Czechoslovak Mathematical Journal

Claude E. Lobry

Une propriété générique des couples de champs de vecteurs

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), No. 2, 230–237

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101094

Czechoslovak Mathematical Journal, 22 (97) 1972, Praha

UNE PROPRIETE GENERIQUE DES COUPLES DE CHAMPS DE VECTEURS

C. LOBRY, Grenoble

(Reçu le 7 décembre 1970)

Soit M une variété de classe C^∞, connexe, à base dénombrable de voisinages. Etant donnés deux champs de vecteurs C^∞, X^1 et X^2 définis sur M on dit qu'un arc continu, C^∞ par morceaux, $\alpha : [0, T] \to M$ est un „chemin intégral" du couple X^1, X^2 si il est obtenu en „recollant" (C^0) un nombre fini de courbes intégrales des champs X^1 et X^2. On démontre que la propriété:

„tout couple de point de M peut être joint par un „chemin intégral" du couple X^1, X^2"

est une propriété „générique" de l'ensemble des couples de champs de vecteurs sur M, c'est-à-dire que tout couple de champs, X^1, X^2, peut être perturbé arbitrairement peu de manière à ce que la propriété devienne vraie.

Ce résultat peut être adapté au cas d'une forme différentielle ou plus généralement au cas d'une distribution de sous espaces de dimension supérieure ou égale à 2.

Remarquons que ce résultat est évidemment faux dans le cas où on ne considère qu'un seul champ de vecteur.

La démonstration va être faite en deux temps. Dans un premier temps on démontre une condition suffisante pour que la propriété soit vraie. Cette condition est la version, dans le cas où on considère des champs de vecteurs, d'un théorème dû à CHOW [1] sur la non intégrabilité d'un système de PFAFF. Le théorème de Chow est une conséquence de la proposition 2. Dans un deuxième temps on démontre que cette condition suffisante est „générique". Ceci est un exercice sur l'utilisation du théorème de transaversalité de THOM rendu possible par un résultat de WHITNEY sur la stratification des variétés algébriques réelles.

I. UNE CONDITION SUFFISANTE

Soient X^1 et X^2 deux champs de vecteurs C^∞ sur une variété M de dimension n, de classe C^∞, connexe. On note:

$$(x, t) \to X_t^i(x) \quad i \in \{1, 2\}$$

les groupes locaux engendrés par X^1 et X^2. Rappelons quelques propriétés élémentaires du crochet de Lie de deux champs. Soit λ un paramètre réel notons Z_t^λ le groupe local défini par:

$$Z_t^\lambda(x) = X_{-\lambda}^1 \circ X_t^2 \circ X_\lambda^1(x)$$

La transformation infinitésimale de ce groupe local est le champ:

(1) $$Z^\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial t} Z_t^\lambda\right)_{t=0}.$$

Le champ Z^0 est donc identique au champ X^2 et par définition du crochet de Lie on a:

$$\left(\frac{\mathrm{d}Z^\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{\lambda=0} = [X^1, X^2].$$

Définissons $[X^1, X^2]^{(n)}$ par les relations:

$$[X^1, X^2]^{(1)} = [X^1, X^2]\,; \quad [X^1, X^2]^{(n+1)} = [X^1, [X^1, X^2]^{(n)}].$$

On vérifie immédiatement en revenant à la définition du crochet:

(2) $$\left(\frac{\mathrm{d}^n Z^\lambda}{\mathrm{d}\lambda^n}\right)_{\lambda=0} = [X^1, X^2]^{(n)}.$$

Définition. Soit x_0 un point de M. On appelle ensemble des „*points accessibles*“ et on note A_{x_0} l'ensemble des points x de M de la forme:

$$x = X_{t_p}^{i_p} \circ X_{t_{p-1}}^{i_{p-1}} \circ \ldots \circ X_{t_j}^{i_j} \circ \ldots \circ X_{t_1}^{i_1}(x_0)\,; \quad i_j \in \{1, 2\}\,; \quad t_j \in \mathbf{R}\,; \quad p \in \mathbf{N}.$$

On voit que l'ensemble A_{x_0} est l'ensemble des points qui peuvent être joints à x_0 par un „chemin intégral“ du système X^1, X^2 au sens où cela a été défini dans l'introduction. On peut maintenant énoncer la proposition.

Proposition 1. *Si il existe un entier k tel que le système des k + 2 vecteurs*:

$$X^1(x_0), X^2(x_0), [X^1, X^2]^{(1)}(x_0), \ldots, [X^1, X^2]^{(j)}(x_0), \ldots, [X^1, X^2]^{(k)}(x_0)$$

soit de rang n l'ensemble A_{x_0} des points accessibles est un voisinage de x_0.

Démonstration. Pour la commodité des écritures on introduit les notations:

$$[X^1, X^2]^{(0)} = X^2, \quad \left(\frac{d^0 Z^\lambda}{d\lambda^0}\right)_{\lambda=0} = Z^0 = X^2.$$

Si f est une application de R^n dans R:

$$(x_1 x_2 \ldots x_n) \to f(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

par convention

$$\frac{\partial^0 f}{\partial x_i^0}(x_1 x_2 \ldots x_n) = f(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Si il existe un entier k tel que le système des vecteurs:

$$X^1(x_0), [X^1, X^2]^{(0)}(x_0), \ldots, [X^1, X^2]^{(j)}(x_0), \ldots, [X^1, X^2]^{(k)}(x_0)$$

soit de rang (n) un au moins des deux vecteurs:

$$X^1(x_0); \quad [X^1, X^2]^{(0)}(x_0) = X^2(x_0)$$

est différent de o. Distinguons deux cas:

1) supposons que $X^1(x_0)$ n'est pas nul. Il existe une suite $0 \leqq i_1 < i_2 < \ldots$ $\ldots < i_j < \ldots < i_{n-1} \leqq k$ telle que les vecteurs

$$X^1(x_0), [X^1, X^2]^{(i_1)}(x_0), \ldots, [X^1, X^2]^{(i_j)}(x_0), \ldots, [X^1, X^2]^{(i_{n-1})}(x_0)$$

soient linéairement indépendants. Considérons la famille à $n-1$ paramètres $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})$ d'applications de R^n dans M définies par:

$$(3) \quad (t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_{n-1}) \to \Phi(t_0, \ldots, t_j, \ldots, t_{n-1}; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_{n-1}) =$$
$$= Z_{t_{n-1}}^{\lambda_{n-1}} \circ Z_{t_{n-2}}^{\lambda_{n-2}} \circ \ldots \circ Z_{t_j}^{\lambda_j} \circ \ldots \circ Z_{t_1}^{\lambda_1} \circ X_{t_0}^1(x_0).$$

Il est clair que $\Phi(o; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_{n-1}) = x_0$; d'après la relation (1) on a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(o; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_{n-1}) = X^1(x_0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_j}(o; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_{n-1}) = Z^{\lambda_j}(x_0).$$

Notons $\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_{n-1})$ l'application de $\mathbf{R}^{n-1}$ dans R définie par

$$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_{n-1}) = \det(X^1(x_0), Z^{\lambda_1}(x_0), \ldots, Z^{\lambda_j}(x_0), \ldots, Z^{\lambda_{n-1}}(x_0)).$$

Deux éventualités peuvent se produire: Soit $\Delta(o)$ est différent de 0 soit $\Delta(o)$ est égal à 0. La première éventualité ne peut se produire que dans le cas où n est égal à 2 et où les vecteurs $X^1(x_0)$, $X^2(x_0)$ sont indépendants. Dans ce cas l'application:

$$(t_1, t_2) \to \Phi(t_1, t_2, 0) = X^2_{t_2} \circ X^1_{t_1}(x_0)$$

est de rang 2 à l'origine et par suite son image est un voisinage de x_0. Plaçons-nous dans la seconde éventualité: $\Delta(o) = 0$. Puisque un déterminant est une forme multilinéaire on a évidemment:

$$\frac{\partial\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})}{\partial\lambda_j} = \frac{\partial}{\partial\lambda_j} \det\left(X^1(x_0), Z^{\lambda_1}(x_0), \ldots, Z^{\lambda_j}(x_0), \ldots, Z^{\lambda_{n-1}}(x_0)\right)$$

$$\frac{\partial\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})}{\partial\lambda_j} = \det\left(X^1(x_0), Z^{\lambda_2}(x_0), \ldots, \frac{dZ^{\lambda_j}(x_0)}{d\lambda_j}, \ldots, Z^{\lambda_{n-1}}(x_0)\right).$$

Par dérivations successives on obtient donc à partir de (2) la relation:

$$\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_{n-1}}\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})}{\partial\lambda_{n-1}^{i_{n-1}}, \ldots, \partial\lambda_j^{i_j}, \ldots, \partial\lambda_2^{i_2}\, \partial\lambda_1^{i_1}}\right)_{\lambda_1=0,\lambda_2=0,\ldots,\lambda_{n-1}=0} =$$

$$= \det\left(X^1(x_0), [X^1, X^2]^{(i_1)}(x_0), \ldots, [X^1, X^2]^{(i_j)}(x_0), \ldots, [X^1, X^2]^{(n-1)}(x_0)\right).$$

D'après l'hypothèse ce déterminant est différent de 0, il existe donc des valeurs $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{n-1}^0$ des paramètres pour lesquelles:

$$\Delta(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{n-1}^0) \neq 0.$$

Comme Δ est précisément le Jacobien de l'application:

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \to \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_i^0, \ldots, \lambda_{n-1}^0)$$

ce ci prouve que Φ est de rang n à l'origine, par conséquence son image est un voisinage de point x_0 ce qui démontre la proposition.

2) Supposons maintenant que $X^1(x_0)$ est nul. Il existe une suite $0 \leqq i_1 < i_2 < \ldots \ldots < i_j < \ldots < i_n \leqq k$ telle que les vecteurs:

$$[X^1, X^2]^{(i_1)}(x_0), [X^1, X^2]^{(i_2)}(x_0), \ldots, [X^1, X^2]^{(i_j)}(x_0), \ldots, [X^1, X^2]^{(i_n)}(x_0)$$

soient linéairement indépendants. On procède alors exactment comme au (1) à partir de la famille à n paramètres d'applications de R^n dans R^n:

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \to \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_n) =$$
$$= Z^{\lambda_n}_{t_n} \circ Z^{\lambda_{n-1}}_{t_{n-1}} \circ \ldots \circ Z^{\lambda_j}_{t_j} \circ \ldots \circ Z^{\lambda_1}_{t_1}(x_0).$$

Remarque. On peut démontrer de la même manière (les écritures sont un peu plus compliquées) la proposition:

Proposition 2. *Soit $(X^i; i \in I)$ une famille de champs de vecteurs sur M, soit $(X^i, i \in \tilde{I})$ la plus petite famille close pour l'opération de crochet la contenant. Si le système des vecteurs:*

$$\{X^i(x_0);\ i \in \tilde{I}\}$$

est de rang n, l'ensemble A_{x_0} des points x_0 accessibles est un voisinage de x_0. (A_{x_0} est défini comme dans la définition 1 par:

$$A_{x_0} = \{X_{t_p}^{i_p} \circ \ldots \circ X_{t_j}^{i_j} \circ \ldots \circ X_{t_1}^{i_1}(x_0);\ i_j \in I;\ t_j \in \mathbf{R};\ p \in \mathbf{N}\}) .$$

Definition 2. On dit que le système des deux champs X^1 et X^2 est complètement indépendant à l'ordre k si en tout point x de de M, un, au moins, des deux systèmes de $k + 2$ vecteurs:

$$s_1 = \{X^1(x), X^2(x), [X^1, X^2]^{(1)}(x), \ldots, [X^1, X^2]^{(k)}(x)\}$$
$$s_2 = \{X^1(x), X^2(x), [X^2, X^1]^{(1)}(x), \ldots, [X^2, X^1]^{(k)}(x)\}$$

est de rang n.

Proposition 3. *Soient X^1 et X^2 deux champs de vecteurs C^∞ sur une variété M connexe. Une condition suffisante pour que tout couple de points de M puisse être joint par un chemin intégral du système X^1, X^2 est qu'il existe un entier k tel que le système X^1, X^2 soit complètement indépendant à l'ordre K.*

Démonstration. D'après la proposition 1 pour tout x l'ensemble A_x est un voisinage de x, par suite pour un x_0 donné A_{x_0} est un ouvert-fermé non vide, c'est-à-dire M tout entière.

II. UNE PROPRIETE GENERIQUE

On suppose dans ce paragraphe que la variété M est à base dénombrable de voisinage. Dans ces conditions on va montrer que pour $k \geqq n^2 + n$, n étant la dimension de M, l'ensemble des couples de champs de vecteurs sur M complètement indépendants à l'ordre k (cf. déf. 2) est un ouvert dense pour la C^k topologie de Whitney. Compte tenu de la proposition 3 ceci démontre que la propriété:

„Tout couple de point peut être joint par un chemin intégral
du système de deux champs X^1 et X^2"

est une propriété générique.

Démontrons d'abord un lemme. Soit J^p l'espace des jets d'ordre p à l'origine d'applications différentiables de R^n dans R^n. Les opérations de crochet sur les champs de vecteurs:

$$[X^1, X^2]; [X^2, X^1]; [X^1, X^2]^{(2)}; \ldots; [X^1, X^2]^{(i)}; [X^2 X^1]^{(i)}; \ldots$$
$$\ldots; [X^1, X^2]^{(p)}; [X^2, X^1]^{(p)}$$

indusient de façon naturelle des applications de $J^p \times J^p$ dans $J^{(0)} = \mathbf{R}^n$; si Z^1, Z^2 est un élément de $J^p \times J^p$ on note $[Z^1, Z^2]^{(i)}$; $[Z^2, Z^1]^{(i)}$ ces opérations.

Lemme. *La variété algébrique V définie sur $J^p \times J^p$ $(p > nr)$ par les $2r$ relations ci-dessous:*

$$s_1 \begin{cases} \det([Z^1, Z^2], [Z^1, Z^2]^{(2)}, \ldots, [Z^1, Z^2]^{(n)}) = 0 \\ \det([Z^1, Z^2]^{(n+1)}, [Z^1, Z^2]^{(n+2)}, \ldots, [Z^1, Z^2]^{(2n)}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \det([Z^1, Z^2]^{((r-1)n+1)}, [Z^1, Z^2]^{((r-1)n+2)}, \ldots, [Z^1, Z^2]^{(rn)}) = 0 \end{cases}$$

$$s_2 \begin{cases} \det([Z^2, Z^1], [Z^2, Z^1]^{(2)}, \ldots, [Z^2, Z^1]^{(n)}) = 0 \\ \det([Z^2, Z^1]^{(n+1)}, [Z^2, Z^1]^{(n+2)}, \ldots, [Z^2, Z^1]^{(2n)}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \det([Z^1, Z^2]^{((r-1)n+1)}, \ldots, [Z^1, Z^2]^{(rn)}) = 0 \end{cases}$$

est de codimension supérieure ou égale à $\min(r, 2n)$.

Démonstration. Rappelons que d'après un théorème de Whitney [3] toute variété algébrique réelle est la réunion d'un nombre fini de variétés connexes régulièrement plongées. Ceci permet de définir la dimension (et donc la codimension) de V comme la dimension de la variété de plus grande dimension.

La variété V définie par les relations s_1, s_2 contient l'ensemble $\Delta = \{(Z^1, Z^2); \pi^p(Z^1) = 0; \pi^p(Z^2) = 0\}$ où π^p désigne la projection canonique de J^p sur J^0. L'ensemble Δ est une variété linéaire de codimension $2n$. Il reste donc à montrer que V restreinte à $(J^p \times J^p) \equiv \Delta$ est de codimension supérieure à r. Les deux ensembles

$$E_1 = \{(Z^1, Z^2);\ \pi^p(Z^1) \neq 0\}\ ;\quad E_2 = \{(Z^1, Z^2);\ \pi^p(Z^2) \neq 0\}$$

constituent un recouvrement de $(J^p \times J^p) \setminus \Delta$ par deux ouverts. Il suffit donc de montrer que V restreinte à E, est de codimension supérieure à r. Soit O l'ensemble:

$$O = \{Z \in J^p;\ \pi^p(Z) \neq 0\}\,.$$

L'ensemble E_1 peut donc se mettre sous la forme $E_1 = O \times J^p$; soit π la projection canonique:

$$\pi = O \times J^p \to O\,.$$

Il suffit clairement de montrer que pour chaque Z de O l'ensemble de J^p intersection de V avec $\pi^{-1}(Z)$ est de codimension supérieure à r. Cet ensemble est la variété algébrique définie par les relations s_1, s_2 avec Z à la place de Z^1. Cet ensemble est contenu dans la variété algébrique définie par les relations s_1.

Puisque $\pi^p(Z)$ est différent de O on peut choisir un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage de O dans R^n tel que Z soit le jet d'ordre P du champ $\partial/\partial x_1$. Les r relations s_1 s'écrivent avec des notations évidentes:

$$\det\left(\frac{\partial Z^2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 Z^2}{\partial x_1^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n Z^2}{\partial x_1^n}\right) = 0$$

$$\det\left(\frac{\partial^{n+1} Z^2}{\partial x_1^{n+1}}, \quad \frac{\partial^{n+2} Z^2}{\partial x_1^{n+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{2n} Z^2}{\partial x_1^{2n}}\right) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\det\left(\frac{\partial^{(r-1)n+1} Z^2}{\partial x_1^{(r-1)n+1}} \quad , \ldots, \quad \frac{\partial^{nr} Z^2}{\partial x_1^{nr}}\right) = 0\,.$$

Les r relations ci-dessus définissent une variété algébrique dont la codimension est clairement égale à r; le lemme est donc démontré.

Introduisons maintenant le fibré vectoriel: $TM \times_M TM \to M$ où TM est le fibré tangent de la variété M. Notons D^K l'espace des sections de classe C^k de $TM \times_M \times_M TM \to M$ muni de la C^k topologie de Whitney. Un élément de D^K s'interprète comme un couple de champs de vecteurs sur M, on note (X^1, X^2) une telle section.

Notons $J^p\, TM \times_M TM$ le fibré vectoriel des jets d'ordre p de sections de $TM \times_M \times_M TM$, notons $(\overline{X}^1, \overline{X}^2)$ ses éléments, $(\overline{X}^1_{(x)}, \overline{X}^2_{(x)})$ les éléments de la fibre au-dessus de x. Soit S_v l'ensemble des éléments $(\overline{X}^1, \overline{X}^2)$ de $J^p\, TM \times_M TM$ tels qu'en tout point x de M aucun des $2r$ systèmes de vecteurs de T_xM définis ci-dessous ne soit de rang n.

$$\Sigma_1^1 = [\overline{X}^1_{(x)}, \overline{X}^2_{(x)}];\ [\overline{X}^1_{(x)}, \overline{X}^2_{(x)}]^{(2)};\ \ldots;\ [\overline{X}^1_{(x)}, \overline{X}^2_{(x)}]^{(n)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma_r^1 = [\overline{X}^1_{(x)}, \overline{X}^2_{(x)}]^{((r-1)n+1)};\ [\overline{X}^1_{(x)}, \overline{X}^2_{(x)}]^{((r-1)n+2)};\ \ldots;\ [\overline{X}^1_{(x)}, \overline{X}^2_{(x)}]^{(nr)}$$

$$\Sigma_1^2 = [\overline{X}^2_{(x)}, \overline{X}^1_{(x)}];\ [\overline{X}^2_{(x)}; \overline{X}^1_{(x)}]^{(2)};\ \ldots;\ [\overline{X}^2_{(x)}, \overline{X}^1_{(x)}]^{(n)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma_r^2 = [\overline{X}^2_{(x)}, \overline{X}^1_{(x)}]^{((r-1)n+1)};\ [\overline{X}^2_{(x)}, \overline{X}^1_{(x)}]^{((r-1)n+2)};\ \ldots;\ [\overline{X}^2_{(x)}, \overline{X}^1_{(x)}]^{(nr)}$$

(On suppose naturellement que p est plus grand que nr pour que $[\overline{X}^1_{(x)}, \overline{X}^2_{(x)}]^{(j)}$ et $[\overline{X}^2_{(x)}, \overline{X}^1_{(x)}]^{(j)}$ soient définis pour $J \leqq nr$.) Si on choisit un système de coordonnées au voisinage d'un x par construction même l'intersection $S_v(x)$ de S_v avec la fibre de $J^pTM \times_M TM$ au dessus de x est la variété algébrique V définie au lemme 1. Par conséquence l'ensemble S_v est la réunion d'un nombre fini de sous variétés connexes régulièrement plongées. On peut donc définir la codimension de S_v qui d'après le lemme 1 est upérieure ou égale à min $(r, 2n)$.

Choisissons pour r la valeur $n+1$, pour p la valeur $n(n+1)$ soit $J_p(X^1; X^2)$ le jet d'ordre p d'un élément de D^k, on peut énoncer: (Th. de transversalité ([2] p. 94)

Theorème. Pour $k \geqq n^2 + n$, l'ensemble $T(S_v)$ des éléments (X^1, X^2) de D^k tels que:

$$j_p(X^1, X^2) : M \to J^p\, TM \times_M TM \quad (p = n(n+1))$$

ne rencontre pas l'ensemble S_v est un ouvert dense de D^k.

De là on déduit immédiatement:

Proposition 4. *Pour $k \geqq n^2 + n$, l'ensemble des couples de champs de vecteurs complètement indépendants à l'ordre $n + 1$ est un ouvert dense pour la C^k topologie de Whitney.*

Démonstration. Soient X^1 et X^2 deux champs de vecteurs de classe C^k, dire que $j_p(X^1, X^2)$ ne rencontre pas S_v c'est dire qu'en tout point x de M un au moins des systèmes de vecteurs

$$\begin{array}{ll}
\Sigma_1^1 & = [X^1, X^2]_{(x)}; [X^1, X^2]_{(x)}^{(2)}; \ldots; [X^1, X^2]_{(x)}^{(n)} \\
\Sigma_2^1 & = [X^1, X^2]_{(x)}^{(n+1)}; \ldots; [X^1, X^2]_{(x)}^{(2n)} \\
\multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
\Sigma_{n+1}^1 & = [X^1, X^2]_{(x)}^{((r-1)n+1)}; \ldots; [X^1, X^2]_{(x)}^{(nr)} \\
\Sigma_1^2 & = [X^2, X^1]_{(x)}; [X^2, X^1]_{(x)}^{(2)}; \ldots; [X^2, X^1]_{(x)}^{(n)} \\
\Sigma_2^2 & = [X^2, X^1]_{(x)}^{(n+1)}; \ldots; [X^2, X^1]_{(x)}^{(2n)} \\
\multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
\Sigma_{n+1}^2 & = [X^2, X^1]_{(x)}^{((r-1)n+1)}; \ldots; [X^2, X^1]_{(x)}^{(nr)}
\end{array}$$

est de rang n, donc que X^1 et X^2 sont complètement indépendants à l'ordre $n + 1$.

Remarque. L'ensemble des couples de champs de vecteurs X^1, X^2 pour lesquels tout couple de points peut être joint par un chemin intégral de X^1, X^2 est certainement beaucoup plus gros que l'ensemble des couples de champs complètement indépendants à l'ordre $n + 1$ (cf. Prop. 2). Un travail un peu plus fin permettrait certainement d'abaisser l'ordre k à partir duquel on peut affirmer que la propriété est générique dans $D^{(k)}$.

Références

[1] *W. L. Chow*, Über Systeme von linearen partiellen Differential. Gleichungen erster Ordnung. Math. Annalen *117*, 98—105 (1940).

[2] *J. Martinet*, Sur les singularités des formes différentielles. Thèse — Grenoble 1969.

[3] *H. Whitney*, Elementary structure of Real Algebraic Varieties. Annals of Mathematics, *66*, 545—556 (1957).

Adresse de l'auteur: I.M.A.G. Cedex 53, (38) — Grenoble (Gare), France.

Adresse actuelle: Université de Bordeaux I, U. E. R. de Mathematique et Informatique, 351 cours de la Liberation, (33) Talence, France.