $\bar{\omega}_1$ nur von der Form ω_1 abhängig ist. Ähnliche Sätze gelten auch für die Formen $\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \ldots$ $\ldots, \bar{\omega}_m$. Nach dem Beweis des Satzes 1 folgt, daß man die Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ $\ldots, \omega_m, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_m$ bis auf die Umnormung bestimmen kann. Es kann also

$$\bar{\omega}_i = \omega_i \tag{19}$$

für $i = 1, 2, \ldots, m$ gelten. Wir werden das im Folgenden voraussetzen.

Satz 2. *Wenn die Mannigfaltigkeiten* $(A_1), (A_2), \ldots, (A_m), (\bar{A}_1), (\bar{A}_2), \ldots, (\bar{A}_m)$ *die Voraussetzungen der Abschnitte b), c) erfüllen und wenn die Korrespondenz* $C : V \to \bar{V}$ *torsal ist, dann kann man die infinitesimale Bewegung des Bezugsystems durch die Gleichungen*

$$\mathrm{d}A_i = \omega_i^s A_s + \varphi_i^{sr} \omega_r \bar{A}_s\,, \quad \mathrm{d}\bar{A}_i = \psi_i^{sr} \omega_r A_s + \bar{\omega}_i^s \bar{A}_s\,; \tag{20}$$
$$i, s = 1, 2, \ldots, m\,, \quad r = 1, 2, \ldots, (i-1), (i+1), \ldots, m$$

ausdrücken. Es gilt noch

$$\omega_i^s = \lambda_i^{s\varrho} \omega_\varrho,\ \bar{\omega}_i^s = \bar{\lambda}_i^{s\varrho} \omega_\varrho \quad \text{für} \quad \varrho = 1, 2, \ldots, m; \quad i, s = 1, 2, \ldots, m, \quad i \neq s\,. \tag{20a}$$

$\lambda_i^{s\varrho}, \bar{\lambda}_i^{s\varrho}$ *sind allgemein von den Hauptparametern und von den sekundären Parametern abhängige Funktionen.*

Die Behauptung folgt aus den Gleichungen (10a), (10b), (19). $\omega_i^s, \bar{\omega}_i^s$ sind für $i \neq s$ die Hauptformen, das ist durch die Gleichungen (20a) ausgedrückt.

e) Im Folgenden werden wir voraussetzen, daß das Koordinatensystem der Form (20), (20a) ist. Betrachten wir die zweiparametrigen Geradenmannigfaltigkeiten $V_{12} \subset V$, die bei der Gültigkeit der Gleichungen

$$\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_m = 0 \tag{21}$$

durch die Geraden (A_1, A_2) gebildet sind. Diese Mannigfaltigkeiten sind im Allgemeinen anholonom. Betrachten wir eine Gerade (A_1, A_2). Der Berührraum der Mannigfaltigkeit V_{12} längs der Geraden (A_1, A_2) ist nach den Gleichungen (20), (20a) durch die Punkte

$$A_1,\ A_2,\ \lambda_1^{c1} A_c,\ \lambda_1^{c2} A_c + \varphi_1^{s2} \bar{A}_s,\ \lambda_2^{e1} A_e + \varphi_2^{s1} \bar{A}_s,\ \lambda_2^{e2} A_e\,, \tag{22}$$

$c = 2, 3, \ldots, m$, $e = 1, 3, 4, \ldots, m$, bestimmt. Diesen Berührraum bezeichnen wir mit τ^{12}. Die Erzeugende der Mannigfaltigkeit V, in welcher (A_1, A_2) liegt, bezeichnen wir wieder mit P_{m-1}. Betrachten wir jetzt den linearen Raum $P_{m-1} \cup \tau^{12}$. Nach (22) ist allgemein die Dimension dieses Raumes gleich $(m + 1)$. Eine niedrigere Dimension kommt nur in dem Falle vor, daß die Punkte

$$\varphi_1^{s2}\bar{A}_s,\ \varphi_2^{s1}\bar{A}_s$$

abhängig sind. Dann ist aber jeder Punkt der Geraden (A_1, A_2) der Brennpunkt der Mannigfaltigkeit V. Im Folgenden werden wir voraussetzen, daß für keine Werte von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ die Gerade (A_1, A_2) zur Mannigfaltigkeit V_{m-1}^m gehört. Den Raum $P_{m-1} \cup \tau^{12}$ bezeichnen wir dann mit P_{m+1}. In diesem Raum kann man das Koordinatensystem mit den Eckpunkten

$$\tilde{A}_1 = A_1,\ \tilde{A}_2 = A_2, \ldots, \tilde{A}_m = A_m,\ \tilde{A}_{m+1} = \lambda_1^{c2}A_c + \varphi_1^{s2}\bar{A}_s\,, \tag{23}$$
$$\tilde{A}_{m+2} = \lambda_2^{e1}A_e + \varphi_2^{s1}\bar{A}_s$$

wählen. Mit δ bezeichnen wir die Differentialrichtungen, für die

$$\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_m = 0$$

gilt. Weiter werden wir folgende Bezeichnung benützen:

$$\omega_1^1(\delta) = \pi_1^1,\ \omega_2^2(\delta) = \pi_2^2, \ldots, \omega_m^m(\delta) = \pi_m^m,\ \bar{\omega}_1^1(\delta) = \bar{\pi}_1^1,\ \bar{\omega}_2^2(\delta) = \bar{\pi}_2^2, \ldots, \bar{\omega}_m^m(\delta) = \bar{\pi}_m^m\,.$$

Daraus folgt:

$$\delta\tilde{A}_1 = \pi_1^1\tilde{A}_1 + \omega_1\lambda_1^{c1}\tilde{A}_c + \omega_2\tilde{A}_{m+1}\,,\quad \delta\tilde{A}_2 = \pi_2^2\tilde{A}_2 + \omega_2\lambda_2^{e2}\tilde{A}_e + \omega_1\tilde{A}_{m+2}\,. \tag{24}$$

Betrachten wir durch $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ gehende Geradenmannigfaltigkeit $\bar{V}_{12} \subset \bar{V}$ bei der Gültigkeit der Relation (21). Der Berührraum $\bar{\tau}^{12}$ der Mannigfaltigkeit $\bar{V}_{12}$ längs der Geraden $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ ist durch die Punkte

$$\bar{A}_1,\ \bar{A}_2,\ \bar{\lambda}_1^{c1}\bar{A}_c,\ \bar{\lambda}_1^{c2}\bar{A}_c + \psi_1^{s2}A_s,\ \bar{\lambda}_2^{e1}\bar{A}_e + \psi_2^{s1}A_s,\ \bar{\lambda}_2^{e2}\bar{A}_e \tag{25}$$

bestimmt. Wir werden wieder voraussetzen, daß keine der Geraden $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ für $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \subset \Delta$ zur Mannigfaltigkeit $\bar{V}_{m-1}^m$ gehört. Längs der Geraden $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ betrachten wir den Raum $\bar{P}_{m+1} = \bar{P}_{m-1} \cup \bar{\tau}^{12}$. Im Raume $\bar{P}_{m+1}$ untersuchen wir das Koordinatensystem mit den Eckpunkten

$$\hat{A}_1 = \bar{A}_1,\ \hat{A}_2 = \bar{A}_2, \ldots, \hat{A}_m = \bar{A}_m,\ \hat{A}_{m+1} = \psi_1^{s2}A_s + \bar{\lambda}_1^{c2}\bar{A}_c\,, \tag{26}$$
$$\hat{A}_{m+2} = \psi_2^{s1}A_s + \bar{\lambda}_2^{e1}\bar{A}_e\,.$$

Daraus folgt dann:

$$\delta\hat{A}_1 = \bar{\pi}_1^1\hat{A}_1 + \omega_1\bar{\lambda}_1^{c1}\hat{A}_c + \omega_2\hat{A}_{m+1}\,,\quad \delta\hat{A}_2 = \bar{\pi}_2^2\hat{A}_2 + \omega_2\bar{\lambda}_2^{e2}\hat{A}_e + \omega_1\hat{A}_{m+2}\,. \tag{27}$$

Betrachten wir die Korrespondenz $C_{12} : (A_1, A_2) \to (\bar{A}_1, \bar{A}_2)$. Die sich entsprechenden Geraden sollen zu den gleichen Werten der Parameter $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \subset \Delta$

gehören. Zu jedem Paar der Geraden knüpfen wir die Kollineation

$$\pi : (A_1, A_2) \to (\bar{A}_1, \bar{A}_2)$$

zu, die durch die Gleichungen

$$\pi A_1 = \varrho_1 \bar{A}_1 , \quad \pi A_2 = \varrho_2 \bar{A}_2 , \quad \varrho_1 \varrho_2 \neq 0 \tag{28}$$

gegeben ist. Alle Kollineationen π bilden die Korrespondenz C^b. Für alle Werte von Parametern $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ betrachten wir die Kollineation

$$K : P_{m+1} \to \bar{P}_{m+1}$$

durch folgende Relationen:

$$\begin{gathered} K\tilde{A}_s = \varrho_s \tilde{A}_s , \quad K\tilde{A}_{m+1} = c_1^k \hat{A}_k + c_1^{m+1} \hat{A}_{m+1} + c_1^{m+2} \hat{A}_{m+2} , \\ K\tilde{A}_{m+2} = c_2^k \hat{A}_k + c_2^{m+1} \hat{A}_{m+1} + c_2^{m+2} \hat{A}_{m+2} . \end{gathered} \tag{29}$$

Auf der Mannigfaltigkeit V untersuchen wir die Kurve

$$M = x_1 A_1 + x_2 A_2 .$$

Die Korrespondenz C_{12} bezeichnen wir als *Punkthalbdeformation*, wenn für alle Werte von x_1, x_2, für alle Richtungen δ und für alle Werte von Parametern $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_m$ aus Δ die folgende Relation gilt:

$$K\, \delta M = \delta(C^b M) + \Theta C^b M \quad (\operatorname{mod} \bar{A}_3, \bar{A}_4, \ldots, \bar{A}_m) . \tag{30}$$

Θ ist die Pfaffsche Form.

Für jede m Werte $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ gehört zur Geraden (A_1, A_2) der durch $(A_3, A_4, \ldots, A_m)$ bestimmte Raum. Diesen Raum bezeichnen wir als den zu (A_1, A_2) gehörenden Ergänzungsraum. Im Falle $m = 2$ ist der Ergänzungsraum leer. Auf ähnliche Weise kann man den zur Geraden $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ gehörenden Ergänzungsraum bestimmen. Die Dimension des Berühraumes der Mannigfaltigkeit V im Punkte A_1 ist gleich $(2m - 2)$. Es existiert eine feste Zahl α aus der Gesamtheit $1, 2, \ldots, m$, so daß der erwähnte Raum nicht durch den entsprechenden Punkt $\bar{A}_\alpha$ geht. Wenn dieses Verhältnis für alle Werte $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ gilt, dann bezeichnen wir Δ mit Δ_1.

Satz 3. *Die Geraden (A_1, A_2) sollen für keine Werte von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ_1 zu V_{m-1}^m gehören. Die Torsalgeraden der Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2)$ in den entsprechenden Punkten sollen mit dem zu (A_1, A_2) gehörenden Ergänzungsraum keinen Punkt gemein haben. Dasselbe soll für $(\bar{A}_1), (\bar{A}_2), (\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ gelten. (In der Bezeichnung muß man nur – zufügen.) Dann ist C nur in dem Falle die Punkthalbdeformation, wenn*

$$\lambda_1^{21} \lambda_2^{12} = \bar{\lambda}_1^{21} \bar{\lambda}_2^{12} \tag{31}$$

gilt.

Beweis. Nach den angeführten Voraussetzungen und nach den Gleichungen (20), (20a) gilt

$$\lambda_1^{21} \neq 0\,, \quad \lambda_2^{12} \neq 0\,, \quad \bar{\lambda}_1^{21} \neq 0\,, \quad \bar{\lambda}_2^{12} \neq 0\,. \tag{32}$$

Wir bekommen dann leicht:

$$\begin{aligned} \delta M = {} & \delta x_1 \tilde{A}_1 + \delta x_2 \tilde{A}_2 + x_1[\pi_1^1 \tilde{A}_1 + \omega_1 \lambda_1^{c1} \tilde{A}_c + \omega_2 \tilde{A}_{m+1}] + \\ & + x_2[\pi_2^2 \tilde{A}_2 + \omega_2 \lambda_2^{e2} \tilde{A}_e + \omega_1 \tilde{A}_{m+2}]\,; \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} K\delta M = {} & \hat{A}_1[\varrho_1 \delta x_1 + x_1(\pi_1^1 \varrho_1 + \omega_2 c_1^1) + x_2(\omega_2 \lambda_2^{12} \varrho_1 + \omega_1 c_2^1)] + \\ & + \hat{A}_2[\varrho_2 \delta x_2 + x_1(\omega_1 \lambda_1^{21} \varrho_2 + \omega_2 c_1^2) + x_2(\pi_2^2 \varrho_2 + \omega_1 c_2^2)] + \\ & + \hat{A}_s[x_1(\omega_1 \lambda_1^{s1} \varrho_s + \omega_2 c_1^s) + x_2(\omega_2 \lambda_2^{s2} \varrho_s + \omega_1 c_2^s)] + \\ & + \hat{A}_{m+1}[x_1 \omega_2 c_1^{m+1} + x_2 \omega_1 c_2^{m+1}] + \hat{A}_{m+2}[x_1 \omega_2 c_1^{m+2} + x_2 \omega_1 c_2^{m+2}] \\ & s = 3, 4, \ldots, m \ (s \neq 1, 2)\,; \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \delta C^b M + \Theta C^b M = {} & \hat{A}_1[\varrho_1 \delta x_1 + x_1 \delta \varrho_1 + x_1 \varrho_1 \bar{\pi}_1^1 + x_2 \varrho_2 \omega_2 \bar{\lambda}_2^{12} + \Theta x_1 \varrho_1] + \\ & + \hat{A}_2[\varrho_2 \delta x_2 + x_2 \delta \varrho_2 + x_1 \omega_1 \bar{\lambda}_1^{21} \varrho_1 + x_2 \varrho_2 \bar{\pi}_2^2 + \Theta x_2 \varrho_2] + \\ & + \hat{A}_s[x_1 \omega_1 \bar{\lambda}_1^{s1} \varrho_1 + x_2 \omega_2 \bar{\lambda}_2^{s2} \varrho_2] + \hat{A}_{m+1}[x_1 \omega_2 \varrho_1] + \hat{A}_{m+2}[x_2 \varrho_2 \omega_1]\,, \\ & s = 3, 4, \ldots, m\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Nach der Definition der Punkthalbdeformation müssen die Koeffizienten bei $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_{m+1}, \hat{A}_{m+2}$ in der rechten Seiten der Relationen (34),(35) identisch für alle $x_1, x_2, \omega_1, \omega_2$ gleich sein. Wir bekommen folgende Bedingungen:

$$c_2^1 = 0\,, \quad \lambda_2^{12} \varrho_1 = \bar{\lambda}_2^{12} \varrho_2\,, \tag{36a}$$

$$\delta \varrho_1 + \varrho_1(\bar{\pi}_1^1 - \pi_1^1) - \omega_2 c_1^1 = -\Theta \varrho_1\,, \tag{36b}$$

$$c_1^2 = 0\,, \quad \bar{\lambda}_1^{21} \varrho_1 = \lambda_1^{21} \varrho_2\,, \tag{36c}$$

$$\delta \varrho_2 + \varrho_2(\bar{\pi}_2^2 - \pi_2^2) - \omega_1 c_2^2 = -\Theta \varrho_2\,, \tag{36d}$$

$$c_1^{m+1} = \varrho_1\,, \quad c_2^{m+1} = 0\,, \quad c_1^{m+2} = 0\,, \quad c_2^{m+2} = \varrho_2\,. \tag{36e}$$

Die Gleichungen (36a), (36b), (36c), (36d), (36e) geben uns die Bedingungen für die Koeffizienten $\varrho_1, \varrho_2, c_1^1, c_1^2, c_1^{m+1}, c_1^{m+2}, c_2^1, c_2^2, c_2^{m+1}, c_2^{m+2}$. Wir bekommen keine Bedingungen für c_1^s, c_2^s, ϱ_s, $s = 3, 4, \ldots, m$.

Untersuchen wir jetzt folgende Bedingungen: (Siehe (36a), (36c).)

$$\lambda_2^{12} \varrho_1 = \bar{\lambda}_2^{12} \varrho_2\,, \quad \bar{\lambda}_1^{21} \varrho_1 = \lambda_1^{21} \varrho_2\,.$$

Die nichttriviale Lösung dieser Gleichungen für die Unbekannten ϱ_1, ϱ_2 existiert nur dann, wenn (31) gilt. Aus den Gleichungen (36b), (36d) folgt dann:

$$(37)\qquad -\varrho_2\delta\varrho_1 + \varrho_1\delta\varrho_2 + \varrho_1\varrho_2(-\bar{\pi}_1^1 + \pi_1^1 + \bar{\pi}_2^2 - \pi_2^2) - \omega_1 c_2^2\varrho_1 + \omega_2 c_1^1\varrho_2 = 0\,.$$

Das ist die Gleichung für die Koeffizienten c_1^1, c_2^2, wir müssen noch bestimmen, ob es möglich ist, diese Größen aus dieser Gleichung zu berechnen.

Betrachten wir folgende Gleichungen:

$$(38)\qquad \omega_1^2 = \lambda_1^{21}\omega_1 + \lambda_1^{2c}\omega_c\,,\quad \bar{\omega}_1^2 = \bar{\lambda}_1^{21}\omega_1 + \bar{\lambda}_1^{2c}\omega_c\,,\quad c = 2, 3, \ldots, m\,.$$

Mit Benützung der Gleichungen (2) bekommen wir leicht:

$$(38a)\qquad \begin{aligned} \mathrm{D}\omega_1^2 &= \lambda_1^{21}[\omega_1^1 - \omega_2^2, \omega_1] + [((.)), \omega_2] + [((.)), \omega_3] + \ldots + [((.)), \omega_m]\,,\\ \mathrm{D}\bar{\omega}_1^2 &= \bar{\lambda}_1^{21}[\bar{\omega}_1^1 - \bar{\omega}_2^2, \omega_1] + [((.)), \omega_2] + [((.)), \omega_3] + \ldots + [((.)), \omega_m]\,. \end{aligned}$$

Mit $((.))$ bezeichnen wir die Pfaffschen Formen, die uns jetzt nicht interessieren. Aus den Gleichungen (38) folgt dann:

$$\bar{\lambda}_1^{21}\omega_1^2 = \lambda_1^{21}\bar{\omega}_1^2 + [[.]]\,\omega_2 + [[.]]\,\omega_3 + \ldots + [[.]]\,\omega_m\,.$$

Die mit $[[.]]$ bezeichneten Koeffizienten interessieren uns nicht. Durch die äußere Differentiation dieser Gleichung folgt mit Hilfe der Gleichungen (38a):

$$(39)\qquad \begin{aligned} &[\lambda_1^{21}\,\mathrm{d}\bar{\lambda}_1^{21} - \bar{\lambda}_1^{21}\,\mathrm{d}\lambda_1^{21} + \bar{\lambda}_1^{21}\lambda_1^{21}(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \bar{\omega}_1^1 + \bar{\omega}_2^2), \omega_1] +\\ &\quad + [((.)), \omega_2] + [((.)), \omega_3] + \ldots + [((.)), \omega_m] =\\ &\quad = [[.]]\,\mathrm{D}\omega_2 + [[.]]\,\mathrm{D}\omega_3 + \ldots + [[.]]\,\mathrm{D}\omega_m\,. \end{aligned}$$

Im Folgenden betrachten wir noch die Gleichungen

$$(40)\qquad \begin{gathered} \tilde{\omega}_i^s = \varphi_i^{sr}\omega_r\,,\quad \tilde{\bar{\omega}}_i^s = \psi_i^{sr}\omega_r\,;\\ i, s = 1, 2, \ldots, m\,,\quad r = 1, 2, \ldots, (i-1), (i+1), \ldots, m\,. \end{gathered}$$

Bei Benützung der Relationen (20), (2) bekommen wir durch die äußere Differentiation der Gleichungen (40) folgende Relationen:

$$(41a)\qquad [\varphi_k^{sr}\omega_i^k - \varphi_i^{kr}\bar{\omega}_k^s - \mathrm{d}\varphi_i^{sr}, \omega_r] = \varphi_i^{sr}\,\mathrm{D}\omega_r \qquad (i \neq r)\,,$$

$$(41b)\qquad [-\psi_i^{kr}\omega_k^s + \psi_k^{sr}\bar{\omega}_i^k - \mathrm{d}\psi_i^{sr}, \omega_r] = \psi_i^{sr}\,\mathrm{D}\omega_r \quad (i \neq r)\,.$$

Untersuchen wir jetzt die Mannigfaltigkeit (A_1). Nach der Voraussetzung ist die Dimension des Berührraumes der Mannigfaltigkeit V im Punkte A_1 gleich $(2m-2)$; in der Matrix

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^{12} & \varphi_1^{13} & \varphi_1^{14} & \ldots & \varphi_1^{1m}\\ \varphi_1^{22} & \varphi_1^{23} & \varphi_1^{24} & \ldots & \varphi_1^{2m}\\ \vdots & & & & \\ \varphi_1^{m2} & \varphi_1^{m3} & \varphi_1^{m4} & \ldots & \varphi_1^{mm} \end{pmatrix}$$

existiert mindestens eine Determinante von der Ordnung $(m - 1)$, die nicht gleich Null ist. Im Gebiet Δ_1 gilt für die folgende Determinante $\varkappa$:

$$
(42) \qquad \varkappa = \begin{vmatrix} \varphi_1^{12} & \varphi_1^{13} & \varphi_1^{14} & \dots & \varphi_1^{1m} \\ \varphi_1^{22} & \varphi_1^{23} & \varphi_1^{24} & \dots & \varphi_1^{2m} \\ \vdots & & & & \\ \varphi_1^{(\alpha-1)2} & \varphi_1^{(\alpha-1)3} & \varphi_1^{(\alpha-1)4} & \dots & \varphi_1^{(\alpha-1)m} \\ \varphi_1^{(\alpha+1)2} & \varphi_1^{(\alpha+1)3} & \varphi_1^{(\alpha+1)4} & \dots & \varphi_1^{(\alpha+1)m} \\ \vdots & & & & \\ \varphi_1^{m2} & \varphi_1^{m3} & \varphi_1^{m4} & \dots & \varphi_1^{mm} \end{vmatrix} \neq 0 .
$$

Ferner bezeichnen wir mit $(.)$ die Pfaffschen Formen, die die Kombinationen der Formen $\omega_1^1, \dots, \omega_m^m, \bar{\omega}_1^1, \dots, \bar{\omega}_m^m, \omega_1, \dots, \omega_m$ sind. Wir werden diese Bezeichnung benützen, soweit es nicht notwendig sein wird, diese Formen zu berechnen. Im Folgenden soll c alle Werte $1, 2, \dots, m$ mit Ausnahme von α annehmen. (c hat allgemein eine andere Bedeutung wie früher im Abschnitt e), die gleiche Bedeutung hat c nur im Falle $\alpha = 1$.) Nach der angeführten Bezeichnung bekommen wir nach (41a) für $i = 1$, $s = c$

$$
\begin{aligned}
[-\mathrm{d}\varphi_1^{c2} + (.), \omega_2] + [-\mathrm{d}\varphi_1^{c3} + (.), \omega_3] + \dots + [-\mathrm{d}\varphi_1^{cm} + (.), \omega_m] = \\
= \varphi_1^{c2}\, \mathrm{D}\omega_2 + \varphi_1^{c3}\, \mathrm{D}\omega_3 + \dots + \varphi_1^{cm}\, \mathrm{D}\omega_m .
\end{aligned}
$$

Wenn wir alle Werte von c betrachten, dann haben wir $(m - 1)$ Gleichungen für die Veränderlichen $\mathrm{D}\omega_2, \mathrm{D}\omega_3, \dots, \mathrm{D}\omega_m$. Nach (42) ist es möglich daraus die Veränderlichen zu berechnen. Wir bekommen

$$
\begin{aligned}
(43) \qquad \varkappa\, \mathrm{D}\omega_j = (-1)^j ([-\mathrm{d}\varphi_1^{c2} + (.), \omega_2] + \\
+ [-\mathrm{d}\varphi_1^{c3} + (.), \omega_3] + \dots + [-\mathrm{d}\varphi_1^{cm} + (.), \omega_m] , \\
\varphi_1^{c2}, \varphi_1^{c3}, \dots, \varphi_1^{c(j-1)}, \varphi_1^{c(j+1)}, \dots, \varphi_1^{cm}) .
\end{aligned}
$$

Der Ausdruck in den runden Klammern ist die Determinante, ihre Zeilen sind mit c $(c \neq \alpha)$ bezeichnet. Weiter gilt $j = 2, 3, \dots, m$.

Kehren wir nun zur Gleichung (39) zurück. Wenn wir in diese Gleichung nach (43) einsetzen, dann bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
(44) \qquad [\lambda_1^{21}\, \mathrm{d}\bar{\lambda}_1^{21} - \bar{\lambda}_1^{21}\, \mathrm{d}\lambda_1^{21} + \lambda_1^{21}\bar{\lambda}_1^{21}(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \bar{\omega}_1^1 + \bar{\omega}_2^2), \omega_1] + \\
+ [\{(.)\}, \omega_2] + [\{(.)\}, \omega_3] + \dots + [\{(.)\}, \omega_m] = 0 ,
\end{aligned}
$$

wo $\{(.)\}$ die bestimmten Pfaffschen Foımen sind. Nach dem Cartanschen Lemma ist

$$
\lambda_1^{21}\, \mathrm{d}\bar{\lambda}_1^{21} - \bar{\lambda}_1^{21}\, \mathrm{d}\lambda_1^{21} + \lambda_1^{21}\bar{\lambda}_1^{21}(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \bar{\omega}_1^1 + \bar{\omega}_2^2)
$$

die Hauptform. Bei der Gültigkeit der Ungleichungen (32) folgt aus der zweiten Gleichung (36c):

$$
\lambda_1^{21} = \mu\varrho_1 , \quad \bar{\lambda}_1^{21} = \mu\varrho_2 \quad (\mu \neq 0) .
$$

Wenn wir diese Relationen in die Gleichung (44) einsetzen, dann folgt, daß

$$\varrho_1 \, d\varrho_2 - \varrho_2 \, d\varrho_1 + \varrho_1\varrho_2(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \bar{\omega}_1^1 + \bar{\omega}_2^2)$$

die Hauptform ist. Bei der Gültigkeit von (21) bestimmen wir leicht:

$$\varrho_1\delta\varrho_2 - \varrho_2\delta\varrho_1 + \varrho_1\varrho_2(\pi_1^1 - \pi_2^2 - \bar{\pi}_1^1 + \bar{\pi}_2^2) = Q_1\omega_1 + Q_2\omega_2 \, .$$

Q_1, Q_2 sind die Funktionen der erwähnten Parameter. Nach der Gleichung (37) folgt dann:

$$Q_1\omega_1 + Q_2\omega_2 = \omega_1 c_2^2 \varrho_1 - \omega_2 c_1^1 \varrho_2$$

und daraus:

$$c_1^1 = -(\varrho_2)^{-1} \, Q_2 \, , \quad c_2^2 = (\varrho_1)^{-1} \, Q_1 \, .$$

Im Falle $m = 2$ fällt der Begriff der Punkthalbdeformation mit dem Begriff der Punktdeformation zusammen.

Die ähnlichen Betrachtungen, die wir für die Mannigfaltigkeit (A_1, A_2) getan haben, kann man für die beliebige Mannigfaltigkeit (A_p, A_q) ($p \neq q$; p, q sind beliebige Zahlen aus der Gesamtheit $1, 2, \ldots, m$) durchführen. Statt der Gleichung (31) gilt dann allgemein

$$\lambda_p^{qp}\lambda_q^{pq} - \bar{\lambda}_p^{qp}\bar{\lambda}_q^{pq} = 0 \, . \tag{45}$$

f) Setzen wir wieder $m \geqq 2$ voraus und betrachten das Paar P der Mannigfaltigkeiten V, $\bar{V}$; das Koordinatensystem sei nach (20), (20a) gewählt. Untersuchen wir die Punktbilder der Geraden des Raumes P_{2m-1}. Diese gehören zum Punktraum der Dimension

$$\binom{2m}{2} - 1 = m(2m - 1) - 1 \, .$$

Diesen Raum bezeichnen wir mit $P^b_{m(2m-1)-1}$. Weiter betrachten wir die m Mannigfaltigkeiten $(A_i, \bar{A}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Das Bild jeder dieser Mannigfaltigkeiten ist die Punktmannigfaltigkeit V^i, die von den Hauptparametern $u_1, u_2, \ldots, u_m$ abhängt. Betrachten wir die festen Werte der angeführten Hauptparameter. Der lineare Raum der niedrigsten Dimension, in dem die Bilder aller Geraden $(A_h, \bar{A}_{h*})$, $h, h^* = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, $h \neq h^*$, liegen, bezeichnen wir mit R^b. Für den gegebenen Wert von i schneidet die zu den Gleichungen $\omega_r = 0$ $(r = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m)$ gehörende Tangente der Mannigfaltigkeit V^i den Raum R^b im Punkte

$$S_i = \lambda_i^{ki}(A_k, \bar{A}_i) + \bar{\lambda}_i^{ki}(A_i, \bar{A}_k) \, ; \quad k = 1, 2, \ldots, m \, , \quad k \neq i \tag{46}$$

(man summiert nach $k \neq i$). Für die festen Werte von h, h^* führen wir im Raume $P^b_{m(2m-1)-1}$ die folgende Bezeichnung ein:

$$((A_h, \bar{A}_{h*}), (A_{h*}, \bar{A}_h)) = p_{hh*} \, .$$

Der Punkt S_i liegt nach (46) im Raum P^b_{m-2} der durch die Punkte:

$$\lambda_i^{1i}(A_1, \bar{A}_i) + \bar{\lambda}_i^{1i}(A_i, \bar{A}_1), \ldots, \lambda_i^{(i-i)i}(A_{i-1}, \bar{A}_i) + \bar{\lambda}_i^{(i-1)i}(A_i, \bar{A}_{i-1}),$$
$$\lambda_i^{(i+1)i}(A_{i+1}, \bar{A}_i) + \lambda_i^{(i+1)i}(A_i, \bar{A}_{i+1}), \ldots, \lambda_i^{mi}(A_m, \bar{A}_i) + \bar{\lambda}_i^{mi}(A_i, \bar{A}_m)$$

bestimmt ist. Dieser Raum schneidet alle Geraden p_{ki} (bei dem gegebenen Werte von i ist $k = 1, 2, \ldots, m$, $k \neq i$).

Betrachten wir zwei Mannigfaltigkeiten V^i, i soll die Werte p, q einnehmen. Zu ihnen gehören für jeden festen Werten von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ die Punkte S_p, S_q; beide entsprechenden Räume P^b_{m-2} schneiden die Gerade p_{pq}; der erste Raum im Punkte

$$\lambda_p^{qp}(A_q, \bar{A}_p) + \bar{\lambda}_p^{qp}(A_p, \bar{A}_q),$$

der zweite im Punkte

$$\lambda_q^{pq}(A_p, \bar{A}_q) + \bar{\lambda}_q^{pq}(A_q, \bar{A}_p).$$

Beide Punkte fallen nur dann zusammen, wenn die Gleichung (45) gilt.

Wenn $m = 3$ und die Gleichungen

$$\lambda_1^{21}\lambda_2^{12} - \bar{\lambda}_1^{21}\bar{\lambda}_2^{12} = 0, \quad \lambda_1^{31}\lambda_3^{13} - \bar{\lambda}_1^{31}\bar{\lambda}_3^{13} = 0, \quad \lambda_2^{32}\lambda_3^{23} - \bar{\lambda}_2^{32}\bar{\lambda}_3^{23} = 0$$

gelten, dann liegen die Punkte S_1, S_2, S_3 in einer Ebene, die die Geraden p_{12}, p_{13}, p_{23} schneidet.

Im Falle $m = 2$ liegen die Punkte S_1, S_2 auf der entsprechenden Geraden p_{12}. Wenn die Gleichung (31) gilt, dann fallen beide Punkte zusammen.

g) Im Folgenden setzen wir $m > 2$ voraus. Das Paar P sei wieder durch die Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \ldots, (A_m)$; $(\bar{A}_1), (\bar{A}_2), \ldots, (\bar{A}_m)$ bestimmt, die infinitesimale Verrückung des entsprechenden Koordinatensystems sei durch die Gleichungen (20), (20a) gegeben. Wir untersuchen jetzt die Fragen der Existenz und Allgemeinheit eines solchen Paares.

Die Koeffizienten in den Gleichungen (20) erfüllen die Bedingungen (20a), (40). (Siehe auch (1).) Im Abschnitt e) haben wir die äußeren Ableitungen der Gleichungen (40) gebildet. Aus den Gleichungen (41a) mit $i = 1$, $s = 1, 2, \ldots, m$, $s \neq \alpha$, kann man $D\omega_2, D\omega_3, \ldots D\omega_m$ berechnen. Daraus folgt:

$$(47)\quad D\omega_j = [\Omega_j^2, \omega_2] + [\Omega_j^3, \omega_3] + \ldots + [\Omega_j^m, \omega_m],$$

$$(48)\quad \begin{aligned}
\Omega_j^2 &= \varkappa^{-1}(-1)^j \left|-d\varphi_1^{c2} + (.), \varphi_1^{c2}, \varphi_1^{c3}, \ldots, \varphi_1^{c(j-1)}, \varphi_1^{c(j+1)}, \ldots, \varphi_1^{cm}\right|, \\
\Omega_j^3 &= \varkappa^{-1}(-1)^j \left|-d\varphi_1^{c3} + (.), \varphi_1^{c2}, \varphi_1^{c3}, \ldots, \varphi_1^{c(j-1)}, \varphi_1^{c(j+1)}, \ldots, \varphi_1^{cm}\right|, \\
&\vdots \\
\Omega_j^m &= \varkappa^{-1}(-1)^j \left|-d\varphi_1^{cm} + (.), \varphi_1^{c2}, \varphi_1^{c3}, \ldots, \varphi_1^{c(j-1)}, \varphi_1^{c(j+1)}, \ldots, \varphi_1^{cm}\right|,
\end{aligned}$$

$$j = 2, 3, \ldots, m, \quad c \neq \alpha.$$

Die Formen $-\mathrm{d}\varphi_1^{c2} + (.)$, $-\mathrm{d}\varphi_1^{c3} + (.)$, ..., $-\mathrm{d}\varphi_1^{cm} + (.)$ betrachten wir als unabhängige Größen. Betrachten wir nun die $(m - 1)$ Formen Ω_j^2 $(j = 2, 3, \ldots, m)$. Setzen wir voraus, daß solche Werte von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aus Δ existieren, daß

$$\varkappa^j \Omega_j^2 = 0 \tag{49}$$

gilt. $\varkappa^j$ sind nicht alle Null gleich. Die linke Seite der Gleichung (49) kann man in der Form einer Determinante schreiben:

$$\begin{vmatrix} -\mathrm{d}\varphi_1^{12} + (.) & \varphi_1^{12} & \varphi_1^{13} & \ldots & \varphi_1^{1m} \\ -\mathrm{d}\varphi_1^{22} + (.) & \varphi_1^{22} & \varphi_1^{23} & \ldots & \varphi_1^{2m} \\ \vdots & & & & \\ -\mathrm{d}\varphi_1^{(\alpha-1)2} + (.) & \varphi_1^{(\alpha-1)2} & \varphi_1^{(\alpha-1)3} & \ldots & \varphi_1^{(\alpha-1)m} \\ -\mathrm{d}\varphi_1^{(\alpha+1)2} + (.) & \varphi_1^{(\alpha+1)2} & \varphi_1^{(\alpha+1)3} & \ldots & \varphi_1^{(\alpha+1)m} \\ \vdots & & & & \\ -\mathrm{d}\varphi_1^{m2} + (.) & \varphi_1^{m2} & \varphi_1^{m3} & \ldots & \varphi_1^{mm} \\ 0 & \varkappa^2 & \varkappa^3 & \ldots & \varkappa^m \end{vmatrix} = 0\,. \tag{50}$$

Die ersten $(m - 1)$ Zeilen dieser Determinante sind nach (42) linear unabhängig. Aus der ersten Spalte folgt, daß die Größen $-\mathrm{d}\varphi_1^{12} + (.)$, $-\mathrm{d}\varphi_1^{22} + (.)$, ..., $-\mathrm{d}\varphi_1^{(\alpha-1)2} + (.)$, $-\mathrm{d}\varphi_1^{(\alpha+1)2} + (.)$, ..., $-\mathrm{d}\varphi_1^{m2} + (.)$ abhängig sind, das ist nach den Voraussetzungen unmöglich. Die Relation (49) gilt also nicht. Das gleiche Ergebnis bekommt man immer für die $(m - 1)$ Formen Ω_j^3, bzw. Ω_j^4, ..., bzw. Ω_j^m. Unter der Voraussetzung, daß $-\mathrm{d}\varphi_1^{c2} + (.)$, $-\mathrm{d}\varphi_1^{c3} + (.)$, ..., $-\mathrm{d}\varphi_1^{cm} + (.)$ die Menge von $(m - 1)^2$ unabhängigen Größen bildet, bidlet auch $\Omega_j^2, \Omega_j^3, \ldots, \Omega_j^m$, $j = 2, 3, \ldots$ ..., m, eine Menge von $(m - 1)^2$ unabhängigen Größen.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\{.\}$ die Pfaffschen Formen, die lineare Kombinationen von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_m, \Omega_j^2, \Omega_j^3, \ldots, \Omega_j^m$ $(j = 2, 3, \ldots, m)$ sind.

In der Gleichung (41a) setzen wir $i = 1$, $s = \alpha$ voraus. In diese Gleichung setzen wir nach (47) ein. Dann bekommen wir:

$$\begin{aligned} &[-\mathrm{d}\varphi_1^{\alpha 2} + \{.\}, \omega_2] + [-\mathrm{d}\varphi_1^{\alpha 3} + \{.\}, \omega_3] + \cdots \\ &\cdots + [-\mathrm{d}\varphi_1^{\alpha m} + \{.\}, \omega_m] = 0\,. \end{aligned} \tag{51}$$

In die Gleichung (41b) setzen wir dann fortschreitend $i = 1$, $s = 1, 2, \ldots, m$ ein. Nach (47) bekommen wir dann:

$$\begin{aligned} &[-\mathrm{d}\psi_1^{s2} + \{.\}, \omega_2] + [-\mathrm{d}\psi_1^{s3} + \{.\}, \omega_3] + \cdots \\ &\cdots + [-\mathrm{d}\psi_1^{sm} + \{.\}, \omega_m] = 0\,. \end{aligned} \tag{52}$$

Das ist m Gleichungen für $s = 1, 2, \ldots, m$.

Betrachten wir nun die Mannigfaltigkeit (A_2). Nach der Voraussetzung ist die Dimension des Berührraumes der Mannigfaltigkeit V im Punkte A_2 gleich $(2m - 2)$. Es existiert eine feste Zahl γ aus der Gesamtheit $1, 2, \ldots, m$, so daß der erwähnte Raum nicht durch den entsprechenden Punkt $\overline{A}_\gamma$ geht. Für die betrachteten Werte der Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_m$ gilt dann:

$$(53) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_2^{11} & \varphi_2^{13} & \varphi_2^{14} & \ldots & \varphi_2^{1m} \\ \varphi_2^{21} & \varphi_2^{23} & \varphi_2^{24} & \ldots & \varphi_2^{2m} \\ \vdots & & & & \\ \varphi_2^{(\gamma-1)1} & \varphi_2^{(\gamma-1)3} & \varphi_2^{(\gamma-1)4} & \ldots & \varphi_2^{(\gamma-1)m} \\ \varphi_2^{(\gamma+1)1} & \varphi_2^{(\gamma+1)3} & \varphi_2^{(\gamma+1)4} & \ldots & \varphi_2^{(\gamma+1)m} \\ \vdots & & & & \\ \varphi_2^{m1} & \varphi_2^{m3} & \varphi_2^{m4} & \ldots & \varphi_2^{mm} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Betrachten wir nun die Größen

$$\varphi_2^{11}, \varphi_2^{21}, \ldots, \varphi_2^{(\gamma-1)1}, \varphi_2^{(\gamma+1)1}, \ldots, \varphi_2^{m1}\,.$$

Mindestens eine von ihnen ist nach (53) von Null verschieden. Wir werden voraussetzen, daß $\varphi_2^{\beta 1} \neq 0$ $(\beta \neq \gamma)$ gilt. Im Punkte A_2 untersuchen wir den linearen Raum, der durch den zugehörigen Raum P_{m-1} und durch alle Tangenten von V mit $\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_m = 0$ gegeben ist.

Dieser Raum schneidet bei der Gültigkeit von $\varphi_2^{\beta 1} \neq 0$ und genau dann den zugehörigen Raum $\bar{P}_{m-1}$ im Punkte, der nicht im Raume $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_{\beta-1}, \bar{A}_{\beta+1}, \ldots \ldots, \bar{A}_m)$ liegt.

Wenn nun (53) und $\varphi_2^{\beta 1} \neq 0$ $(\beta \neq \gamma)$ für alle Werte $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \subset \Delta$ gilt, dann bezeichnen wir das Gebiet Δ_1 mit Δ_{12}. Weiter werden wir voraussetzen, daß die Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_m$ alle Werte aus dem Gebiet Δ_{12} annehmen.

In die Gleichung (41a) setzen wir $i = 2$, $s = \beta$ ein. Wir bekommen dann:

$$(54) \qquad \begin{aligned} &[-\mathrm{d}\varphi_2^{\beta 1} + (.), \omega_1] + [-\mathrm{d}\varphi_2^{\beta 3} + (.), \omega_3] + [-\mathrm{d}\varphi_2^{\beta 4} + (.), \omega_4] + \ldots \\ &+ [-\mathrm{d}\varphi_2^{\beta m} + (.), \omega_m] = \varphi_2^{\beta 1}\,\mathrm{D}\omega_1 + \varphi_2^{\beta 3}\,\mathrm{D}\omega_3 + \varphi_2^{\beta 4}\,\mathrm{D}\omega_4 + \ldots + \varphi_2^{\beta m}\,\mathrm{D}\omega_m\,. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (54) folgt mit Hilfe von (47):

$$(55) \quad D\omega_1 = [Q_2^{\beta 1}, \omega_1] + [R, \omega_2] + [T_2^{\beta 3}, \omega_3] + [T_2^{\beta 4}, \omega_4] + \ldots + [T_2^{\beta m}, \omega_m]\,.$$

In der Gleichung (55) haben wir die folgende Bezeichnung verwendet:

$$(56) \qquad \begin{aligned} Q_2^{\beta 1} &= \frac{1}{\varphi_2^{\beta 1}}\{-\mathrm{d}\varphi_2^{\beta 1} + (.)\}\,, \\ T_2^{\beta 3} &= \{-\mathrm{d}\varphi_2^{\beta 3} - \varphi_2^{\beta 3}\Omega_3^3 - \varphi_2^{\beta 4}\Omega_4^3 - \ldots - \varphi_2^{\beta m}\Omega_m^3 + (.)\}\frac{1}{\varphi_2^{\beta 1}}\,, \\ T_2^{\beta 4} &= \{-\mathrm{d}\varphi_2^{\beta 4} - \varphi_2^{\beta 3}\Omega_3^4 - \varphi_2^{\beta 4}\Omega_4^4 - \ldots - \varphi_2^{\beta m}\Omega_m^4 + (.)\}\frac{1}{\varphi_2^{\beta 1}}\,, \\ &\vdots \\ T_2^{\beta m} &= \{-\mathrm{d}\varphi_2^{\beta m} - \varphi_2^{\beta 3}\Omega_3^m - \varphi_2^{\beta 4}\Omega_4^m - \ldots - \varphi_2^{\beta m}\Omega_m^m + (.)\}\frac{1}{\varphi_2^{\beta 1}}\,, \\ R &= \{-\varphi_2^{\beta 3}\Omega_3^2 - \varphi_2^{\beta 4}\Omega_4^2 - \ldots - \varphi_2^{\beta m}\Omega_m^2\}\frac{1}{\varphi_2^{\beta 1}}\,. \end{aligned}$$

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\{(.)\}$ die Pfaffschen Formen, die die linearen Kombinationen der Formen $\omega_1^1, \omega_1^2, \ldots, \omega_m^m, \overline{\omega}_1^1, \overline{\omega}_2^2, \ldots, \overline{\omega}_m^m, \Omega_j^2, \Omega_j^3, \ldots, \Omega_j^m, (j = 2, 3, \ldots, \ldots, m)$, $Q_2^{\beta 1}, T_2^{\beta 3}, T_2^{\beta 4}, \ldots, T_2^{\beta m}$ sind.

Setzen wir $e = 1, 2, \ldots, m$, $e \neq \beta$, voraus. In die Gleichung (41a) setzen wir $i = 2$, $s = e$ ein. Dann bekommen wir

$$(57) \quad [-d\varphi_2^{e1} + (.), \omega_1] + [-d\varphi_2^{e3} + (.), \omega_3] + [-d\varphi_2^{e4} + (.), \omega_4] + \ldots + [-d\varphi_2^{em} + (.), \omega_m] = \varphi_2^{e1} D\omega_1 + \varphi_2^{e3} D\omega_3 + \varphi_2^{e4} D\omega_4 + \ldots + \varphi_2^{em} D\omega_m .$$

Aus der Gleichung (57) folgt nach (47), (55):

$$(58) \quad [-d\varphi_2^{e1} + \{(.)\}, \omega_1] + [-\varphi_2^{e1} R - \varphi_2^{e3}\Omega_3^2 - \varphi_2^{e4}\Omega_4^2 - \ldots - \varphi_2^{em}\Omega_m^2, \omega_2] + [-d\varphi_2^{e3} + \{(.)\}, \omega_3] + [-d\varphi_2^{e4} + \{(.)\}, \omega_4] + \ldots + [-d\varphi_2^{em} + \{(.)\}, \omega_m] = 0 .$$

Untersuchen wir nun für $e = 1, 2, \ldots, m$, $e \neq \beta$, folgende Formen (siehe (58)):

$$F^e = -\varphi_2^{e1} R - \varphi_2^{e3}\Omega_3^2 - \varphi_2^{e4}\Omega_4^2 - \ldots - \varphi_2^{em}\Omega_m^2 .$$

Nach den Gleichungen (56) folgt:

$$\varphi_2^{\beta 1} F^e = \Omega_3^2(\varphi_2^{e1}\varphi_2^{\beta 3} - \varphi_2^{e3}\varphi_2^{\beta 1}) + \Omega_4^2(\varphi_2^{e1}\varphi_2^{\beta 4} - \varphi_2^{e4}\varphi_2^{\beta 1}) + \ldots + \Omega_m^2(\varphi_2^{e1}\varphi_2^{\beta m} - \varphi_2^{em}\varphi_2^{\beta 1}) .$$

Die $(m - 1)$ Formen F^e sind lineare Kombinationen von $(m - 2)$ Formen $\Omega_3^2, \Omega_4^2, \ldots, \Omega_m^2$. Von den $(m - 1)$ Formen F^e wählen wir $(m - 2)$ Formen aus. F^γ sei die weggelassene Form. Betrachten wir die Determinante von den Koeffizienten solcher Formen bei den Größen $\Omega_3^2, \Omega_4^2, \ldots, \Omega_m^2$. τ soll alle Werte $i = 1, 2, \ldots, m$ außer β, γ durchlaufen. Die angeführte Determinante kann man folgenderweise aufschreiben:

$$G = \frac{1}{\varphi_2^{\beta 1}} (\varphi_2^{\tau 1}\varphi_2^{\beta 3} - \varphi_2^{\tau 3}\varphi_2^{\beta 1}, \varphi_2^{\tau 1}\varphi_2^{\beta 4} - \varphi_2^{\tau 4}\varphi_2^{\beta 1}, \varphi_2^{\tau 1}\varphi_2^{\beta 5} - \varphi_2^{\tau 5}\varphi_2^{\beta 1}, \ldots, \varphi_2^{\tau 1}\varphi_2^{\beta m} - \varphi_2^{\tau m}\varphi_2^{\beta 1}) .$$

Nach längerer Berechnung folgt daraus:

$$(59) \quad G = \varepsilon \frac{(-\varphi_2^{\beta 1})^{m-3}}{\varphi_2^{\beta 1}} \left\{ \begin{vmatrix} \varphi_2^{\tau 1} & \varphi_2^{\tau 3} & \varphi_2^{\tau 4} & \varphi_2^{\tau 5} & \ldots & \varphi_2^{\tau m} \\ \varphi_2^{\beta 1} & \varphi_2^{\beta 3} & \varphi_2^{\beta 4} & \varphi_2^{\beta 5} & \ldots & \varphi_2^{\beta m} \end{vmatrix} \right\} ;$$

$$\varepsilon = 1 \quad \text{für} \quad m = 2, 4, 6, \ldots, \quad \varepsilon = -1 \quad \text{für} \quad m = 1, 3, 5, \ldots$$

In der Klammer $\{ \}$ auf der rechten Seite ist die Determinante $(m - 1)$-ter Ordnung; ihre ersten $(m - 2)$ Zeilen bekommen wir so, daß wir für τ verschiedene Werte $1, 2, \ldots \ldots, m$, $\tau \neq \beta$, $\tau \neq \gamma$, legen. Aus der Gleichung (53) folgt, daß diese Determinante von Null verschieden ist. Es existieren $(m - 2)$ Formen F^e, die linear unabhängige

Kombinationen der $(m-2)$ Formen $\Omega_3^2, \Omega_4^2, \ldots, \Omega_m^2$ sind. Das ist für die weiteren Berechnungen wichtig.

In die Gleichung (41b) setzen wir $i = 2$ und fortschreitend $s = 1, 2, \ldots, m$ ein. Wir bekommen dann:

$$[-\mathrm{d}\psi_2^{s1} + (.), \omega_1] + [-\mathrm{d}\psi_2^{s3} + (.), \omega_3] + [-\mathrm{d}\psi_2^{s4} + (.), \omega_4] + \ldots$$
$$\ldots + [-\mathrm{d}\psi_2^{sm} + (.), \omega_m] = \psi_2^{s1}\,\mathrm{D}\omega_1 + \psi_2^{s3}\,\mathrm{D}\omega_3 + \ldots + \psi_2^{sm}\,\mathrm{D}\omega_m\,.$$

In diesen Gleichungen setzen wir nach (47), (55) ein. Wir bekommen dann:

$$(60)\qquad [-\mathrm{d}\psi_2^{s1} + \{(.)\}, \omega_1] + [-\psi_2^{s1}R - \psi_2^{s3}\Omega_3^2 - \psi_2^{s4}\Omega_4^2 - \ldots - \psi_2^{sm}\Omega_m^2, \omega_2] +$$
$$+ [-\mathrm{d}\psi_2^{s3} + \{(.)\}, \omega_3] + [-\mathrm{d}\psi_2^{s4} + \{(.)\}, \omega_4] + \ldots$$
$$\ldots + [-\mathrm{d}\psi_2^{sm} + \{(.)\}, \omega_m] = 0\,.$$

Für R muß man noch nach (56) einsetzen. Bei den verschiedenen Wahlen von s haben wir m Gleichungen (60).

In die Gleichung (41a) setzen wir $i = v$; v ist irgendeine der Zahlen $3, 4, \ldots, m$ und s ist irgendeine der Zahlen $1, 2, \ldots, m$. Dann bekommen wir:

$$(61)\quad [-\mathrm{d}\varphi_v^{s1} + (.), \omega_1] + [-\mathrm{d}\varphi_v^{s2} + (.), \omega_2] + \ldots + [-\mathrm{d}\varphi_v^{s(v-1)} + (.), \omega_{v-1}] +$$
$$+ [-\mathrm{d}\varphi_v^{s(v+1)} + (.), \omega_{v+1}] + [-\mathrm{d}\varphi_v^{s(v+2)} + (.), \omega_{v+2}] + \ldots$$
$$\ldots + [-\mathrm{d}\varphi_v^{sm} + (.), \omega_m] =$$
$$= \varphi_v^{s1}\,\mathrm{D}\omega_1 + \varphi_v^{s2}\,\mathrm{D}\omega_2 + \varphi_v^{s3}\,\mathrm{D}\omega_3 + \ldots + \varphi_v^{s(v-1)}\,\mathrm{D}\omega_{v-1} +$$
$$+ \varphi_v^{s(v+1)}\,\mathrm{D}\omega_{v+1} + \ldots + \varphi_v^{sm}\,\mathrm{D}\omega_m\,.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (47), (55), (56) folgt daraus:

$$(62)\qquad [-\mathrm{d}\varphi_v^{s1} + \{(.)\}, \omega_1] + [-\mathrm{d}\varphi_v^{s2} + \{(.)\}, \omega_2] + \ldots$$
$$\ldots + [-\mathrm{d}\varphi_v^{s(v-1)} + \{(.)\}, \omega_{v-1}] + [U_v^s, \omega_v] +$$
$$+ [-\mathrm{d}\varphi_v^{s(v+1)} + \{(.)\}, \omega_{v+1}] + \ldots + [-\mathrm{d}\varphi_v^{sm} + \{(.)\}, \omega_m] = 0\,,$$

$$(62\mathrm{a})\qquad U_v^s = -\varphi_v^{s1}T_2^{\beta v} - \varphi_v^{s2}\Omega_2^v - \varphi_v^{s3}\Omega_3^v - \ldots - \varphi_v^{s(v-1)}\Omega_{v-1}^v - \varphi_v^{s(v+1)}\Omega_{v+1}^v - \ldots$$
$$\ldots - \varphi_v^{sm}\Omega_m^v\,.$$

Die Relation (62a) kann man noch vereinfachen:

$$(63)\quad U_v^s = \frac{1}{\varphi_2^{\beta 1}}\{\varphi_v^{s1}(\mathrm{d}\varphi_2^{\beta v} + \varphi_2^{\beta v}\Omega_v^v) + \Omega_2^v(-\varphi_v^{s2}\varphi_2^{\beta 1}) + \Omega_3^v(\varphi_v^{s1}\varphi_2^{\beta 3} - \varphi_v^{s3}\varphi_2^{\beta 1}) +$$
$$+ \Omega_4^v(\varphi_v^{s1}\varphi_2^{\beta 4} - \varphi_v^{s4}\varphi_2^{\beta 1}) + \ldots + \Omega_{v-1}^v(\varphi_v^{s1}\varphi_2^{\beta(v-1)} - \varphi_v^{s(v-1)}\varphi_2^{\beta 1}) +$$
$$+ \Omega_{v+1}^v(\varphi_v^{s1}\varphi_2^{\beta(v+1)} - \varphi_v^{s(v+1)}\varphi_2^{\beta 1}) + \ldots + \Omega_m^v(\varphi_v^{s1}\varphi_2^{\beta m} - \varphi_v^{sm}\varphi_2^{\beta 1})\}\,.$$

Setzen wir voraus, daß v fest ist und s alle Werte $1, 2, \ldots, m$ durchläuft. Dann sind die m Formen U_ν^s lineare Kombinationen von $(m-1)$ linear unabhängigen Formen

$$(64)\qquad (\mathrm{d}\varphi_2^{\beta\nu} + \varphi_2^{\beta\nu}\Omega_\nu^\nu),\ \Omega_2^\nu,\ \Omega_3^\nu,\ \ldots,\ \Omega_{\nu-1}^\nu,\ \Omega_{\nu+1}^\nu,\ \ldots,\ \Omega_m^\nu\,.$$

Die Dimension des Berührraumes der Mannigfaltigkeit V im Punkte A_ν ist gleich $(2m-2)$. Es existiert eine feste Zahl ϑ_ν, so daß der angeführte Raum nicht durch den zugehörigen Punkt $\bar{A}_{\vartheta_\nu}$ geht. Wenn diese Bedingung für alle Werte von $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_m$ aus dem Gebiet Δ_{12} und für alle Werte von $\nu = 3, 4, \ldots, m$ gilt, dann bezeichnen wir Δ_{12} mit $\Delta_{12\vartheta}$. Im Folgenden werden wir voraussetzen, daß die Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_m$ alle Werte aus dem Gebiet $\Delta_{12\vartheta}$ annehmen. Für jeden Wert von $\nu =$ $= 3, 4, \ldots, m$ gilt dann:

$$(65)\qquad (\varphi_\nu^{\varrho 1}, \varphi_\nu^{\varrho 2}, \varphi_\nu^{\varrho 3}, \ldots, \varphi_\nu^{\varrho(\nu-1)}, \varphi_\nu^{\varrho(\nu+1)}, \ldots, \varphi_\nu^{\varrho m}) \neq 0\,,$$
$$\varrho = 1, 2, \ldots, m\,, \quad \varrho \neq \vartheta_\nu\,.$$

Untersuchen wir nach (63) die Formen U_ν^ϱ (ν ist fest). Für die Determinante aus den Koeffizienten der Formen (64) im Ausdruck (63) gilt nach (65):

$$H = (-\varphi_2^{\beta 1})^{m-2} \cdot \frac{1}{\varphi_2^{\beta 1}} (\varphi_\nu^{\varrho 1}, \varphi_\nu^{\varrho 2}, \ldots, \varphi_\nu^{\varrho(\nu-1)}, \varphi_\nu^{\varrho(\nu+1)}, \ldots, \varphi_\nu^{\varrho m}) \neq 0\,.$$

Von den m Formen U_ν^s bei dem festen Wert von ν sind die $(m-1)$ Formen U_ν^ϱ unabhängige Kombinationen von den $(m-1)$ Formen (64). Der gleiche Satz gilt für alle Werte von $\nu = 3, 4, \ldots, m$.

In die Gleichung (41b) setzen wir $i = \nu$, $\nu = 3, 4, \ldots, m$, $s = 1, 2, \ldots, m$, ein. Mit Hilfe der Gleichungen (47), (55), (56) bekommen wir dann:

$$\begin{aligned}(66)\qquad & [-\mathrm{d}\psi_\nu^{s1} + \{(.)\}, \omega_1] + [-\mathrm{d}\psi_\nu^{s2} + \{(.)\}, \omega_2] + \ldots \\ & \ldots + [-\mathrm{d}\psi_\nu^{s(\nu-1)} + \{(.)\}, \omega_{\nu-1}] + [\bar{U}_\nu^s, \omega_\nu] + \\ & + [-\mathrm{d}\psi_\nu^{s(\nu+1)} + \{(.)\}, \omega_{\nu+1}] + \ldots + [-\mathrm{d}\psi_\nu^{sm}, \omega_m]\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{U}_\nu^s = \frac{1}{\varphi_2^{\beta 1}} \{ & \psi_\nu^{s1}(\mathrm{d}\varphi_2^{\beta\nu} + \varphi_2^{\beta\nu}\Omega_\nu^\nu) + \Omega_2^\nu(-\varphi_2^{\beta 1}\psi_\nu^{s2}) + \Omega_3^\nu(\psi_\nu^{s1}\varphi_2^{\beta 3} - \psi_\nu^{s3}\varphi_2^{\beta 1}) + \ldots \\ & \ldots + \Omega_{\nu-1}^\nu(\psi_\nu^{s1}\varphi_2^{\beta(\nu-1)} - \psi_\nu^{s(\nu-1)}\varphi_2^{\beta 1}) + \Omega_{\nu+1}^\nu(\psi_\nu^{s1}\varphi_2^{\beta(\nu+1)} - \psi_\nu^{s(\nu+1)}\varphi_2^{\beta 1}) + \ldots \\ & \ldots + \Omega_m^\nu(\psi_\nu^{s1}\varphi_2^{\beta m} - \psi_\nu^{sm}\varphi_2^{\beta 1})\}\,.\end{aligned}$$

$\bar{U}_\nu^s$ sind die Pfaffschen Formen, die nur lineare Kombinationen der Formen (64) sind. Das System (66) enthält $m(m-2)$ Gleichungen.

Betrachten wir noch das System (20a) Durch die äußere Differentiation der Gleichungen des Systemes bekommen wir:

$$\begin{aligned}(67)\qquad & [-\mathrm{d}\lambda_i^{s1} + (.), \omega_1] + [-\mathrm{d}\lambda_i^{s2} + (.), \omega_2] + \ldots + [-\mathrm{d}\lambda_i^{sm} + (.), \omega_m] = \\ & = \lambda_i^{s1}\,\mathrm{D}\omega_1 + \lambda_i^{s2}\,\mathrm{D}\omega_2 + \ldots + \lambda_i^{sm}\,\mathrm{D}\omega_m\,, \\ & [-\mathrm{d}\bar{\lambda}_i^{s1} + (.), \omega_1] + [-\mathrm{d}\bar{\lambda}_i^{s2} + (.), \omega_2] + \ldots + [-\mathrm{d}\bar{\lambda}_i^{sm} + (.), \omega_m] = \\ & = \bar{\lambda}_i^{s1}\,\mathrm{D}\omega_1 + \bar{\lambda}_i^{s2}\,\mathrm{D}\omega_2 + \ldots + \bar{\lambda}_i^{sm}\,\mathrm{D}\omega_m\,.\end{aligned}$$

Nach Einsetzen von (47), (55) in die Gleichungen (67) folgt:

$$
\begin{aligned}
(68)\qquad & [-\mathrm{d}\lambda_i^{s1} + \{(.)\}, \omega_1] + \\
& + [-\mathrm{d}\lambda_i^{s2} + \{(.)\}, \omega_2] + \ldots + [-\mathrm{d}\lambda_i^{sm} + \{(.)\}, \omega_m] = 0\,, \\
& [-\mathrm{d}\bar{\lambda}_i^{s1} + \{(.)\}, \omega_1] + \\
& + [-\mathrm{d}\bar{\lambda}_i^{s2} + \{(.)\}, \omega_2] + \ldots + [-\mathrm{d}\bar{\lambda}_i^{sm} + \{(.)\}, \omega_m] = 0\,.
\end{aligned}
$$

Das System (68) enthält $2m(m-1)$ Gleichungen.

Zum Finden der Allgemeinheit des Paares P der erwähnten Mannigfaltigkeiten V, $\bar{V}$ muß man die Gleichungen (40), (20a) betrachten. Durch ihre äußere Differentiation bekommt man die Gleichungen (51), (52), (58), (60), (62), (66), (68). Im ganzen haben wir $(4m^2 - 3m)$ äußere quadratische Gleichungen. Die bilden das System S. Das charakteristische System enthält außer den Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, (40), (20a), die folgenden $(4m^3 - 4m^2 - m)$ Formen:

(69a) $\quad -\mathrm{d}\varphi_1^{\alpha 2} + \{.\},\ -\mathrm{d}\varphi_1^{\alpha 3} + \{.\}, \ldots, -\mathrm{d}\varphi_1^{\alpha m} + \{.\}\,;$

(69b) $\quad -\mathrm{d}\psi_1^{s2} + \{.\},\ -\mathrm{d}\psi_1^{s3} + \{.\}, \ldots, -\mathrm{d}\psi_1^{sm} + \{.\}\,, \quad s = 1, 2, \ldots, m\,;$

(69c) $\quad -\mathrm{d}\varphi_2^{e1} + \{(.)\},\ -\mathrm{d}\varphi_2^{e3} + \{(.)\},\ -\mathrm{d}\varphi_2^{e4} + \{(.)\}, \ldots, -\mathrm{d}\varphi_2^{em} + \{(.)\}\,,$
$\quad e = 1, 2, \ldots, m\,, \quad e \neq \beta\,;$

(69d) $\quad \Omega_3^2, \Omega_4^2, \ldots, \Omega_m^2\,;$

(69e) $\quad -\mathrm{d}\psi_2^{s1} + \{(.)\},\ -\mathrm{d}\psi_2^{s3} + \{(.)\},\ -\mathrm{d}\psi_2^{s4} + \{(.)\}, \ldots, -\mathrm{d}\psi_2^{sm} + \{(.)\}\,,$
$\quad s = 1, 2, \ldots, m\,;$

(69f) $\quad -\mathrm{d}\varphi_\nu^{s1} + \{(.)\},\ -\mathrm{d}\varphi_\nu^{s2} + \{(.)\}, \ldots, -\mathrm{d}\varphi_\nu^{s(\nu-1)} + \{(.)\},\ -\mathrm{d}\varphi_\nu^{s(\nu+1)} + \{(.)\}, \ldots,$
$\quad -\mathrm{d}\varphi_\nu^{sm} + \{(.)\}\,, \quad s = 1, 2, \ldots, m\,, \quad \nu = 3, 4, \ldots, m\,;$

(69g) $\quad \mathrm{d}\varphi_2^{\beta\nu} + \varphi_2^{\beta\nu}\Omega_\nu^\nu,\ \Omega_2^\nu, \Omega_3^\nu, \ldots, \Omega_{\nu-1}^\nu, \Omega_{\nu+1}^\nu, \ldots, \Omega_m^\nu\,, \quad \nu = 3, 4, \ldots, m\,;$

(69h) $\quad -\mathrm{d}\psi_\nu^{s1} + \{(.)\},\ -\mathrm{d}\psi_\nu^{s2} + \{(.)\}, \ldots, -\mathrm{d}\psi_\nu^{s(\nu-1)} + \{(.)\}\,,$
$\quad -\mathrm{d}\psi_\nu^{s(\nu+1)} + \{(.)\}, \ldots, -\mathrm{d}\psi_\nu^{sm} + \{(.)\}\,, \quad s = 1, 2, \ldots, m\,, \quad \nu = 3, 4, \ldots, m;$

(69i) $\quad -\mathrm{d}\lambda_i^{s1} + \{(.)\},\ -\mathrm{d}\lambda_i^{s2} + \{(.)\}, \ldots, -\mathrm{d}\lambda_i^{sm} + \{(.)\}\,,$
$\quad i, s = 1, 2, \ldots, m\,, \quad i \neq s\,;$

(69j) $\quad -\mathrm{d}\bar{\lambda}_i^{s1} + \{(.)\},\ -\mathrm{d}\bar{\lambda}_i^{s2} + \{(.)\}, \ldots, -\mathrm{d}\bar{\lambda}_i^{sm} + \{(.)\}\,,$
$\quad i, s = 1, 2, \ldots, m\,, \quad i \neq s\,.$

Das allgemeinste Integralelement E_m hängt von $N = \frac{1}{2}m^2(4m^2 - m - 5)$ Parametern ab. Durch die algebraische Differentiation jeder Gleichung des angeführten

Systemes bekommt man wenigstens $(m - 1)$ Pfaffschen Formen, die keine andere Gleichung desselben Systemes enthält.

Betrachten wir nun die Schichte der Integralelemente des gegebenen Systems. Wählen wir folgende Werte der Hauptparameter:

$$\omega_1 = u_1^s, \omega_2 = u_2^s, \ldots, \omega_m = u_m^s ; \quad |u_i^s| \neq 0 ; \quad i, s = 1, 2, \ldots, m .$$

Das Integralelement E_1 ist ganz beliebig. Für das Integralelement E_2 bekommt man die Bedingungen aus den Gleichungen des Systemes S. Ma kann $(4m^2 - 3m)$ Pfaffschen Formen so wählen, daß jede von ihnen gerade eine Gleichung des Systems enthält. Die entsprechende Determinante von den Koeffizienten des zu S gehörenden Polarsystems ist dem Produkt der Größen $u_1^2, u_2^2, \ldots, u_m^2$ gleich. Im Allgemeinen ist dieses Produkt von Null verschieden. Im Folgenden betrachten wir das Integralelement E_3. In jeder der Gleichungen des Systemes S kann man 2 Formen so wählen, daß sie die anderen Gleichungen nicht enthalten. In das zum System S gehörende Polarsystem setzen wir

$$u_1^2, u_2^2, \ldots, u_m^2 ; \quad u_1^3, u_2^3, \ldots, u_m^3$$

ein. Die Determinante von den Koeffizienten bei den angeführten Formen in diesen Gleichungen gleicht dem Produkt der Größen

$$u_1^2, u_2^2, \ldots, u_m^2, u_1^3, u_2^3, \ldots, u_m^3 .$$

Im Allgemeinen ist dieses Produkt von Null verschieden. Für die Charakteren des Systemes S gilt:

$$s_1 = 4m^2 - 3m , \quad s_1 + s_2 = 2(4m^2 - 3m) \Rightarrow s_2 = 4m^2 - 3m = s_1 .$$

Ähnlich bekommt man

$$s_3 = s_4 = \ldots = s_{m-1} = 4m^2 - 3m ,$$
$$s_m = 4m^3 - 4m^2 - m - (m - 1)(4m^2 - 3m) = 3m^2 - 4m .$$

Weiter gilt:

$$s_1 + 2s_2 + \ldots + (m - 1) s_{m-1} + ms_m = \tfrac{1}{2}m^2(4m^2 - m - 5) = N .$$

Das System ist in der Involution und die Lösung hängt von den $(3m^2 - 4m)$ Funktionen von m Veränderlichen ab.

Im Folgenden setzen wir voraus, daß für die bestimmten Werte $p, q, p \neq q$, die Gleichung (45) gilt. Durch die Differentiation dieses Verhältnises bekommen wir leicht:

$$\lambda_p^{qp} \, d\lambda_q^{pq} + \lambda_q^{pq} \, d\lambda_p^{qp} - \bar{\lambda}_p^{qp} \, d\bar{\lambda}_q^{pq} - \bar{\lambda}_q^{pq} \, d\bar{\lambda}_p^{qp} = 0 . \tag{70}$$

In die Gleichungen (68) setzen wir fortschreitend $i = p, s = q; i = q, s = p$ ein. Weiter bestimmen wir die diese Gleichungen enthaltenden Formen:

$$-d\lambda_p^{qp} + \{(.)\}, \; -d\lambda_q^{pq} + \{(.)\}, \; -d\bar{\lambda}_p^{qp} + \{(.)\}, \; -d\bar{\lambda}_q^{pq} + \{(.)\} . \tag{71}$$

Man muß noch die mit $\{(.)\}$ bezeichneten Ausdrücke berechnen. Durch die äußere Differentiation der Form

$$\omega_p^q = \lambda_p^{qh}\omega_h + \lambda_p^{qp}\omega_p\,; \quad h = 1, 2, \ldots, m\,, \quad h \neq p\,,$$

bekommt man mit Hilfe der Strukturgleichungen des projektiven Raumes folgende Relation:

$$[\lambda_p^{qp}(\omega_p^p - \omega_q^q), \omega_p] = [\mathrm{d}\lambda_p^{qp}, \omega_p] + \lambda_p^{q1}\,\mathrm{D}\omega_1 + \lambda_p^{qj}\,\mathrm{D}\omega_j + [\ldots]\,, \qquad j = 2, 3, \ldots, m\,.$$

Mit $[\ldots]$ haben wir solche quadratische äußere Formen bezeichnet, die auf zweiter Stelle die Formen ω_h $(h \neq p)$ enthalten.

Setzen wir zuerst $p \neq 1, 2$, $q \neq 1, 2$ voraus. Mit Hilfe der Gleichungen (47), (55) bekommen wir dann leicht die erste der Formen (71). Ähnlich kann man die übrigen Formen (71) finden. Im Folgenden bezeichnen wir diese Formen fortschreitend mit $f_p^q, f_q^p, \bar{f}_p^q, \bar{f}_q^p$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(72) \qquad f_p^q &= -\mathrm{d}\lambda_p^{qp} - \lambda_p^{q1}T_2^{\beta p} - \lambda_p^{qj}\Omega_j^p + \lambda_p^{qp}(\omega_p^p - \omega_q^q)\,,\\
f_q^p &= -\mathrm{d}\lambda_q^{pq} - \lambda_q^{p1}T_2^{\beta q} - \lambda_q^{pj}\Omega_j^q + \lambda_q^{pq}(\omega_q^q - \omega_p^p)\,,\\
\bar{f}_p^q &= -\mathrm{d}\bar{\lambda}_p^{qp} - \bar{\lambda}_p^{q1}T_2^{\beta p} - \bar{\lambda}_p^{qj}\Omega_j^p + \bar{\lambda}_p^{qp}(\bar{\omega}_p^p - \bar{\omega}_q^q)\,,\\
\bar{f}_q^p &= -\mathrm{d}\bar{\lambda}_q^{pq} - \bar{\lambda}_q^{p1}T_2^{\beta q} - \bar{\lambda}_q^{pj}\Omega_j^q + \bar{\lambda}_q^{pq}(\bar{\omega}_q^q - \bar{\omega}_p^p)\,.
\end{aligned}$$

Wenn wir mit Hilfe der Gleichungen (72) für $\mathrm{d}\lambda_p^{qp}, \mathrm{d}\lambda_q^{pq}, \mathrm{d}\bar{\lambda}_p^{qp}, \mathrm{d}\bar{\lambda}_q^{pq}$ in die Gleichung (70) einsetzen, dann bekommen wir mit Benützung von (45), (56) folgende Relation:

$$\begin{aligned}
(73) \qquad & \lambda_q^{pq}f_p^q + \lambda_p^{qp}f_q^p - \bar{\lambda}_q^{pq}\bar{f}_p^q - \bar{\lambda}_p^{qp}\bar{f}_q^p = 0\ [\text{mod. } \Omega_j^p \text{ für } j \neq p,\\
& \text{mod. } \Omega_j^q \text{ für } j \neq q, \text{ mod. } (\mathrm{d}\varphi_2^{\beta p} + \varphi_2^{\beta p}\Omega_p^p), \text{ mod. } (\mathrm{d}\varphi_2^{\beta q} + \varphi_2^{\beta q}\Omega_q^q)]\,.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Fall $p = 1$, $q = 2$. Dann folgt:

$$\lambda_2^{12}f_1^2 + \lambda_1^{21}f_2^1 - \bar{\lambda}_2^{12}\bar{f}_1^2 - \bar{\lambda}_1^{21}\bar{f}_2^1 = 0\ [\text{mod. } \Omega_j^2 \text{ für } j \neq 2]\,.$$

Weiter untersuchen wir den Fall $p = 1$, $q > 2$ (q ist fest). Dann bekommen wir:

$$\lambda_q^{1q}f_1^q + \lambda_1^{q1}f_q^1 - \bar{\lambda}_q^{1q}\bar{f}_1^q - \bar{\lambda}_1^{q1}\bar{f}_q^1 = 0\ \ [\text{mod. } (\mathrm{d}\varphi_2^{\beta q} + \varphi_2^{\beta q}\Omega_q^q), \text{ mod. } \Omega_j^q \ \text{ für } \ j \neq q]\,.$$

Endlich betrachten wir den Fall $p = 2$, $q > 2$ (q ist fest). Es folgt:

$$\lambda_q^{2q}f_2^q + \lambda_2^{q2}f_q^2 - \bar{\lambda}_q^{2q}\bar{f}_2^q - \bar{\lambda}_2^{q2}\bar{f}_q^2 = 0\ \ [\text{mod. } (\mathrm{d}\varphi_2^{\beta q} + \varphi_2^{\beta q}\Omega_q^q), \text{ mod. } \Omega_j^q \ \text{ für } \ j \neq q]\,.$$

Ähnlich kann man die Fälle $q = 1$, $p = 2$; $q = 1$, $p > 2$; $q = 2$, $p > 2$ betrachten.

Bei der Gültigkeit von (45) enthält in allen Fällen das zu den Gleichungen (51), (52), (58), (60), (62), (66), (68) assoziierte System $(4m^2 - 3m)$ Gleichungen und $q = 4m^3 - 4m^2 - m - 1$ unabhängige Formen. Diese Formen kann man mit Hilfe des Cartanschen Lemma mittels $N = \frac{1}{2}m^2(4m^2 - m - 5) - m$ Parameter berechnen. Die Matrix der Koeffizienten des zum System S gehörigen Polarsystems hat im Allgemeinen den Rang $(4m^3 - 3m)$. Jede der Formen (69i), (69j) ist gerade in einer Gleichung (68) enthalten. Es gilt:

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{m-1} = 4m^2 - 3m\,, \quad s_m = 3m^2 - 4m - 1\,.$$

Für die Cartansche Zahl bekommen wir

$$s_1 + 2s_2 + \ldots + (m - 1)\, s_{m-1} + ms_m = \tfrac{1}{2}m^2(4m^2 - m - 5) - m\,.$$

Das System ist in der Involution, die Lösung hängt von den $3m^2 - 4m - 1$ Funktionen von m Veränderlichen ab.

Im Abschnitt g) haben wir $m > 2$ vorausgesetzt. Durch die leichte Berechnung kann man finden, daß die angeführten Sätze über die Allgemeinheit der Lösung auch für $m = 2$ gelten. Die Gleichungen (62), (66) haben in diesem Falle keinen Sinn.

Literatur

[1] *Е. Т. Ивлев:* Канонический репер пары конгруэнций в трехмерном проективном пространстве, труды гос. унив. Томск *160*, 1, 15—24 (1962).

[2] *K. Svoboda:* Über die Punktdeformation einer vollständig fokalen Pseudokongruenz, Math. Nachrichten *38* (1968), S 197—206.

[3] *A. Švec:* Projective differential geometry of line congruences, Nakl. ČSAV Praha 1965.

[4] *J. Vala:* Über einige spezielle Kongruenzenpaare, Czech. Mathematical Journal *20* (1970), S. 140—148

Anschrift des Verfassers: Brno, Barvičova 85, ČSSR (Vysoké učení technické).