

Jan Stanisław Lipiński

Über eine Frage von Herr L. Mišik

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 21 (1971), No. 2, 234–235

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101018>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1971

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER EINE FRAGE VON HERR L. MIŠIK

JAN STANISLAW LIPÍŃSKI, Gdańsk

(Eingelangt am 9. Dezember 1969)

Herr L. MIŠIK hat im Artikel [1] folgende Begriffe definiert: Sei P eine Mengeneigenschaft. Man sagt, daß P f -durchschnittlich ist, wenn für jede Funktion f , für welche die Mengen $f_a = \{x : f(x) > a\}$ und $f^a = \{x : f(x) < a\}$ für jedes a die Eigenschaft P besitzen, dieselbe Eigenschaft auch $f_a^b = f_a \cap f^b$ für alle a und b besitzt. Herr Mišik hat bewiesen, daß es solche nicht f -durchschnittliche Mengeneigenschaften P_0 gibt, für welche die Eigenschaft P : „ E ist eine F_σ -Menge, die die Eigenschaft P_0 hat“, eine f -durchschnittliche Eigenschaft ist. Im Zusammenhang mit diesem Erfolg, hat er die folgende Frage gestellt: Gibt es eine nicht f -durchschnittliche Mengeneigenschaft P_0 so, daß die Eigenschaft P : „ E ist eine $G_{\delta\sigma}$ -Menge, die die Eigenschaft P_0 besitzt“, eine f -durchschnittliche Eigenschaft ist?

In dieser Note gebe ich auf die obige Frage eine positive Antwort. Zuerst konstruiere ich direkt eine Mengenklaſse \mathcal{P} , so daß „ $E \in \mathcal{P}$ “ eine nicht f -durchschnittliche – und „ $E \in \mathcal{P} \cap G_{\delta\sigma}$ “ eine f -durchschnittliche Eigenschaft ist. Dann folgt eine indirekte Lösung: Ich gebe einen allgemeinen Satz an, aus welchem die positive Antwort hervorgeht.

1. Sei \mathcal{P} die Klasse aller Mengen, die entweder offen, oder unmeßbar sind. Nehmen wir drei Mengen A_1, A_2 und A_3 so daß $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (-\infty, +\infty)$, $A_2 \cap A_3 = A_1 = \langle 0, 1 \rangle$ und A_2 und A_3 unmeßbar sind. Die Funktion

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A_2 \setminus A_1 \\ 0 & \text{für } x \in A_1 \\ -1 & \text{für } x \in A_3 \setminus A_1 \end{cases}$$

zeigt, daß die Eigenschaft P_0 : „ $E \in \mathcal{P}$ “ nicht f -durchschnittlich ist. Das ist ganz natürlich: Die Mengen f_a und f^a sind unmeßbar, also gehören zu \mathcal{P} . Die Menge $f_{-1}^1 = \langle 0, 1 \rangle$ ist weder unmeßbar, noch offen und gehört nicht zu \mathcal{P} . Die Eigenschaft P : „ $E \in \mathcal{P}$ und E ist eine $G_{\delta\sigma}$ -Menge“ bedeutet, daß E eine offene Menge ist. Daher folgt, daß P f -durchschnittlich ist.

2. Seien P und P_0 zwei Mengeneigenschaften. Wir sagen, daß P eine Obereigenschaft von P_0 ist, wenn jede Menge, welche die Eigenschaft P_0 besitzt, die Eigenschaft P hat.

Satz. Sei P_0 eine Mengeneigenschaft. Wenn es zwei Punkte x_1, x_2 und eine nicht-leere Menge E gibt, welche die Bedingungen: $x_1 \neq x_2, x_1 \notin E, x_2 \notin E$ und „ E hat die Eigenschaft P_0 nicht“, erfüllen, so existiert eine Obereigenschaft von P_0 , die nicht f -durchschnittlich ist.

Beweis. Sei \mathcal{P} die Klasse aller Mengen, die die Eigenschaft P_0 haben. Bezeichnen wir $A_1 = E, A_2 = E \cup \{x_1\}, A_3 = (-\infty, +\infty) \setminus (E \cup \{x_1\})$. Dann $x_2 \in A_3$ und alle A_i ($i = 1, 2, 3$) sind nicht leer. Sei \mathcal{P}_1 die Gesamtheit der Mengen: $\emptyset, \{x_1\}, E \cup \{x_1\}, (-\infty, +\infty), (-\infty, +\infty) \setminus \{x_1\}, (-\infty, +\infty) \setminus (E \cup \{x_1\})$. Wir führen als P die Mengeneigenschaft: „ $E \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_1$ “ ein. Die Menge E besitzt diese Eigenschaft nicht. Sei $f(x)$ die Funktion (1). Dann gehören die Mengen f_a und f^a zu \mathcal{P}_1 und haben die Eigenschaft P . Die Eigenschaft P ist nicht f -durchschnittlich, da die Menge $f_{-1}^1 = E$ diese Eigenschaft nicht besitzt. Es ist klar, daß P eine Obereigenschaft von P_0 ist.

Da die Eigenschaft „ E ist eine $G_{\sigma\sigma}$ -Menge“ f -durchschnittlich ist und die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, erhalten wir noch einmal eine positive Antwort.

Literatur

- [1] L. Mišik: Über f -durchschnittliche Eigenschaften, Czechoslovak Mathematical Journal 19 (94) (1969), 380—389.

Anschrift des Verfassers: Gdańsk, ul. Sobieskiego 18, Polska.