Czechoslovak Mathematical Journal

Štefan Schwabik

Verallgemeinerte gewöhnliche Differentialgleichungen; Systeme mit Impulsen auf Flächen. II

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 21 (1971), No. 2, 172–197

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101015

Czechoslovak Mathematical Journal, 21 (96) 1971, Praha

VERALLGEMEINERTE GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN; SYSTEME MIT IMPULSEN AUF FLÄCHEN II

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Eingelangt am 4. Dezember 1969)

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der Untersuchungen über verallgemeinerte Differentialgleichungen in [6], wo Systeme beschrieben wurden, für welche auf gewissen Flächen einwirkende Impulse vorgegeben sind. Da wollen wir die Frage der stetigen Abhängigkeit von einem Parameter für derartige Systeme behandeln.

1. EIN HILFSSATZ

Bevor wie die eigentlichen Untersuchungen dieser Arbeit durchführen, wenden wir uns zu der stetigen Abhängigkeit von einem Parameter für verallgemeinerte Differentialgleichungen einfacherer Struktur.

Sei $G \subset E_{n+1}$ eine offene Menge. Sei $h : E_1 \to E_1$ eine beschränkte, nichtfallende, von links stetige Funktion in E_1. Für eine Funktion $F(x, t) : G \to E_n$ bezeichne man $\Delta_t^\sigma F(x, \tau) = F(x, \tau + \sigma) - F(x, \tau)$ und $\Delta_x^y F(z, t) = F(z + y, t) - F(z, t)$. Die Funktion $F(x, t) : G \to E_n$ gehört zu der Klasse $\mathscr{F}(G, h)$, wenn

$$\|\Delta_t^{t_2 - t_1} F(x, t_1)\| \leqq |h(t_2) - h(t_1)| \quad \text{für alle} \quad (x, t_i) \in G\,, \quad i = 1, 2 \tag{1,1}$$

$$\|\Delta_t^{t_2 - t_1} \Delta_x^y F(z, t_i)\| \leqq \|y\| \,.\, |h(t_2) - h(t_1)| \quad \text{für alle} \quad (z, t_i), (z + y, t_i) \in G\,, \quad i = 1, 2 \tag{1,2}$$

gilt (vgl. [2], [5]).

$\|\,.\,\|$ bedeutete die übliche Norm in E_n.

Wir untersuchen verallgemeinerte Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x, t)\,, \tag{1,3}$$

wobei $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$ ist. Gleichungen dieser Art wurden in [2] und [5] untersucht. Unter einer Lösung von (1,3) in einem Intervall $\langle T_1, T_2 \rangle$ verstehen wir soeine

Funktion $x(\tau) : \langle T_1, T_2\rangle \to E_n$, für welche $(x(\tau), \tau) \in G$ für $\tau \in \langle T_1, T_2\rangle$ ist und die Gleichung $x(\sigma_2) = x(\sigma_1) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$ für $\sigma_1, \sigma_2 \in \langle T_1, T_2\rangle$ gilt, wobei das Integral in der letzten Gleichung als das Kurzweilsche Integral (vgl. [1]) aufzufassen ist.

Satz 1,1. *Sei $0 < \varepsilon \leqq 1$, $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$. Es seien $h^0, h : E_1 \to E_1$ beschränkte, nichtfallende von links stetige Funktionen in E_1 und sei $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$, $F^0(x, t) \in \mathscr{F}(G, h^0)$, wobei $G \subset E_{n+1}$ eine offene Menge ist. Setzen wir voraus, dass*

$$\|\Delta_t^\vartheta[F(x, t) - F^0(x, t)]\| < \varepsilon \tag{1,4}$$

für alle $(x, t), (x, t + \vartheta) \in G$, $t, t + \vartheta \in \langle T_1, T_2\rangle$, $0 < \vartheta \leqq 1$ gilt. Sei $x(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (1,3) im Intervall $\langle T_1, T_2\rangle$, $x(T_1) = \tilde{x}$ und sei $x^0(\tau)$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{dx}{d\tau} = DF^0(x, t) \tag{1,5}$$

im Intervall $\langle T_1, T_2\rangle$, $x^0(T_1) = \tilde{x}^0$.

Dann gilt für jedes $\sigma \in \langle T_1, T_2\rangle$ die Ungleichung

$$\|x(\sigma) - x^0(\sigma)\| \leqq C_1\|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + C_2\sqrt{\varepsilon}\,, \tag{1,6}$$

wobei $C_1 \geqq 1$ eine Konstante ist, welche nur von der Differenz $h(T_2) - h(T_1)$ abhängt und $C_2 \geqq 0$ ist eine Konstante, welche von den Differenzen $h(T_2) - h(T_1)$, $h^0(T_2) - h^0(T_1)$ und $T_2 - T_1$ abhängt.

Beweis. Sei $\sigma \in \langle T_1, T_2\rangle$. Der Definition einer Lösung zufolge ist

$$\begin{aligned} \|x(\sigma) - x^0(\sigma)\| &\leqq \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + \left\|\int_{T_1}^{\sigma} D[F(x(\tau), t) - F^0(x^0(\tau), t)]\right\| \leqq \\ &\leqq \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + \left\|\int_{T_1}^{\sigma} D[F(x(\tau), t) - F(x^0(\tau), t)]\right\| + \\ &\quad + \left\|\int_{T_1}^{\sigma} D[F(x^0(\tau), t) - F^0(x^0(\tau), t)]\right\|. \end{aligned} \tag{1,7}$$

Nach (1,2) gilt $\|\Delta_t^{t_2 - t_1}[F(x(\tau), t_1) - F(x^0(\tau), t_1)]\| \leqq \|x(\tau) - x^0(\tau)\|\,|h(t_2) - h(t_1)|$ und nach dem Lemma 2,1 in [5] gilt so

$$\left\|\int_{T_1}^{\sigma} D[F(x(\tau), t) - F(x^0(\tau), t)]\right\| \leqq \int_{T_1}^{\sigma} \|x(\tau) - x^0(\tau)\|\, dh(\tau)\,.$$

Ferner ist offenbar $F(x, t) - F^0(x, t) \in \mathscr{F}(G, h + h^0)$ und nachdem $x^0(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (1,5) ist, gilt nach dem Lemma 2,4 in [5] die Ungleichung $\|x^0(\tau_2) - x^0(\tau_1)\| \leqq |h^0(\tau_2) - h^0(\tau_1)|$ für alle $\tau_1, \tau_2 \in \langle T_1, T_2\rangle$. Es existiert also das Integral

$\int_{T_1}^{\sigma} D[F(x^0(\tau), t) - F^0(x^0(\tau), t)]$ (vgl. [5], Satz auf S. 405). Bezeichnen wir nun

$$N = N(2\sqrt{(\varepsilon)}, T_1, T_2, h^0) = \{t \in \langle T_1, T_2 \rangle;\ h^0(t+) - h^0(t) \geqq 2\sqrt{\varepsilon}\}\,.$$

Die Anzahl der in der Menge N liegenden Punkte kann offenbar von oben mit der Zahl $(h^0(T_2) - h^0(T_1))/(2\sqrt{\varepsilon})$ abgeschätzt werden. Sei weiter $A = A(2\sqrt{\varepsilon}, T_1, T_2\, h^0)$ die Menge aller Teilungen $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\}$ des Intervalles $\langle T_1, T_2 \rangle$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $T_1 = \alpha_0 \leqq \tau_1 \leqq \alpha_1 \leqq \ldots \leqq \alpha_{s-1} = \tau_s \leqq \alpha_s = T_2$,

b) $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s$,

c) wenn $\tau_j \notin N$, dann sei $h^0(\alpha_j) - h^0(\alpha_{j-1}) < 2\sqrt{\varepsilon}$ und wenn $\tau_j \in N$ ist, dann sei $h^0(\tau_j) - h^0(\alpha_{j-1}) < 2\sqrt{\varepsilon}$, $h^0(\alpha_j) - h^0(\tau_j+) < 2\sqrt{\varepsilon}$ und $\alpha_j > \tau_j$.

Für diese Eigenschaften vgl. [2] bzw. [5]. Wählen wir eine Teilung $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots \ldots, \tau_s, \alpha_s\} \in A(2\sqrt{\varepsilon}, T_1, T_2, h^0)$, sodass für diese zusätzlich noch $\alpha_j - \alpha_{j-1} \leqq 1$ gilt. Es ist offensichtlich, dass man eine Teilung mit diesen Eigenschaften derartig wählen kann, dass die Ungleichung

$$s < (h^0(T_2) - h^0(T_1))/(2\sqrt{\varepsilon}) + (T_2 - T_1) + 1 \tag{1,8}$$

für die Anzahl der Teilungspunkte bestimmende Zahl s gelten wird.

Zu gegebenem $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$ gibt es einen Index $s_\sigma \leqq s$ derartig, dass $\sigma \in (\alpha_{s_\sigma - 1}, \sigma_{s_\sigma}\rangle$ sein wird, wobei α_i Punkte der oben gewählten Teilung sind. Wenn dabei $\sigma < \tau_{s_\sigma}$ ist, lege man $\tau'_{s_\sigma} = \alpha'_{s_\sigma} = \sigma$, wenn $\tau_{s_\sigma} = \sigma$ ist, lege man $\alpha'_{s_\sigma} = \tau_{s_\sigma}$ und wähle man beliebig $\tau'_{s_\sigma} \in \langle \alpha_{s_\sigma - 1}, \sigma)$, wenn schliesslich $\tau_{s_\sigma} < \sigma$ ist, lege man $\tau'_{s_\sigma} = \tau_{s_\sigma}$, $\alpha'_{s_\sigma} = \sigma$. Wir haben so eine Teilung $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s_\sigma - 1}, \tau'_{s_\sigma}, \alpha'_{s_\sigma}\} \in A(2\sqrt{(\varepsilon)}, T_1, \sigma, h^0)$ des Intervalles $\langle T_1, \sigma \rangle$ konstruiert, wobei offenbar $s_\sigma \leqq s$ ist. Nach dem Satz von S. 405 in [5] gilt so

$$\left\| \int_{T_1}^{\sigma} D[F(x^0(\tau), t) - F^0(x^0(\tau), t)] \right\| \leqq \sum_{i=1}^{s_\sigma} \|\Delta_i\| + \\ + 2\,[h(\sigma) - h(T_1) + 2(h^0(\sigma) - h^0(T_1))]\sqrt{\varepsilon}\,, \tag{1,9}$$

wobei $\Delta_i = F(x^0(\tau_i), \alpha_i) - F^0(x^0(\tau_i), \alpha_i) - [F(x^0(\tau_i), \alpha_{i-1}) - F^0(x^0(\tau_i), \alpha_{i-1})] = \\ = \Delta_t^{\alpha_i - \alpha_{i-1}}[F(x^0(\tau_i), \alpha_{i-1}) - F^0(x^0(\tau_i), \alpha_{i-1})]$ wenn $\tau_i \notin N$ und

$$\Delta_i = \Delta_t^{\alpha_i - \tau_i}[F(x^0(\tau_i+), \tau_i) - F^0(x^0(\tau_i+), \tau_i)] + \\ + \Delta_t^{\tau_i - \alpha_{i-1}}[F(x^0(\tau_i), \alpha_{i-1}) - F^0(x^0(\tau_i), \alpha_{i-1})]\,,$$

wenn $\tau_i \in N$. Nach (1,4) ist offenbar $\|\Delta_i\| < 2\varepsilon$ für jedes $i = 1, \ldots, s_\sigma$ und nach (1,9), (1,8) und $s_\sigma \leqq s$ ist

$$\left\| \int_{T_1}^{\sigma} D[F(x^0(\tau), t) - F^0(x^0(\tau), t)] \right\| < 2\varepsilon[(h^0(T_2) - h^0(T_1))|\, 2\sqrt{(\varepsilon)} + T_2 - T_1 + 1] + \\ + 2[h(T_2) - h(T_1) + 2(h^0(T_2) - h^0(T_1))]\sqrt{(\varepsilon)} \leqq c\sqrt{(\varepsilon)}$$

wobei $c = 2(T_2 - T_1) + 2 + 5(h^0(T_2) - h^0(T_1)) + 2(h(T_2) - h(T_1))$ ist. Daher ist nach (1,7)

$$\|x(\sigma) - x^0(\sigma)\| \leqq \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + c\sqrt{(\varepsilon)} + \int_{T_1}^{\sigma} \|x(\tau) - x^0(\tau)\| \, \mathrm{d}h(\tau),$$

woher nach dem Lemma 2,3 von [5] die Ungleichung

$$\|x(\sigma) - x^0(\sigma)\| \leqq (\|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + c\sqrt{\varepsilon}) \exp(h(\sigma) - h(T_1))$$

für jedes $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$ folgt. Wenn wir da $C_1 = \exp(h(T_2) - h(T_1))$ und $C_2 = cC_1$ legen, bekommen wir die Ungleichung (1,6).

Bemerkung 1,1. Der eben bewiesene Satz ist eine Aussage über die stetige Abhängigkeit von einem Parameter für verallgemeinerte Differentialgleichungen, deren rechte Seiten zu Klassen der Form $\mathscr{F}(G, h)$ gehören. Der Satz 1,1 ist allgemeiner als der Satz 3,1 von [5], der über dieselbe Frage handelt. Die Ungleichung (1,6) wird nur für kleine Werte von $\varepsilon > 0$ benützt, sodass die Voraussetzung $\varepsilon \leqq 1$ nicht einschränkend für unsere Untersuchungen ist. Übrigens ist es möglich für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Ungleichung der Form (1,6) herzuleiten, wobei deren rechte Seite dann noch ein Zusatzglied der Form $C_3 \,.\, \varepsilon$ enthalten möchte. (Unsere Voraussetzung ist also nur wegen der Einfachheit der Abschätzung in (1,6) gemacht worden.) Ferner bemerken wir noch, dass wenn speziell $h(t) = Kt$, $h^0(t) = K^0 t$ sein wird, dann ist $C_1 = e^{K(T_2 - T_1)}$, $C_2 = [2 + (2 + 5K^0 + 2K)(T_2 - T_1)] C_1$ und die Konstanten C_1, C_2 vom Satz 1,1 hängen in diesem Fall nur von der Länge $T_2 - T_1$ des untersuchten Intervalles $\langle T_1, T_2 \rangle$ ab.

Folgerung 1,1. *Sei h, h^0 gegeben. Wenn die Voraussetzungen des Satzes* 1,1 *erfüllt sind, dann gibt es zu jedem $\eta > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für $\|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| < \delta$, $0 < \varepsilon < \delta$ die Ungleichung*

$$\|x(\sigma) - x^0(\sigma)\| < \eta \tag{1,10}$$

für alle $\sigma \in \langle T_1, T_2 \rangle$ gelten wird.

Der Beweis kommt unmittelbar von (1,6).

Bemerkung 1,2. Von der Folgerung 1,1 kann man unmittelbar (so wie im Satz 3,2 von [5]) einen Satz vom Bogoljubov-Krylovschen Typ für die untersuchten Gleichungen herleiten.

2. DIE KLASSE $\mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$

Sei $M \subset E_n$ eine offene Menge und $G = M \times (-\infty, \infty) \subset E_{n+1}$. Für jede ganze Zahl k sei eine Funktion $\varphi_k(x) : M \to E_1$ gegeben, sodass

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| \leqq L\|x - y\| \tag{2,1}$$

für $x, y \in M$ gilt, wobei $L \geqq 0$ eine Konstante ist. Weiter gelte

$$\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) \geqq \delta > 0 \tag{2,2}$$

für alle $x \in M$ und alle ganze k, wobei δ eine feste Konstante ist. Sei weiter ebenfalls für alle ganze k eine Vektorfunktion $\Phi_k(x) : M \to E_n$ so gegeben, dass

$$\|\Phi_k(x) - \Phi_k(y)\| \leqq \omega_k(\|x - y\|) \tag{2,3}$$

für alle $x, y \in M$, k ganz gilt, wobei $\omega_k(r) \geqq 0$ für $r \geqq 0$ definiert ist, $\omega_k(0) = 0$, ω_k ist im Punkte $r = 0$ von rechts stetig (ω_k ist der Stetigkeitsmodul für die Funktion Φ_k). Sei weiter $0 < A < 1$, A ist eine Konstante. Wir setzen voraus, dass

$$\|\Phi_k(x)\| < \alpha_k \frac{\delta}{L} \tag{2,4}$$

gilt, wobei $0 \leqq \alpha_k < A$ eine Konstante ist und L, bzw. δ sind die Konstanten von (2,1), bzw. (2,2).

Definieren wir noch die Mengen

$$\begin{aligned} G_k &= \{(x, t) \in G;\ x \in M,\ \varphi_{k-1}(x) < t < \varphi_k(x)\}\,, \\ P_k &= \{(x, t) \in G;\ x \in M,\ t = \varphi_k(x)\} \end{aligned} \tag{2,5}$$

und setzen voraus, dass

$$(x + \Phi_k(x), \varphi_k(x)) \in G_{k+1} \cup P_k \tag{2,6}$$

für alle $x \in M$ und ganze k ist.

Sei nun $s(x, t) : G \to E_1$ folgendermassen definiert: $s(x, t) = k$, wenn $x \in M$, $\varphi_k(x) < t \leqq \varphi_{k+1}(x)$ ist. Wählen wir für jedes $x \in M$ beliebig eine ganze Zahl l_x und definieren

$$\tilde{F}(x, t) = \sum_{i=l_x}^{s(x,t)} \Phi_i(x)\,, \tag{2.7}$$

wobei wir $\sum_{i=N_1}^{N_2} = -\sum_{i=N_2}^{N_1}$ legen, wenn für die ganze Zahlen N_1, N_2 die Ungleichung $N_1 > N_2$ gilt.

Sein nun K eine positive Konstante und legen wir $h(t) = Kt$ für $t \in E_1$. Bezeichnen wir die Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, h)$ für diese Funktion mit $\mathscr{F}(G, K)$ (vgl. Absatz 1.). Für $\hat{F}(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$ gilt also

$$\|\Delta_t^{t_2 - t_1} \hat{F}(x, t_1)\| \leqq K|t_2 - t_1| \tag{2,8}$$

für alle $(x, t_i) \in G$, $i = 1, 2$ und

$$\|\Delta_t^{t_2 - t_1} \Delta_x^y \hat{F}(z, t_1)\| \leqq K\|y\|\, |t_2 - t_1| \tag{2,9}$$

für alle $(z, t_i), (z + y, t_i) \in G$, $i = 1, 2$.

Für gegebenes K und für ein System $\{\varphi_k, \Phi_k\}$ der oben beschriebenen Abbildungen definieren wir die Klasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ von Funktionen $F(x, t) : G \to E_n$ folgenderweise:

Die Funktion $F(x, t) : G \to E_n$ gehört zu der Klasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$, wenn die Funktion $\hat{F}(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t)$ zu der Klasse $\mathscr{F}(G, K)$ gehört, wobei $\tilde{F}(x, t)$ die Funktion von (2,7) ist, d. h. es ist

$$(2,10) \quad \mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\}) = \{F(x, t) : G \to E_n,\ F(x, t) = \tilde{F}(x, t) + \hat{F}(x, t)\,, \\ \text{wobei } \tilde{F}(x, t) \text{ von (2,7) und } \hat{F}(x, t) \in \mathscr{F}(G, K) \text{ ist}\}\,.$$

Die Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ fällt mit der in [6] definierten Funktionenklasse $\mathscr{F}^*(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ (und also nach dem Ergebnis von [6] auch mit der Klasse $\mathscr{F}(G, h, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ von [6]) für $h(t) = Kt$ zusammen (vgl. (4,14) in [6]).

Für unsere weitere Untersuchungen wird noch vorausgesetzt, dass die Ungleichung

$$(2,11) \qquad 0 \leqq KL < 1$$

gelten wird, wobei L die Konstante von (2,1) und K die Konstante von der Definition der Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ ist. Diese Voraussetzung sicher insbesondere, dass die Voraussetzung (V 2) von [6] erfüllt ist (vgl. den Absatz 1 in [6], wo wir dieses gezeigt haben).

Die obigen Voraussetzungen sichern, dass alle, in [6] verlangten, Bedingungen für die Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ erfüllt werden. Man kann also die Ergebnisse von [6] für die Untersuchungen in dieser Arbeit verwenden. Es werden besonders die Ergebnisse vom Absatz 4 in [6] angewandt. Die stärkeren Voraussetzungen, welche wir da machten sichern weitere Eigenschaften der Lösungen von verallgemeinerten Differentialgleichungen, deren rechte Seite zu der Klasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ gehört und ermöglichen so eine tiefere Analyse der Lösungen.

3. LÖSUNGEN DER GLEICHUNG $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau = DF(x, t)$

Eine Lösung der Gleichung

$$(3,1) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x, t)$$

wird üblicherweise mit Hilfe des Kurzweilschen Integrales definiert (vgl. Definition 2,1,1 in [1]). Den Voraussetzungen vom Absatz 2 nach gilt für die Lösungen von (3,1) mit $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ der lokale Existenzsatz (vgl. Satz 4,2 in [6]) und der Eindeutigkeitssatz für zunehmende Werte der unabhängigen Variablen (vgl. Satz 4,3 in [6]). Die lokale Existenz und Eindeutigkeit gelten in dieser Form auch für verallgemeinerte Differentialgleichungen, deren rechte Seite zu der Klasse $\mathscr{F}(G, K)$ gehört (vgl. [2], [5]).

Lemma 3,1. *Sei $F(x, t) : G \to E_n$, sodass für die Gleichung (3,1) die lokale Existenz und Eindeutigkeit für zunehmende Werte der unabhängigen Variablen für alle Anfangswerte $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G$ gesichert ist. Sei $(\tilde{x}, t) \in G$ und sei T das Supremum aller derartigen Zahlen t, für welche in $\langle \tilde{t}, t \rangle$ eine Lösung $x(\tau)$ der Gleichung (3,1) so existiert, dass $x(\tilde{t}) = \tilde{x}$ ist. Dann existiert im Intervall $\langle \tilde{t}, T)$ eine Lösung $x(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ der Gleichung (3,1), für welche $x(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{x}$ ist.*

In [6] wurde dieses Lemma für einen Spezialfall bewiesen (vgl. Lemma 3,4 in [6]); der Beweis von [6] kann ohne einer Änderung für unseren Fall benützt werden.

Definition 3,1. *Wenn die Voraussetzungen vom Lemma 3,1 erfüllt sind, dann nennen wir die im Lemma 3,1 bestimmte Lösung $x(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ mit dem Definitionsintervall $\langle \tilde{t}, T)$ eine Maximallösung der Gleichung (3,1), welche durch den Punkt $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G$ bestimmt ist.*

Bemerkung 3,1. Wir benützen da die passendere Benennung Maximallösung anstatt der in [6] eingeführten und benützten „Globallösung".

Lemma 3,2. *Sei $\hat{F}(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$ und $y(\tau) = y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ sei die durch den Punkt $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G$ bestimmte Maximallösung der Gleichung*

$$\frac{dx}{d\tau} = D\hat{F}(x, t) \tag{3,2}$$

mit dem Definitionsintervall $\langle \tilde{t}, T)$. Wenn $t_k < T$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim_{k \to \infty} t_k = T$, ist, dann hat die Punktfolge $\{(y(t_k), t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ in G keinen Häufungspunkt.

Bemerkung 3,2. Wenn $y(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \to E_n$ eine Lösung der Gleichung (3,2) ist, wo $\hat{F}(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$, dann gilt für alle $\tau_1, \tau_2 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ die Ungleichung

$$\|y(\tau_2) - y(\tau_1)\| \leqq K|\tau_2 - \tau_1| \tag{3,3}$$

(vgl. (2,10) im Lemma 2,4 von [5]).

B e w e i s vom Lemma 3,2. Setzen wir voraus, dass die Folge $\{(y(t_k), t_k)\}$ in G einen Häufungspunkt doch besitzt. Dann gibt es eine Teilfolge (diese bezeichnen wir wieder nur mit $\{(y(t_k), t_k)\}$), sodass $\lim_{k \to \infty} y(t_k) = \bar{x} \in E_n$ ist und dabei ist $(\bar{x}, T) \in G$. Da G eine offene Menge ist, gibt es Zahlen $a > 0$ und $\sigma > 0$, sodass

$$R_1 = \{(x, t) \in E_{n+1};\ \|x - \bar{x}\| \leqq 2a,\ |t - T| \leqq 2\sigma\} \subset G$$

ist. Wenn man die Zahlen a oder σ verkleinert, kann man immer erreichen, dass $a = K\sigma$ gelten wird. Da $\lim_{k \to \infty} y(t_k) = \bar{x}$ und $\lim_{k \to \infty} t_k = T$ ist, gibt es eine ganze Zahl k_0 sodass

$$R_2 = \{(x, t);\ \|x - y(t_{k_0})\| < a,\ |t - t_{k_0}| < \sigma\} \subset R_1 \subset G$$

und $\|y(t_{k_0}) - \tilde{x}\| < a$, $T < t_{k_0} + \sigma$ gilt. Nach dem lokalen Existenzsatz für die Lösungen der Gleichung (3,2) (vgl. [2]) hat die Zahl $\sigma > 0$, welche oben bestimmt ist, die Eigenschaft, dass im Intervall $\langle t_{k_0}, t_{k_0} + \sigma \rangle$ eine Lösung $\hat{y}(\tau)$ der Gleichung (3,2) so existiert, dass $\hat{y}(t_{k_0}) = y(t_{k_0})$ gilt. Legen wir nun $z(\tau) = y(\tau)$ für $\tau \in \langle \tilde{t}, t_k \rangle$, $z(\tau) = \hat{y}(\tau)$ für $\tau \in \langle t_{k_0}, t_{k_0} + \sigma \rangle$. Die Funktion $z(\tau)$ ist offenbar eine Lösung der Gleichung (3,2) in $\langle \tilde{t}, t_{k_0} + \sigma \rangle$ für welche $z(\tilde{t}) = \tilde{x}$ ist. Nachdem aber $T < t_{k_0} + \sigma$ ist, bekommen wir einen Widerspruch damit, dass $y(\tau)$ eine Maximallösung der Gleichung (3,2) ist.

Lemma 3,3. *Sei $\hat{F}(x, t) \in \mathcal{F}(G, K)$, $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G$ und sei $y(\tau) = y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ die Maximallösung der Gleichung (3,2) in $\langle \tilde{t}, T)$ definiert. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $T' < T$, sodass für $\tau \in (T', T)$ entweder $\varrho((y(\tau), \tau), \partial G) < \varepsilon$ oder $\tau > 1/\varepsilon$ gilt. ϱ bedeutet da die euklidische Metrik in E_{n+1} und ∂G ist die Gränze der Menge G in E_{n+1}.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass die Behauptung nicht gilt, d. h. es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass man das zugehörige T' nicht finden kann. Wählen wir also eine Folge $t_1 < t_2 < \ldots$, $\lim_{k \to \infty} t_k = T$ und sei $\tau_k \in (t_k, T)$ soeine Zahl, dass für jedes natürliche k die Beziehungen $\varrho((y(\tau_k), \tau_k), \partial G) \geqq \varepsilon_0$ und $\tau_k \leqq 1/\varepsilon_0$ zugleich gelten. Da nach (3,3) die Ungleichung $\|y(\tau) - \tilde{x}\| \leqq K|\tau - \tilde{t}|$ gilt, ist

$$\|y(\tau_k)\| \leqq K(\tau_k - \tilde{t}) + \|\tilde{x}\| \leqq K \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} + K|\tilde{t}| + \|\tilde{x}\| \,.$$

Die Punktfolge $\{(y(\tau_k), \tau_k)\}$ ist in E_{n+1} offenbar beschränkt und hat also in E_{n+1} einen Häufungspunkt. Nach den angeführten Bedingungen liegt dieser Häufungspunkt nicht in ∂G und so muss also dieser in G liegen. Offenbar ist auch $\lim_{k \to \infty} \tau_k = T$ und wir bekommen einen Widerspruch mit dem Lemma 3,2.

Bemerkung 3,3. Nach dem Lemma 3,3 ist das Definitionsintervall $\langle \tilde{t}, T)$ einer Maximallösung $y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ der Gleichung (3,2) entweder der Form $\langle \tilde{t}, +\infty)$ oder ist $T < +\infty$ und in diesem Falle ist dann $(y(T - \tilde{x}, \tilde{t}), T) \notin G$.

Lemma 3,4. *Sei $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G$; $y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ sei die Maximallösung der Gleichung (3,2) in $\langle \tilde{t}, T)$ definiert. Sei l soeine ganze Zahl, dass $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in P_{l-1} \cup G_l$ ist. Dann gilt*

$$(y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t}), \tau) \notin \bigcup_{k=-\infty}^{l-1} [G_k \cup P_k] \tag{3,4}$$

für alle $\tau \in (\tilde{t}, T)$ (für P_k, G_k siehe (2,5)).

Beweis. Sei $\tau \in \langle \tilde{t}, T)$. Dann ist, wenn man kurz $y(\tau) = y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ schreibt,

$$\begin{aligned} \varphi_{l-1}(y(\tau)) - \tau &= \varphi_{l-1}(y(\tau)) - \varphi_{l-1}(\tilde{x}) + \varphi_{l-1}(\tilde{x}) - \tilde{t} + \tilde{t} - \tau \leqq \\ &\leqq L\|y(\tau) - \tilde{x}\| + \varphi_{l-1}(\tilde{x}) - \tilde{t} + \tilde{t} - \tau \leqq \\ &\leqq LK(\tau - \tilde{t}) - (\tau - \tilde{t}) + \varphi_{l-1}(\tilde{x}) - \tilde{t} = (LK - 1)(\tau - \tilde{t}) + \varphi_{l-1}(\tilde{x}) - \tilde{t} \leqq 0 \,. \end{aligned}$$

Dabei benützten wir (2,1), (3,3) und (2,11). In dieser letzten Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen nur in dem Fall, wenn $\tau = \tilde{t}$, $\varphi_{l-1}(\tilde{x}) = \tilde{t}$ d. h. wenn $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in P_{l-1}$ ist. Sonst ist die Ungleichung scharf und für $\tau \in (\tilde{t}, T)$ gilt also $\varphi_{l-1}(y(\tau)) < \tau$. Nach (2,2) und nach der Definition der Mengen P_k und G_k von (2,5) gilt also offenbar (3,4).

Lemma 3,5. *Sei $y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ die Maximallösung der Gleichung (3,2), welche vom Punkt $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G$ ausgeht im Intervall $\langle \tilde{t}, T)$ bestimmt. Sei l soeine ganze Zahl, dass $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in P_{l-1} \cup G_l$ sit. Dann ist entweder*

a) *$(y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t}), \tau) \in G_l$ für alle $\tau \in (\tilde{t}, T)$ oder*

b) *es existiert ein $t_l \in \langle \tilde{t}, T)$, sodass $(y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t}), \tau) \in G_l$ für $\tau \in (\tilde{t}, t_l)$ und $(y(t_l, \tilde{x}, \tilde{t}), t_l) \in P_l$ ist.*

Der Beweis folgt sofort daher, dass nach (3,3) $y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ in $\langle \tilde{t}, T)$ stetig ist und (3,4) gilt.

Lemma 3,6. *Sei $y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ die vom Punkte $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G$ ausgehende Maximallösung der Gleichung (3,2) mit dem Definitionsintervall $\langle \tilde{t}, T)$. Sei l soeine ganze Zahl, dass $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in P_{l-1} \cup G_l$ ist. Dann, wenn der Fall a) vom Lemma 3,5 vorkommt, ist notwendig $T < +\infty$.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass $T = +\infty$ wäre und schreiben kurz $y(\tau) = y(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$. Nach a) vom Lemma 3,5 und nach (2,5) ist $\varphi_l(y(\tau)) > \tau$ für alle $\tau \in \langle \tilde{t}, T)$. Nach (2,1) und (3,3) ist (ähnlich wie im Beweis vom Lemma 3,4)

$$0 < \varphi_l(y(\tau)) - \tau = \varphi_l(y(\tau)) - \varphi_l(\tilde{x}) + \varphi_l(\tilde{x}) - \tilde{t} + \tilde{t} - \tau \leqq$$
$$\leqq (LK - 1)(\tau - \tilde{t}) + \varphi_l(\tilde{x}) - \tilde{t}\,.$$

Da aber $\varphi_l(\tilde{x}) - \tilde{t} < +\infty$ und nach (2,11) auch $(LK - 1) < 0$ ist, widerspricht dieses der Voraussetzung, dass der Fall a) vom Lemma 3,5 entstehen soll.

Die Prozedur $\mathscr{P}$. Sei $(y_{j-1}, t_{j-1}) \in P_{j-1} \cup G_j$. Sei $y(\tau, y_{j-1}, t_{j-1})$ die Maximallösung der Gleichung (3,2), welche von dem Punkt (y_{j-1}, t_{j-1}) ausgeht, mit dem Definitionsintervall $\langle t_{j-1}, T_{j-1})$. Nach dem Lemma 3,4 gilt

$$(y(\tau, y_{j-1}, t_{j-1}), \tau) \notin \bigcup_{k=-\infty}^{j-1} [G_k \cup P_k] \tag{3,5}$$

für $\tau \in (t_{j-1}, T_{j-1})$. Nach dem Lemma 3,5 ist entweder

(3,6) a) $\quad (y(\tau, y_{j-1}, t_{j-1}), \tau) \in G_j$ für alle $\tau \in (t_{j-1}, T_{j-1})$

oder

(3,6) b) $\quad$ es existiert $t_j \in (t_{j-1}, T_{j-1})$, sodass $(y(\tau, y_{j-1}, t_{j-1}), \tau) \in G_j$ für $\tau \in (t_{j-1}, t_j)$ und $(y(t_j, y_{j-1}, t_{j-1}), t_j) \in P_j$ ist.

Wenn (3,6) a) vorkommt, beende man die Prozedur. Wenn (3,6) b) entsteht, definiere man

$$y_j = y(t_j, y_{j-1}, t_{j-1}) + \Phi_j(y(t_j, y_{j-1}, t_{j-1})) . \tag{3,7}$$

Nach (2,5) ist $\varphi_j(y(t_j, y_{j-1}, t_{j-1})) = t_j$ und der Voraussetzung (2,6) zufolge gilt

$$(y_j, t_j) \in P_j \cup G_{j+1} . \tag{3,8}$$

Für den Punkt (y_j, t_j) kann man die Prozedur fortsetzen und (so wie für (y_{j-1}, t_{j-1})) die Maximallösung $y(\tau, y_j, t_j)$ der Gleichung (3,2) mit dem Definitionsintervall $\langle t_j, T_j)$ bestimmen. Für $y(\tau, y_j, t_j)$ kann man dann wieder entscheiden ob der Fall a) oder b) vom Lemma 3,5 entsteht.

Bemerkung 3,4. Die oben beschriebene Prozedur $\mathscr{P}$ ermöglicht so zu jedem $(y_{j-1}, t_{j-1}) \in P_{j-1} \cup G_j$ eine Folge von Maximallösungen $y(\tau, y_k, t_k)$ der Gleichung (3,2) zu definieren, wobei man deren Definitionsintervalle mit $\langle t_k, T_k)$ bezeichnet. Diese Folge hat eine endliche Anzahl von Gliedern, wenn in irgendeinem Schritt der Prozedur $\mathscr{P}$ der Fall (3,6) a) entsteht. In diesem Falle wird das Definitionsintervall der letzten Maximallösung der Folge nach dem Lemma 3,6 endlich sein. Wenn in keinem Schritt der Prozedur $\mathscr{P}$ der Fall (3,6) a) vorkommt, dann liefert die Prozedur $\mathscr{P}$ eine unendliche Folge von Maximallösungen der Gleichung (3,2).

Lemma 3,7. *Sei* $(\tilde{y}_{j-1}, t_{j-1}) \in P_{j-1}$. *Lege man* $y_{j-1} = \tilde{y}_{j-1} + \Phi_{j-1}(\tilde{y}_{j-1})$. *Sei* $y(\tau, y_{j-1}, t_{j-1})$ *die vom Punkt* (y_{j-1}, t_{j-1}) *ausgehende Maximallösung der Gleichung* (3,2) *mit dem Definitionsintervall* $\langle t_{j-1}, T_{j-1})$, *sodass für diese der Fall* (3,6) b) *der Prozedur* $\mathscr{P}$ *vorkommt. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \delta(1 - \alpha_j)(1 + LK)^{-1} &\leqq t_j - t_{j-1} \leqq \\ &\leqq (A\delta + \varphi_j(\tilde{y}_{j-1}) - \varphi_{j-1}(\tilde{y}_{j-1}))(1 - LK)^{-1} . \end{aligned} \tag{3,9}$$

Dabei ist δ *die Konstante von* (2,2), L *die Konstante von* (2,1), α_j *und* A *die Konstanten von* (2,4), K *ist die Konstante, welche die Funktionenklasse* $\mathscr{F}(G, K)$, *zu der* $\hat{F}(x, t)$ *gehört, bestimmt und* t_j *ist in* (3,6) b) *bestimmt.*

Beweis. Nach den Voraussetzungen ist $t_j = \varphi_j(y(t_j, y_{j-1}, t_{j-1}))$. Nach (2,1) und (3,3) also ist

$$|t_j - \varphi_j(y_{j-1})| \leqq L\|y(t_j, y_{j-1}, t_{j-1}) - y_{j-1}\| \leqq LK|t_j - t_{j-1}| .$$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} t_j - t_{j-1} = t_j - \varphi_j(y_{j-1}) + \varphi_j(y_{j-1}) - t_j &\leqq \\ \leqq LK(t_j - t_{j-1}) + \varphi_j(y_{j-1}) - t_{j-1} \end{aligned}$$

und ebenfalls auch

$$-LK(t_j - t_{j-1}) + \varphi_j(y_{j-1}) - t_{j-1} \leqq t_j - t_{j-1}$$

d. h. es gelten die Ungleichungen

$$(3,10) \qquad (\varphi_j(y_{j-1}) - t_{j-1})(1 + LK)^{-1} \leqq t_j - t_{j-1} \leqq \\ \leqq (\varphi_j(y_{j-1}) - t_{j-1})(1 - LK)^{-1} .$$

Ferner – nachdem $t_{j-1} = \varphi_{j-1}(\tilde{y}_{j-1})$ ist – gilt nach (2,1), (2,2), (2,4) und der Ungleichung $0 \leqq \alpha < A < 1$ die Ungleichung

$$\varphi_j(y_{j-1}) - t_{j-1} = \varphi_j(\tilde{y}_{j-1} + \Phi_{j-1}(\tilde{y}_{j-1})) - \varphi_j(\tilde{y}_{j-1}) + \varphi_j(\tilde{y}_{j-1}) - \varphi_{j-1}(\tilde{y}_{j-1}) \geqq \\ \geqq \delta - L\|\Phi_j(\tilde{y}_{j-1})\| \geqq \delta - L \cdot \frac{\alpha_j \delta}{L} = \delta(1 - \alpha_j) > \delta(1 - A)$$

und soeben auch die Ungleichung

$$\varphi_j(y_{j-1}) - t_{j-1} \leqq L\|\Phi_{j-1}(\tilde{y}_{j-1})\| + \varphi_j(\tilde{y}_{j-1}) - \varphi_{j-1}(\tilde{y}_{j-1}) < \\ < A\delta + \varphi_j(\tilde{y}_{j-1}) - \varphi_{j-1}(\tilde{y}_{j-1}) .$$

Diese Ungleichungen liefern dann zusammen mit (3,10) die Ungleichungen (3,9).

Definition 3,2. *Sei $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G$ und l soeine ganze Zahl, dass $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in P_{l-1} \cup G_l$ ist. Sei $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$. Legen wir*

$$y_{l-1} = \tilde{x} + F(\tilde{x}, \tilde{t}+) - F(\tilde{x}, \tilde{t}) , \quad t_{l-1} = \tilde{t} .$$

Für $k \geqq l - 1$ und den Punkt $(y_{l-1}, t_{l-1}) \in P_{l-1} \cup G_l$ (vgl. (2,6)) bestimmen wir die Folge von Maximallösungen $y(\tau, y_k, t_k)$ der Gleichung (3,2) mittels der Prozedur $\mathscr{P}$. Definieren wir für $\tau \geqq \tilde{t} = t_{l-1}$ die Funktion $z(\tau)$ folgenderweise:

1) $z(\tilde{t}) = \tilde{x}$,

2) $z(\tau) = y(\tau, y_j, t_j)$ *für* $\tau \in (t_j, t_{j+1}\rangle$ *und jede ganze Zahl* $j \geqq l - 1$, *wenn für kein* $j \geqq l - 1$ *der Fall* (3,6) a) *von der Prozedur* $\mathscr{P}$ *vorkommt,*

3) $z(\tau) = y(\tau, y_j, t_j)$ *für* $\tau \in (t_j, t_{j+1}\rangle$ *und jede ganze Zahl* j, $l - 1 \leqq j \leqq k - 1$, *wenn für soein* j *der Fall* (3,6) a) *in der Prozedur* $\mathscr{P}$ *nicht ensteht und* $z(\tau) = y(\tau, y_k, t_k)$ *für* $\tau \in (t_k, T_k)$, *wenn für* $j = k + 1$ (3,6) a) *gilt.*

Bemerkung 3,5. Wenn man $\langle \tilde{t}, T)$ das Definitionsintervall der Funktion $z(\tau)$ von der Definition (3,2) bezeichnet, dann ist

$$\langle \tilde{t}, T) = \{\tilde{t}\} \cup \bigcup_{j=l-1}^{\infty} (t_j, t_{j+1}\rangle ,$$

wenn $z(\tau)$ durch 1) und 2) in der Definition 3,2 bestimmt ist. Nach (3,9) vom Lemma 3,7 ist offenbar $t_{j+1} - t_j > c$, wobei $c = \delta(1 - A)(1 + LK)^{-1} > 0$ eine, von j nicht abhängende, Zahl ist. Daher also ist offenbar $\langle \bar{t}, T) = \langle \bar{t}, +\infty)$ für diesen Fall. Wenn $z(\tau)$ durch 1) und 3) von der Definition 3,2 bestimmt ist, dann ist

$$\langle \bar{t}, T) = \{\bar{t}\} \cup \bigcup_{j=l-1}^{k-1} (t_j, t_{j+1}\rangle \cup (t_k, T_k) = \langle \bar{t}, T)$$

und nach dem Lemma 3,6 ist $T = T_k < +\infty$.

Lemma 3,8. *Sei $z(\tau)$ die in der Definition 3,2 bestimmte Funktion mit dem Definitionsintervall $\langle \bar{t}, T)$. Sei $\bar{t} \leqq \sigma_1 < \sigma_2 < T$, dann gilt*

$$(3,11) \qquad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(z(\tau), t) = \sum_{\substack{(z(t_j),t_j)\in P_j \\ t_j \in \langle \sigma_1, \sigma_2)}} \Phi_j(z(t_j)) = \sum_{\substack{(z(t_j),t_j)\in P_j \\ t_j \in \langle \sigma_1, \sigma_2)}} [z(t_j+) - z(t_j)]\,,$$

wobei $\tilde{F}(x, t) : G \to E_n$ in (2,7) bestimmt ist und t_j sind die in der Definition 3,2 auftretende Zahlen.

Beweis. Mit Rücksicht auf die Bestimmung des Intervalles $\langle \bar{t}, T)$ in der Bemerkung 3,5 können folgende Fälle vorkommen: es existieren ganze Zahlen j_1, j_2, $l - 1 \leqq j_1 \leqq j_2$, sodass $\sigma_i \in (t_{j_i}, t_{j_i+1}\rangle$, $i = 1, 2$ oder ist $\sigma_1 = t_{l-1} = \bar{t}$ und es existiert eine ganze Zahl j_2, $l - 1 \leqq j_2$, sodass $\sigma_2 \in (t_{j_2}, t_{j_2+1}\rangle$ ist. Wenn $z(\tau)$ mittels 1) und 3) von der Definition 3,2 bestimmt ist, dann können noch die folgenden Möglichkeiten vorkommen: es existiert eine ganze Zahl j_1, sodass $\sigma_1 \in (t_{j_1}, t_{j_1+1}\rangle$ und $\sigma_2 \in (t_k, T_k)$, oder $\sigma_1 = t_{l-1} = t$, $\sigma_2 \in (t_k, T_k)$, oder ist $\sigma_1, \sigma_2 \in (t_k, T_k)$.

Wir untersuchen den ersten dieser Fälle. Sei $j_1 < j_2$. Die Punkte $t_{j_1+1} < t_{j_1+2} < \ldots \ldots < t_{j_2-1}$ sind alle Punkte des Intervalles $\langle \sigma_1, \sigma_2)$, in welchen der Graph der Funktion $z(\tau)$ d. h. $\{(z(\tau), \tau); \tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2)\}$ eine der Flächen P_j schneidet und es gilt genau $(z(t_j), t_j) \in P_j$ für $j = j_1 + 1, j_1 + 2, \ldots, j_2 - 1$. Falls $j_1 = j_2$ ist, dann ist die Menge dieser Punkte leer. Definieren wir $M(t) = 0$ für $t \in \langle \sigma_1, t_{j_1+1}\rangle$, $M(t) = \sum_{j=j_1+1}^{m} \Phi_j(z(t_j))$ für $t \in (t_m, t_{m+1}\rangle$, $j_1 + 1 \leqq m \leqq j_2 - 2$, und $M(t) = \sum_{j=j_1+1}^{j_2} \Phi_j(z(t_j))$ für $t \in (t_{j_2}, \sigma_2\rangle$. Einfach kann man zeigen, dass für jedes $\tau_0 \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$ ein $\delta(\tau_0) > 0$ so existiert, dass für $\tau_0 - \delta(\tau_0) \leqq t \leqq \tau_0 + \delta(\tau_0)$ die Gleichung

$$\tilde{F}(z(\tau_0), t) - \tilde{F}(z(\tau_0), \tau_0) = M(t) - M(\tau_0)$$

gilt (ein ähnliches Verfahren wurde im Beweis des Hilfssatzes 2,1 von [6] benützt). Daher ergibt sich sofort $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(z(\tau), t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DM(t)$ nach dem Lemma 1,3,1 in [1]. Nach der Definition des da benützten Integrales von [1] ist aber $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DM(t) = M(\sigma_2) - M(\sigma_1)$, weil $M(t)$ von der Variablen τ nicht abhängt. Daher, wie die Funktion $M(t)$ definiert wurde, ist

$$M(\sigma_2) - M(\sigma_1) = \sum_{j=j_1+1}^{j_2} \Phi_j(z(t_j)) = \sum_{\substack{(z(t_j),t_j)\in P_j \\ t_j \in \langle \sigma_1, \sigma_2)}} \Phi_j(z(t_j))\,.$$

Von der Definition 3,2 ist $z(t_j+) = z(t_j) + \Phi_j(z(t_j))$ und wir bekommen so (3,11) für den untersuchten Fall. Wenn $j_1 = j_2$ ist, dann ist $M(\sigma_2) - M(\sigma_1) = 0$ und so auch $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(z(\tau), t) = 0$. Die übrigen Fälle können gleicherweise behandelt werden.

Lemma 3,9. *Die Funktion $z(\tau)$ von der Definition 3,2 ist eine Maximallösung der Gleichung (3,1), welche durch den Ausgangspunkt $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G$ bestimmt ist. Das Definitionsintervall $\langle \tilde{t}, T)$ von $z(\tau)$ ist in der Bemerkung 3,5 beschrieben.*

Beweis. Es seien $t_j, j \geqq l - 1$ die in der Definition 3,2 auftretende reelle Zahlen. Nach dem Satz 1,3,6 von [1] und nachdem in $\langle t_j, t_{j+1} \rangle$ die Funktion $z(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (3,2) ist, gilt

$$(3,12) \qquad \int_{t_j}^{t_{j+1}} D\hat{F}(z(\tau), t) = z(t_{j+1}) - z(t_j+) = z(t_{j+1}) - z(t_j) - \Phi_j(z(t_j))$$

für $j \geqq l + 1$ (für $j = l$ gilt diese Formel, wenn $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in P_{l-1}$ ist; wenn $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G_l$ ist, dann ist $\int_{t_{l-1}}^{t_l} D\hat{F}(z(\tau), t) = z(t_l) - z(t_{l-1})$). Sei nun $\tilde{t} \leqq \sigma_1 < \sigma_2 < T$. Für σ_1, σ_2 können alle im Beweis vom Lemma 3,8 genannte Fälle entstehen. Wir untersuchen wieder nur den ersten Fall, d. h. den Fall, wenn ganze Zahlen j_1, j_2 $l - 1 \leqq j_1 \leqq j_2$ so existieren, dass $\sigma_i \in (t_{j_i}, t_{j_i+1} \rangle$, $i = 1, 2$ ist. Wenn man in Betracht nimmt, dass $\hat{F}(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t)$ ist, wo $\tilde{F}(x, t)$ in (2,7) bestimmt wurde, dann gilt nach (3,11) und (3,12)

$$\int_{\sigma_2}^{\sigma_1} D\hat{F}(z(\tau), t) = \int_{\sigma_1}^{t_{j_1+1}} D\hat{F}(z(\tau), t) + \sum_{j=j_1+1}^{j_2-1} \int_{t_j}^{t_j+1} D\hat{F}(z(\tau), t) + \int_{t_{j_2}}^{\sigma_2} D\hat{F}(z(\tau), t) =$$

$$= z(t_{j_1+1}) - z(\sigma_1) + \sum_{j=j_1+1}^{j_2-1} [z(t_{j+1}) - z(t_j+)] + z(\sigma_2) - z(t_{j_2}+) =$$

$$= z(\sigma_2) - z(\sigma_1) - \sum_{j=j_1+1}^{j_2} [z(t_j+) - z(t_j)] =$$

$$= z(\sigma_2) - z(\sigma_1) - \sum_{j=j_1+1}^{j_2} \Phi_j(z(t_j)) = z(\sigma_2) - z(\sigma_1) - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(z(\tau), t) .$$

Ist dabei $j_1 = j_2$, dann gilt $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\hat{F}(z(\tau), t) = z(\sigma_2) - z(\sigma_1)$ und $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(z(\tau), t) = 0$. Daher ergibt sich dann für beide mögliche Fälle $j_1 < j_2$ und $j_1 = j_2$ die Gleichung

$$z(\sigma_2) - z(\sigma_1) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\tilde{F}(z(\tau), t), t) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} D\hat{F}(z(\tau), t) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(z(\tau). t) .$$

Diese Gleichung kann man ebenso auch für die übrigen Fälle der Lage von σ_1, σ_2 in $\langle \tilde{t}, T)$ beweisen; $z(\tau)$ ist also eine Lösung der Gleichung (3,1) im Intervall $\langle \tilde{t}, T)$.

Wenn $z(\tau)$ mittels 1) und 2) in der Definition 3,2 bestimmt ist, dann ist nach der Bemerkung 3,5 $\langle \tilde{t}, T) = \langle \tilde{t}, +\infty)$ und $z(\tau)$ ist offenbar eine Maximallösung der

Gleichung (3,1). Wenn $z(\tau)$ durch 1) und 3) in der Definition 3,2 bestimmt ist, dann ist $T < +\infty$ und nach der Bemerkung 3,3 gilt $(z(T-), T) = (y(T_k-, y_k, t_k), T_k) \notin G$. Wenn $z(\tau)$ nicht eine Maximallösung der Gleichung 3,1 wäre, dann könnte man ein $\eta > 0$ so finden, dass man in $\langle \tilde{t}, T + \eta \rangle$ eine Lösung $x(\tau)$ der Gleichung (3,1) definieren könnte, wobei $x(\tilde{t}) = \tilde{x}$ wäre. Mit Rücksicht auf die Eindeutigkeit der Lösungen für zunehmende Werte der Variablen τ (vgl. Satz 4,3 in [6]) und der Stetigkeit von links der Lösungen von (3,1) wäre dann $(x(T), T) = (z(T-), T) \in G$ und dieses liefert einen Widerspruch.

Der Eindeutigkeitssatz für Lösungen der Gleichung (3,1), welcher für zunehmende Werte der unabhängigen Variablen gilt (Satz 4,3 in [6]) sichert nun, dass für jede Lösung $x(\tau)$ der Gleichung (3,1), welche im Intervall $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ definiert ist, die Gleichung $x(\tau) = x(\tau, x(\sigma_1), \sigma_1)$ für alle $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ gilt, wobei $x(\tau, x(\sigma_1), \sigma_1)$ die durch den Ausgangspunkt $(x(\sigma_1), \sigma_1)$ bestimmte Maximallösung der Gleichung (3,1) mit dem Definitionsintervall $\langle \sigma_1, T)$ ist. Der Eindeutigkeit wegen werden im Lemma 3,9 alle Maximallösungen der Gleichung (3,1) beschrieben. Wir bekommen so vom Lemma 3,9 und von der Definition 3,2 der Funktion $z(\tau)$ eine genaue Information über das Verhalten aller Lösungen der Gleichung (3,1). Wir wollen nun alle diese Erkenntnisse zusammenfassen:

Satz 3,1. *Es sei $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ und sei $x(\tau) : \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \to E_n$ eine Lösung der Gleichung (3,1) im Intervall $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < +\infty$. Nach (2,2) und (2,5) gibt es ganze Zahlen l_1, l_2, sodass $(x(\sigma_1), \sigma_1) \in G_{l_1} \cup P_{l_1}$ und $(x(\sigma_2), \sigma_2) \in G_{l_2} \cup P_{l_2}$ ist und man kann Folgendes behaupten:*

(i) *es gilt $l_1 \leqq l_2$,*

(ii) *für jedes ganze $l : l_1 \leqq l < l_2$ existiert genau eine Zahl $t_l \in \langle \sigma_1, \sigma_2)$, sodass $(x(t_l), t_l) \in P_l$ ist und es gilt $t_{l_1} < t_{l_1+1} < \ldots < t_{l_2-1}$,*

(iii) *für die Zahlen t_l von (ii) ist $(x(\tau), \tau) \in G_{l_1}$ für $\tau \in \langle \sigma_1, t_{l_1})$, $(x(\tau), \tau) \in G_l$ für $\tau \in (t_{l-1}, t_l)$, $l_1 < l < l_2$ und $(x(\tau), \tau) \in G_{l_2}$ für $\tau \in (t_{l_2-1}, \sigma_2)$,*

(iv) *in den Intervallen $\langle \sigma_1, t_{l_1} \rangle, (t_{l-1}, t_l \rangle$, $l = l_1 + 1, \ldots, l_2 - 1$ und $(t_{l_2-1}, \sigma_2 \rangle$ ist $x(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (3,2) und für $\tau_1, \tau_2 \in \langle \sigma_1, t_{l_1} \rangle$ bzw. $\tau_1, \tau_2 \in (t_{l-1}, t_l \rangle$, $l = l_1 + 1, \ldots, l_2 - 1$ oder $\tau_1, \tau_2 \in (t_{l_2-1}, \sigma_2 \rangle$ gilt die Ungleichung*

$$\|x(\tau_2) - x(\tau_1)\| \leqq K|\tau_2 - \tau_1| .$$

(v) *für die Zahlen t_l, $l = l_1 + 1, l_1 + 2, \ldots, l_2 - 1$ von (ii) gilt*

$$x(t_l+) - x(t_l) = \Phi_l(x(t_l)) ,$$

(vi) *für die Zahlen t_l, $l = l_1 + 1, \ldots, l_2 - 1$ von (ii) gilt*

$$\delta(1 - A)(1 + LK)^{-1} \leqq t_l - t_{l-1} \leqq$$
$$\leqq (A\delta + \varphi_l(x(t_{l-1})) - \varphi_{l-1}(x(t_{l-1})))(1 - LK)^{-1} ,$$

wobei $\delta > 0$ die Konstante von (2,2), L die Konstante von (2,1) und A die Konstante von (2,4) ist.

Beweis. (i), (ii), (iii), (v) folgen unmittelbar von der Definition 3,2. (iv) folgt von der Definition 3,2 und der Ungleichung 3,3. (vi) ist der Inhalt vom Lemma 3,7.

Bemerkung 3,6. Vom Satz 3,1 ist es leicht zu sehen, dass jede Lösung der Gleichung (3,1) man von Lösungen der Gleichung (3,2) zusammenstellen kann, dass eine Lösung der Gleichung (3,1) in jedem endlichen Intervall nur endlich viele Unstetigkeiten haben kann und dass diese da endlicher Variation sein muss.

4. DIE STETIGE ABHÄNGIGKEIT VON EINEM PARAMETER

Wir werden in diesem Absatz die verallgemeinerte Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF^0(x, t), \quad F^0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0, \{\varphi_k^0, \Phi_k^0\}) \tag{4,1}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x, t), \quad F(x, t) \in \mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\}) \tag{4,2}$$

untersuchen. Die Funktionenklassen $\mathscr{F}(G, K^0, \{\varphi_k^0, \Phi_k^0\})$ und $\mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ erfüllen dabei die Voraussetzungen vom Absatz 2. Wir werden voraussetzen, dass (2,1), (2,2) und (2,4) mit denselben Konstanten L, δ und A für beide Klassen erfüllt ist. Alle andere Grössen, welche zu der Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, K^0, \{\varphi_k^0, \Phi_k^0\})$ gehören, werden mit dem Index 0 rechts oben gekennzeichnet (z. B. G_k^0, P_k^0, $\tilde{F}^0(x, t)$ usw.). Für $F^0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0, \{\varphi_k^0, \Phi_k^0\})$ wird $F^0(x, t) = \tilde{F}^0(x, t) + \hat{F}(x, t)$ sein, wobei $\tilde{F}^0(x, t)$ für das System $\{\varphi_k^0, \Phi_k^0\}$ nach (2,7) definiert wird und wobei $\hat{F}^0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0)$ ist.

Voraussetzung 4,1. Sei $0 < \varepsilon \leqq 1$. Sei $I \subset (-\infty, \infty)$ ein Intervall. Für $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k^0, \Phi_k^0\})$ und $F^0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0, \{\varphi_k^0, \Phi_k^0\})$ gelte

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k^0(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad x \in M\,, \quad k \text{ ganz}\,, \tag{4,3}$$

$$\|\Phi_k(x) - \Phi_k^0(x)\| < \varepsilon \quad \text{für} \quad x \in M\,, \quad k \text{ ganz}\,, \tag{4,4}$$

$$\|\Delta_t^\vartheta[\hat{F}(x, t) - \hat{F}^0(x, t)]\| < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta \leqq 1\,, \ (x, t), (x, t + \vartheta) \in M \times I\,, \tag{4,5}$$

wenn $\hat{F}(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t)$ und $\hat{F}^0(x, t) = F^0(x, t) - \tilde{F}^0(x, t)$ ist.

Bemerkung 4,1. Es seien G_l bzw. G_l^0 die in (2,5) definierten Mengen für die Klasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ bzw. $\mathscr{F}(G, K^0, \{\varphi_k^0, \Phi_k^0\})$. Wenn (4,3) gilt und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist, dann ist nach (2,2) offenbar $G_l \cap G_l^0 \neq \emptyset$ und die Menge $G_l \cap G_l^0$ ist in G zwischen zwei Flächen eingeschränkt, wobei diese Flächen durch die Vorschrift $\varphi(x) = t$ gegeben sind, wo $\varphi(x) : M \to E_1$ die Ungleichung (2,1) erfüllt. Für ein gegebenes $\beta > 0$, $(\tilde{x}^0, \tilde{t}^0) \in P_l^0$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt nach (4,3)

$$\{(y, t) \in G;\ \|y - \tilde{x}^0\| < \beta,\ |t - \tilde{t}^0| < \beta\} \cap (G_l \cup P_l) \neq \emptyset .$$

Lemma 4,1. *Es sei* $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ *und gelte* (4,3). *Sei weiter* $(\tilde{x}^0, \tilde{t}^0) \in P_l^0$, $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G_l \cup P_l$, *l ist eine ganze Zahl und sei* $x(\tau)$ *eine Lösung der Gleichung* (4,2) *für* $\tau \geqq \tilde{t}$ *definiert mit* $x(\tilde{t}) = \tilde{x}$, *sodass diese Lösung in ihrem Definitionsintervall einen Punkt* $t_l \geqq \tilde{t}$ *so enthält, dass* $(x(t_l), t_l) \in P_l$ *ist. Dann gilt*

$$|t_l - \tilde{t}^0| \leqq (1 - LK)^{-1}\,\varepsilon + L(1 - LK)^{-1}\,\|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + \\ + (2 - LK)(1 - LK)^{-1}\,|\tilde{t} - \tilde{t}^0| \tag{4,6}$$

und

$$\|x(t_l) - \tilde{x}^0\| \leqq K(1 - LK)^{-1}\,\varepsilon + (1 - LK)^{-1}\,\|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + \\ + K(1 - LK)^{-1}\,|\tilde{t} - \tilde{t}^0| , \tag{4,7}$$

wo L die Konstante von (2,1) *ist.*

Beweis. Nach (2,1) und (iv) vom Satz 3,1 ist

$$|t_l - \varphi_l(\tilde{x})| = |\varphi_l(x(t_l)) - \varphi_l(x(\tilde{t}))| \leqq L\|x(t_l) - x(\tilde{t})\| \leqq LK|t_l - \tilde{t}| .$$

Daher ist

$$|t_l - \tilde{t}| \leqq |t_l - \varphi_l(\tilde{x})| + |\varphi_l(\tilde{x}) - \tilde{t}| \leqq LK|t_l - \tilde{t}| + \varphi_l(\tilde{x}) - \tilde{t}$$

und also ist $|t_l - \tilde{t}| \leqq (\varphi_l(\tilde{x}) - \tilde{t})(1 - LK)^{-1}$. Nachdem $\varphi_l^0(\tilde{x}^0) = \tilde{t}^0$ ist, gilt nach (4,3) und (2,1) die Ungleichung

$$|t_l - \tilde{t}^0| \leqq |t_l - \tilde{t}| + |\tilde{t} - \tilde{t}^0| \leqq (\varphi_l(\tilde{x}) - \tilde{t})(1 - LK)^{-1} + |\tilde{t} - \tilde{t}^0| \leqq \\ \leqq (1 - LK)^{-1}\left(|\varphi_l(\tilde{x}) - \varphi_l^0(\tilde{x})| + |\varphi_l^0(\tilde{x}) - \varphi_l^0(\tilde{x}^0)| + |\tilde{t}^0 - \tilde{t}|\right) + |\tilde{t} - \tilde{t}^0| \leqq \\ \leqq (1 - LK)^{-1}\left(\varepsilon + L\|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + |\tilde{t} - \tilde{t}^0|\right) + |\tilde{t} - \tilde{t}^0| .$$

Nach einer einfachen Berechnung ergibt sich daher schon (4,6). Ferner gilt offenbar $\|x(t_l) - \tilde{x}^0\| \leqq \|x(t_l) - \tilde{x}\| + \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|$. Wenn $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in P_l$ ist, dann ist $t_l = \tilde{t}$, $x(t_l) = \tilde{x}$ und (4,7) gilt offenbar, da nach (2,11) die Ungleichung $(1 - LK)^{-1} > 1$ gilt. Wenn $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G_l$ ist, dann ist nach (iii) vom Satz 3,1 $(x(\tau), \tau) \in G_l$ für $\tau \in \langle \tilde{t}, t_l)$. Von (iv) vom Satz 3,1 und von der oben bewiesenen Ungleichung für $|t_l - \tilde{t}|$ folgt

$$\|x(t_l) - \tilde{x}\| \leqq K|t_l - \tilde{t}| \leqq K(1 - LK)^{-1}\left(\varepsilon + L\|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + |\tilde{t} - \tilde{t}^0|\right)$$

und also ist

$$\|x(t_l) - \tilde{x}^0\| \leqq K(1 - LK)^{-1}\left(\varepsilon + L\|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + |\tilde{t} - \tilde{t}^0|\right) + \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|) .$$

(4,7) bekommt man daher nach einer leichten Berechnung.

Lemma 4,2. *Sei* $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$, $F^0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0, \{\varphi_k^0, \Phi_k^0\})$, $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \in G_l \cup P_l$, $(\tilde{x}^0, \tilde{t}^0) \in G_l^0 \cup P_l^0$, *l ist eine ganze Zahl. Sei* $x^0(\tau) = x^0(\tau, \tilde{x}^0, \tilde{t}^0)$ *eine Maximallösung der Gleichung* (4,1) *in* $\langle \tilde{t}^0, T^0)$ *definiert und* $x(\tau) = x(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ *eine Maximallösung der Gleichung* (4,2) *in* $\langle \tilde{t}, T)$ *definiert. Setzen wir voraus, dass* $I = \langle \tilde{t}^0, T^0) \cap \langle \tilde{t}, T) \neq \emptyset$ *ist und dass für gegebene* $\varepsilon > 0$ *und I die Voraussetzung* 4,1 *gilt. Bezeichnen wir* t_j^0 *bzw.* t_j, $j \geqq l$ *die Punkte in* $\langle \tilde{t}^0, T^0)$ *bzw.* $\langle \tilde{t}, T)$, *für welche* $(x^0(t_j^0), t_j^0) \in P_j^0$ *bzw.* $(x(t_j), t_j) \in P_j$ *ist. Sei weiter* ${}_*t_j = \min(t_j, t_j^0)$, ${}^*t_j = \max(t_j, t_j^0)$, $K^* = \max(K, K^0)$. *Setzen wir noch voraus, dass eine ganze Zahl k,* $k \geqq l$ *so existiert, dass* $\langle {}_*t_k, {}_*t_{k+1}\rangle \subset I$, ${}^*t_k < {}_*t_{k+1}$ *ist und* $(x({}_*t_k), {}_*t_k) \in G_k \cup P_k$, $(x^0({}_*t_k), {}_*t_k) \in G_k^0 \cup P_k^0$ *gilt. Dann ist*

$$\text{(i)} \qquad 0 \leqq {}^*t_k - {}_*t_k < (1 - LK^*)^{-1} \left[\varepsilon + L\|x({}_*t_k) - x^0({}_*t_k)\|\right],$$

$$\text{(ii)} \qquad \|x(t_k) - x^0(t_k^0)\| < (1 - LK^*)^{-1} \left[K^*\varepsilon + \|x({}_*t_k) - x^0({}_*t_k)\|\right],$$

$$\begin{aligned}\text{(iii)} \qquad \|x({}^*t_k+) - x^0({}^*t_k+)\| &< \varepsilon[1 + 2K^*(1 - LK^*)^{-1}] + \\ &+ (1 + LK^*)(1 - LK^*)^{-1} \|x({}_*t_k) - x^0({}_*t_k)\| + \\ &+ \omega_k^0((1 - LK^*)^{-1} [K^*\varepsilon + \|x({}_*t_k) - x^0({}_*t_k)\|],\end{aligned}$$

wo ω_k^0 *der Stetigkeitsmodul für* Φ_k^0 *von* (2,3) *ist,*

(iv) *für* $\tau \in ({}^*t_k, {}_*t_{k+1}\rangle$ *gilt die Ungleichung*

$$\begin{aligned}\|x(\tau) - x^0(\tau)\| &\leqq C_1\{\varepsilon[1 + 2K^*(1 - LK^*)^{-1}] + \\ &+ (1 + LK^*)(1 - LK^*)^{-1} \|x({}_*t_k) - x^0({}_*t_k)\| + \\ &+ \omega_k^0((1 - LK^*)^{-1} [K^*\varepsilon + \|x({}_*t_k) - x^0({}_*t_k)\|])\} + C_2\sqrt{\varepsilon},\end{aligned}$$

wo $C_1 \geqq 1$, $C_2 \geqq 0$ *nur von* ${}_*t_{k+1} - {}^*t_k$ *abhängende Konstanten sind und* ω_k^0 *ist der Stetigkeitsmodul für* Φ_k^0 *von* (2,3).

Beweis. Nach den Voraussetzungen ist entweder $(x^0({}_*t_k), {}_*t_k) \in P_k^0$, $(x({}_*t_k), {}_*t_k) \in \in G_k \cup P_k$ oder ist $(x({}_*t_k), {}_*t_k) \in P_k$, $(x^0({}_*t_k), {}_*t_k) \in G_k^0 \cup P_k^0$. Im ersten Fall kann man das Lemma 4,1 für $\tilde{x} = x({}_*t_k)$, $\tilde{x}^0 = x^0({}_*t_k)$ unmittelbar benützen. Im zweiten Fall wird die Behauptung benützt, welche man vom Lemma 4,1 erhält, wenn man in diesem Lemma die mit dem Index 0 oben versehenen Grössen mit denen ohne Index und umgekehrt vertauscht. (i) folgt dann sofort von (4,6), soeben (ii) folgt von (4,7). Zum Beweis von (iii) setzen wir z. B. voraus, dass ${}_*t_k = t_k^0 < t_k = {}^*t_k$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\|x({}^*t_k+) - x^0({}^*t_k+)\| &= \|x(t_k) + \Phi_k(x(t_k)) - x^0(t_k)\| \leqq \\ &\leqq \|x(t_k) - x^0(t_k^0)\| + \|\Phi_k(x(t_k)) - \Phi_k^0(x(t_k))\| + \\ &+ \|\Phi_k^0(x(t_k)) - \Phi_k^0(x^0(t_k^0))\| + K^0(t_k - t_k^0) \leqq \\ &\leqq \|x(t_k) - x^0(t_k^0)\| + \varepsilon + \omega_k^0(\|x(t_k) - x^0(t_k^0)\|) + K^*(t_k - t_k^0),\end{aligned}$$

wobei da (v) und (iv) vom Satz 3,1, (4,4) und (2,3) benützt wurde. Im Falle ${}_*t_k = t_k \leqq t_k^0 = {}^*t_k$ kann man gleicherweise dieselbe Ungleichung herleiten. Wenn wir nun die schon bewiesenen Ungleichungen (i) und (ii) benützen, dann gibt die letzte Ungleichung sofort (iii).

Wenn man in Betracht nimmt, dass die Funktion $y^0(\tau) : y^0({}^*t_k) = x^0({}^*t_k+)$, $y^0(\tau) = x^0(\tau)$ für $\tau \in ({}^*t_k, {}_*t_{k+1}\rangle$ eine Lösung der Gleichung $dx/d\tau = D\hat{F}^0(x, t)$ und die Funktion $y(\tau) : y({}^*t_k) = x({}^*t_k+)$, $y(\tau) = x(\tau)$ für $\tau \in ({}^*t_k, {}_*t_{k+1}\rangle$ eine Lösung der Gleichung $dx/d\tau = D\hat{F}(x, t)$ ist, wobei $\hat{F}^0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0)$, $\hat{F}(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$ (vgl. (iv) im Satz 3,1) dann ergibt sich von (4,5), dem Satz 1,1 zufolge, die Ungleichung

$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| = \|y(\tau) - y^0(\tau)\| \leqq C_1\|x({}^*t_k+) - x^0({}^*t_k+)\| + C_2\sqrt{\varepsilon}\,,$$
$$\tau \in ({}^*t_k, {}_*t_{k+1}\rangle\,,$$

wobei die Konstanten $C_1 \geqq 1$, $C_2 \geqq 0$ nur von ${}_*t_{k+1} - {}^*t_k$ abhängen (vgl. Bemerkung 1,1). Daher – wenn man (iii) benützt – ergibt sich (iv).

Bemerkung 4,2. Für die Untersuchungen der Probleme der stetigen Abhängigkeit von einem Parameter wird die Erfüllung von der Voraussetzung 4,1 (diese ist die Voraussetzung der Nähe der rechten Seiten der untersuchten Gleichungen) für hinreichend kleine Werte von ε verlangt. Die Voraussetzung $\varepsilon \leqq 1$ ist also für die eigentlichen Untersuchungen nicht wesentlich. Da ist diese Voraussetzung wegen der unmittelbaren Anwendbarkeit des Satzes 1,1 nötig. Ohne der Voraussetzung $\varepsilon \leqq 1$ gelten die Ergebnisse ebenfalls, nur wird der Weg zu deren Beweis etwas länger (vgl. auch Bemerkung 1,1).

Wir bemerken noch folgendes: *Wenn die Voraussetzungen vom Lemma* 4,2 *ausser den Voraussetzungen* ${}^*t_k < {}_*t_{k+1}$, $(x({}_*t_k), {}_*t_k) \in G_k \cup P_k$, $(x^0({}_*t_k), {}_*t_k) \in G_k^0 \cup P_k^0$ *erfüllt sind und wenn die Werte* $\varepsilon > 0$ *und* $\|x({}_*t_k) - x^0({}_*t_k)\|$ *hinreichend klein gemacht werden können, dann sind auch die weggelassenen Voraussetzungen erfüllt.*

Beweis. Nach der Voraussetzung ist entweder $(x^0({}_*t_k), {}_*t_k) \in P_k^0$ oder $(x({}_*t_k), {}_*t_k) \in P_k$. Es entstehe z. B. der erste dieser Fälle. Mit anderen Worten: es gelte $\varphi_k^0(x^0({}_*t_k)) = {}_*t_k$. Wenn ${}_*t_k = {}^*t_k$ ist, dann ist zugleich auch $(x({}_*t_k), {}_*t_k) \in P_k \subset G_k \cup P_k$ und offenbar auch ${}^*t_k < {}_*t_{k+1}$ nach (vi) vom Satz 3,1. Sei also ${}_*t_k < {}^*t_k$ d. h. $t_k^0 = {}_*t_k$ und $t_k = {}^*t_k$; für $\tau = {}_*t_k$ ist also die Funktion $x(\tau)$ noch „vor" der Fläche P_k, d. h. es gilt $\varphi_k(x({}_*t_k)) > {}_*t_k$. Ferner ist

$$\begin{aligned}{}_*t_k - \varphi_{k-1}(x({}_*t_k)) &= \varphi_k^0(x^0({}_*t_k)) - \varphi_{k-1}(x({}_*t_k)) = \\ = \varphi_k^0(x^0({}_*t_k)) - \varphi_{k-1}^0(x^0({}_*t_k)) &+ \varphi_{k-1}^0(x^0({}_*t_k)) - \varphi_{k-1}(x^0({}_*t_k)) + \varphi_{k-1}(x^0({}_*t_k)) - \\ - \varphi_{k-1}(x({}_*t_k)) &\geqq \delta - \varepsilon - L\|x({}_*t_k) - x^0({}_*t_k)\|\end{aligned}$$

nach (2,2), (4,3) und (2,1). Wenn nun $\varepsilon \leqq \delta/4$, $\|x^0({}_*t_k) - x({}_*t_k)\| \leqq \delta/4L$ ist, dann ist auch ${}_*t_k - \varphi_{k-1}(x({}_*t_k)) \geqq \delta/2 > 0$ und also $\varphi_{k-1}(x({}_*t_k)) < {}_*t_k < \varphi_k(x({}_*t_k))$ d. h.

$(x({}_*t_k), {}_*t_k) \in G_k$. Nach (vi) vom Satz 3,1 ist ${}_*t_{k+1} - {}_*t_k \geqq \delta(1 + LK_*)^{-1}(1 - A)$, wobei $K_* = \min(K, K^0)$, δ die Konstante von (2,2), L die Konstante von (2,1) und A die Konstante von (2,4) ist. Nach (4,6) vom Lemma 4,1 kann ${}^*t_k - {}_*t_k$ beliebig verkleinert werden, wenn $\varepsilon > 0$ und $\|x({}_*t_k) - x^0({}_*t_k)\|$ genügend klein ist (unabhängig davon ob ${}^*t_k < {}_*t_{k+1}$ gilt oder nicht). Daher und von der obigen Ungleichung für ${}_*t_{k+1} - {}_*t_k$ ist es offensichtlich, dass für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ und $\|x({}_*t_k) - x^0({}_*(t_k))\|$ auch ${}^*t_k < {}_*t_{k+1}$ sein wird. Den zweiten möglichen Fall $(x({}_*t_k), {}_*t_k) \in P_k$ kann man auf dieselbe Weise untersuchen.

Satz 4,1. *Es seien Konstanten* $L \geqq 0$, $\delta > 0$, $0 < A < 1$, $K \geqq 0$ *gegeben, sei* $0 \leqq KL < 1$, $0 \leqq K^0 L < 1$ *und seien* ω_k *bzw.* ω_k^0 *für jedes ganze* k *vergegebene Stetigkeitsmodule (vgl.* (2,3)*). Dann gibt es zu jeden* $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ *Werte* $\mu > 0$ *und* $0 < \varepsilon_0 \leqq 1$, *sodass die folgende Behauptung gilt*:

Sei $F^0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0, \{\varphi_k^0, \Phi_k^0\})$, $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$, $(\tilde{x}^0, \tilde{t}^0) \in G_l^0 \cup P_l^0$, $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in G_l \cup P_l$ *für irgendein ganzes* l. *Sei* $x^0(\tau) = x^0(\tau, \tilde{x}^0, \tilde{t}^0)$ *die in* $\langle \tilde{t}^0, T^0)$ *definierte Maximallösung der Gleichung* (4,1) *und* $x(\tau) = x(\tau, \tilde{x}, \tilde{t})$ *die in* $\langle \tilde{t}, T)$ *definierte Maximallösung der Gleichung* (4,2). *Sei* $\langle \tilde{t}^0, T^0) \cap \langle \tilde{t}, T) \neq \emptyset$. *Bezeichnen wir* $\sigma = \max(\tilde{t}, \tilde{t}^0)$ *und wählen* $R > 0$, *sodass* $\langle \sigma, \sigma + R \rangle \subset \langle \tilde{t}^0, T^0) \cap$ $\cap \langle \tilde{t}, T)$ *ist. Sei ferner* $I = \langle \min(\tilde{t}^0, \tilde{t}), \sigma + R \rangle$ *und sei für* $F(x, t)$, $F^0(x, t)$, I *die Voraussetzung* 4,1 *erfüllt. Ebenfalls gelte*

$$|\tilde{t} - \tilde{t}^0| < \mu\,, \quad \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| < \mu\,, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0\,. \tag{4,8}$$

Dann existiert ein endliches System von Intervallen

$$I_{\eta_1}(\sigma, \sigma + R) = \{I_k\}\,, \tag{4,9}$$

wo das Intervall $I_k \subset \langle \sigma, \sigma + R \rangle$ *von links offen ist und* $\sum |I_k| < \eta_1$ *gilt* ($|I_k|$ *ist die Länge des Intervalles* I_k), *sodass*

$$\sup_{\tau \in \langle \sigma, \sigma + R \rangle - \bigcup_{I_k \in I_{\eta_1}(\sigma, \sigma + R)} I_k} \|x(\tau) - x^0(\tau)\| < \eta_2 \tag{4,10}$$

ist.

Bevor wir den Satz 4,1 beweisen, verabreden wir uns, dass wir weiterhin mit dem Symbol $\varrho(u, v, w)$ (bzw. ϱ mit einem Index oder anderer Kennzeichnung versehen) eine nichtnegative, für $u, v, w \geqq 0$ definierte Funktion bezeichnen, für welche

$$\lim_{(u,v,w) \to 0,\, u,v,w \geqq 0} \varrho(u, v, w) = 0$$

gilt.

Beweis des Satzes 4,1. Nach (ii) vom Satz 3,1 existiert für jedes ganze k, $k \geqq l$ höchstens ein Punkt $t_k^0 \in \langle \tilde{t}^0, T^0)$ bzw. $t_k \in \langle \tilde{t}, T)$, sodass $(x^0(t_k^0), t_k^0) \in P_k^0$ bzw. $(x(t_k), t_k) \in P_k$ ist. Nach (vi) vom Satz 3,1 ist $t_l^0 < t_{l+1}^0 < \ldots$ bzw. $t_l < t_{l+1} < \ldots$

Da $R < +\infty$ ist, sind die Mengen $\langle \tilde{t}^0, \sigma + R\rangle \cap \{t_k^0\}_{k \geqq l}$, $\langle \tilde{t}, \sigma + R\rangle \cap \{t_k\}_{k \geqq l}$ endlich. Bezeichnen wir ${}_*t_k = \min(t_k, t_k^0)$, ${}^*t_k = \max(t_k, t_k^0)$. Nach dem Obigen ist offenbar ${}^*t_l < {}^*t_{l+1} < \ldots$ und ${}_*t_l < {}_*t_{l+1} < \ldots$ und die Mengen $\langle \sigma, \sigma + R\rangle \cap \cap \{{}_*t_k\}_{k \geqq l}$, $\langle \sigma, \sigma + R\rangle \cap \{{}^*t_k\}_{k \geqq l}$ sind endlich. Legen wir weiter noch $K^* = \max(K, K^0)$, $K_* = \min(K, K^0)$. Nach (2,11) ist $0 \leqq K^*L < 1$ und $0 \leqq K_*L < 1$.

Bevor wir uns zu den Einzelheiten des Beweises wenden, deuten wir das Ziel des Beweises an. Sei

$$I_k = ({}_*t_k, {}^*t_k\rangle \cap \langle \sigma, \sigma + R\rangle \tag{4,11}$$

und

$$I = \bigcup_{k \geqq l} I_k\,. \tag{4,12}$$

Wir beweisen, dass zu gegebenen $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ Werte $\mu > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ so existieren, dass wenn (4,8) gilt, dann ist I von (4,12) die Vereinigung von endlich vielen Intervallen I_k von (4,11) und es gilt $\sum_{k \geqq l} |I_k| < \eta_1$ und (4,10).

Für den eingentlichen Beweis unterscheiden wir die Fälle, welche vorkommen können: Es ist entweder

A) $\{t_k^0\}_{k \geqq l} \neq \emptyset$ und $\{t_k\}_{k \geqq l} \neq \emptyset$

oder

B) $\{t_k^0\}_{k \geqq l} = \{t_k\}_{k \geqq l} = \emptyset$

oder

C) eine der Mengen $\{t_k^0\}_{k \geqq l}$, $\{t_k\}_{k \geqq l}$ ist leer und die andere ist nicht leer.

Zuerst untersuchen wir den Fall A). In diesem Fall kann folgendes vorkommen: entweder ist

1) $\langle \sigma, \sigma + R\rangle \cap \{{}_*t_k\}_{k \geqq l} = \emptyset$

oder ist

2) $\langle \sigma, \sigma + R\rangle \cap \{{}_*t_k\}_{k \geqq l} \neq \emptyset$

und zugleich ist

entweder

a) ${}_*t_l < \sigma$

oder

b) $\sigma \leqq {}_*t_l$.

Wir analysieren zuerst den Fall a). (Dabei ist A).) Sei z. B. ${}_*t_l = t_l^0$ (der Fall ${}_*t_l = t_l$ ist symmetrisch); dann ist offenbar

$$\tilde{t}^0 \leqq t_l^0 = {}_*t_l < \sigma = \tilde{t} \leqq t_l = {}^*t_l\,. \tag{4,13}$$

Nach (iv) vom Satz 3,1 und nach (4,13) gilt

$$\|x(\sigma) - x^0({}_*t_l)\| = \|\tilde{x} - x^0(t_l^0)\| \leqq \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + K^0|t_l^0 - \tilde{t}^0| < \tag{4,14}$$
$$< \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + K^*|\tilde{t} - \tilde{t}^0| .$$

Verwende man nun das Lemma 4,1 für die Punkte $(x^0({}_*t_l), {}_*t_l) \in P_l^0$ und $(x(\sigma), \sigma) \in \in G_l \cup P_l$. Nach (4,6) ist

$$^*t_l - {}_*t_l < (1 - LK^*)^{-1} (\varepsilon + L\|x(\sigma) - x^0({}_*t_l)\| + (2 - LK_*) |\sigma - {}_*t_l|)$$

und nach (4,13) und (4,14) folgt daher

$$|I_l| < {}^*t_l - {}_*t_l \leqq \varrho(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|) . \tag{4,15}$$

Mit Hilfe von (4,14) gibt (4,7) vom Lemma 4,1 für die Punkte $(x^0({}_*t_l), {}_*t_l) \in P_l^0$, $(x(\sigma), \sigma) \in G_l \cup P_l$ auch

$$\|x(t_l) - x^0(t_l)\| < (1 - LK^*)^{-1} [K^*\varepsilon + \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + 2K^*|\tilde{t} - \tilde{t}^0|] . \tag{4,16}$$

Nach (4,15) sind für hinreichend kleine $\varepsilon_0 > 0$ und $\mu > 0$ die Werte $|I_l|$ und $|{}^*t_l - {}_*t_l|$ beliebig klein. Man kann also erreichen, dass für hinreichend kleine $\varepsilon_0 > 0$ und $\mu > 0$ kein Punkt der Menge $\{t_k^0\}_{k \geq l}$ in $\langle {}_*t_l, {}^*t_l \rangle$ liegen wird, d. h. dass ${}_*t_l = t_l^0 < {}^*t_l = t_l < t_{l+1}^0$ sein wird (vgl. Satz 3,1, (vi)). Wenn man den Satz 3,1 und die Ungleichungen (2,3), (4,4) benützt, erhält man für hinreichend kleine $\varepsilon_0 > 0$ und $\mu > 0$ die Ungleichung

$$\|x({}^*t_l+) - x^0({}^*t_l+)\| = \|x(t_l) + \Phi_l(x(t_l)) - x^0(t_l)\| \leqq \|x(t_l) - x^0(t_l^0)\| +$$
$$+ \|\Phi_l(x(t_l)) - \Phi_l^0(x(t_l))\| + \|\Phi_l^0(x(t_l)) - \Phi_l^0(x^0(t_l^0))\| +$$
$$+ \|\Phi_l^0(x^0(t_l^0)) + x^0(t_l^0) - x^0(t_l)\| \leqq \|x(t_l) - x^0(t_l^0)\| +$$
$$+ \varepsilon + \omega_l^0(\|x(t_l) - x^0(t_l^0)\|) + K^0|t_l - t_l^0| , \quad \text{wenn} \quad {}^*t_l \in \langle \sigma, \sigma + R) ,$$

wobei ω_l^0 der Stetigkeitsmodul von Φ_l^0 ist (vgl. (2,3)). Nach (4,15) und (4,16) gilt also für hinreichend kleine $\varepsilon_0 > 0$ und $\mu > 0$ die Ungleichung

$$\|x({}^*t_l+) - x^0({}^*t_l+)\| < \varrho_l(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|) . \tag{4,17}$$

Weiter untersuchen wir den Fall b). Setzen wir voraus, dass z. B. $\tilde{t}^0 \leqq \tilde{t} = \sigma$ ist (der Fall $\tilde{t} < \tilde{t}^0 = \sigma$ ist symmetrisch). Nach (iv) vom Satz 3,1 ist

$$\|x(\sigma) - x^0(\sigma)\| \leqq \|\tilde{x} - x^0(\tilde{t})\| \leqq \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + K^*|\tilde{t} - \tilde{t}^0| . \tag{4,18}$$

Im Intervall $\langle \sigma, {}_*t_l \rangle$ ist $x^0(\tau)$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = D\hat{F}^0(x, t) , \tag{4,19}$$

wobei $\hat{F}^0(x, t) = F^0(x, t) - \tilde{F}(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0)$, wo $\tilde{F}^0(x, t)$ die für die Klasse $\mathscr{F}(G, K^0, \{\varphi_k^0, \Phi_k^0\})$ nach (2,7) bestimmte Funktion ist und soeben ist $x(\tau)$ in $\langle \sigma, {}_*t_l \rangle$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = D\hat{F}(x, t)\,, \tag{4,20}$$

wobei $\hat{F}(x, t) = F(x, t) - \tilde{F}(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$, wo $\tilde{F}(x, t)$ die für die Klasse $\mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$ nach (2,7) bestimmte Funktion ist. Nach dem Satz 1,1 gilt für $\tau \in \langle \sigma, {}_*t_l \rangle$ die Ungleichung

$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| \leqq C_1 \|x(\sigma) - x^0(\sigma)\| + C_2 \sqrt{\varepsilon}$$

und also gilt nach (4,18) die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|x(\tau) - x^0(\tau)\| &\leqq C_1[\|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + K^*|\tilde{t} - \tilde{t}^0|] + C_2 \sqrt{\varepsilon} = \\ &= \bar{\varrho}_{l-1}(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|)\,. \end{aligned} \tag{4,21}$$

Die Konstanten $C_1 \geqq 1$, $C_2 \geqq 0$ hängen dabei nur von $R > 0$ ab und werden für die weiteren Erwägungen fest gewählt. Nach der Bemerkung 1,1 kann man $C_1 = e^{KR}$, $C_2 = 2[1 + (1 + K + 4K^0) R] e^{KR}$ legen und diese Konstanten bei der Anwendung des Satzes 1,1 in einem beliebigen Intervall, welches im Intervall $\langle \sigma, \sigma + R \rangle$ enthalten ist, benützen.

Wir beweisen nun den Satz für die Kombinationen der Fälle 1), 2) und a), b).

Der Fall 1), a): In diesem Fall sind noch zwei Alternativen möglich. Entweder ist $\sigma + R \leqq {}^*t_l$ oder ist $\sigma + R > {}^*t_l$. Im ersten Fall ist offenbar (vgl. (4,11) und (4,12)) $I_l = I = \langle \sigma, \sigma + R \rangle$. Nach (4,15) ist offenbar $|I_l| < \eta_1$, wenn ε_0, μ genügend klein sind und $\langle \sigma, \sigma + R \rangle - I = \emptyset$. Der Satz gilt also in diesem Falle. Die zweite Möglichkeit ist ${}^*t_l < \sigma + R$. Für $|I_l|$ gilt (4,15) und im Intervall $\langle {}^*t_l, \sigma + R \rangle$ ist die Funktion $y^0(\tau)$, welche durch $y^0({}^*t_l) = x^0({}^*t_l+)$, $y^0(\tau) = x^0(\tau)$ für $\tau \in ({}^*t_l, \sigma + R\rangle$ definiert ist, eine Lösung der Gleichung (4,19) und soeben ist die Funktion $y(\tau) : y({}^*t_l) = x({}^*t_l)$, $y(\tau) = x(\tau)$ für $\tau \in ({}^*t_l, \sigma + R\rangle$ eine Lösung der Gleichung (4,20) in $\langle {}^*t_l, \sigma + R \rangle$. Nach dem Satz 1,1 gilt für $\tau \in ({}^*t_l, \sigma + R\rangle$ die Ungleichung

$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| \leqq C_1 \|x({}^*t_l+) - x^0({}^*t_l+)\| + C_2 \sqrt{\varepsilon}\,,$$

wo C_1, C_2 die oben bestimmte feste Konstanten sind. Nach (4,17) gilt also

$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| \leqq \bar{\varrho}_l(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|) \tag{4,22}$$

für $\tau \in ({}^*t_l, \sigma + R\rangle$. Der Satz ist also offenbar auch in diesem Fall richtig, wenn man $I = I_l$ legt.

Der Fall 1), b): In diesem Fall ist offenbar $\sigma + R \leqq {}_*t_l$ und also gilt die Ungleichung (4,21) für alle $\tau \in \langle \sigma, \sigma + R \rangle$. Nach (4,21) gilt also der Satz mit $I = \emptyset$.

Der Fall 2), a): In diesem Fall ist immer $^*t_l \geqq \sigma$ (vgl. (4,13)). Sei $\langle \sigma, \sigma + R \rangle \cap \cap \{{}_*t_k\}_{k \geqq l} = \{{}_*t_{l+1}, {}_*t_{l+2}, \ldots, {}_*t_{l+m}\}$, $1 \leqq m < +\infty$. Soeben, wie es in der Bemerkung 4,2 angeführt war, kann man durch die Wahl von hinreichend kleinen $\varepsilon_0 > 0$ und $\mu > 0$ erreichen, dass $^*t_l < {}_*t_{l+1}$ sein wird. Nach den Ungleichungen (4,15) und (4,17) ist ferner $|I_l|$ und $\|x(^*t_l+) - x^0(^*t_l+)\|$ beliebig klein, wenn $\varepsilon_0 > 0$ und $\mu > 0$ hinreichend klein sind (man kann z. B. erreichen, dass $|I_l| < \eta_1/(m+1)$ sein wird). Nach dem Satz 1,1 gilt nach (4,17) für $\tau \in (^*t_l, {}_*t_{l+1}\rangle$ die Ungleichung

$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| < C_1 \varrho_l(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|) + C_2 \sqrt{\varepsilon} = \\ = \bar{\varrho}_l(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|)\,. \tag{4,23}$$

Für das Intervall $({}_*t_{l+1}, {}_*t_{l+2}\rangle$ benützen wir das Lemma 4,2. Nach (i) von diesem Lemma und nach (4,23) ist für hinreichend kleine $\varepsilon_0 > 0$ und $\mu > 0$ der Wert $|I_{l+1}| = |^*t_{l+1} - {}_*t_{l+1}|$ vorgeschriebenerweise klein (z. B. $|I_{l+1}| < \eta_1/m + 1$) und nach (iv) vom Lemma 4,2 und (4,23) gilt die Ungleichung

$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| \leqq \bar{\varrho}_{l+1}(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|)$$

für $\tau \in (^*t_{l+1}, {}_*t_{l+2}\rangle$. Auf diese Weise kann man fortschreiten und beweisen, dass

$$|I_{l+k}| \leqq \varrho_{l+k}(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m\,,$$
$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| \leqq \bar{\varrho}_{l+k}(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|) \quad \text{für} \quad \tau \in (^*t_{l+k}, {}_*t_{l+k+1}\rangle\,,$$
$$k = 0, 1, \ldots, m - 1$$

und $\|x(\tau) - x^0(\tau)\| \leqq \bar{\varrho}_{l+m}(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|)$ für $\tau \in (^*t_{l+m}, \sigma + R\rangle$, wenn $^*t_{l+m} < \sigma + R$ ist, gilt.

Es genügt also $\varepsilon_0 > 0$, $\mu > 0$ so klein zu wählen, dass

$$\sum_{k=0}^{m} \varrho_{l+k}(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|) < \eta_1 \quad \text{und} \quad \max_{k=0,1,\ldots,m} \bar{\varrho}_{l+k}(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0| < \eta_2$$

ist, wenn (4,8) gilt. Der Satz ist so auch für diesen Fall beweisen.

Der Fall 2), b): In diesem Fall ist ${}_*t_l < \sigma + R$. Sei $\langle \sigma, \sigma + R \rangle \cap \{{}_*t_k\}_{k \geqq l} = = \{{}_*t_l, {}_*t_{l+1}, \ldots, {}_*t_{l+m}\}$. Für $\tau \in \langle \sigma, {}_*t_l \rangle$ gilt (4,21). Nach dem Lemma 4,2, (i) ist $|I_l| \leqq \varrho_l(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}_0|)$ und nach (iv) von demselben Lemma auch $\|x(\tau) - - x^0(\tau)\| \leqq \bar{\varrho}_l(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|)$ für $\tau \in (^*t_l, {}_*t_{l+1}\rangle$. Weiter kann man so wie im Fall 2), a) fortschreiten.

Im Fall B) ist $x^0(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (4,19), $x(\tau)$ ist eine Lösung der Gleichung (4,20) in $\langle \sigma, \sigma + R \rangle$ und der Satz folgt von der Ungleichung (4,18), welche in diesem Fall offenbar gilt, und von dem Satz 1,1. I is in diesem Fall eine leere Menge.

Schliesslich im Fall C) sei z. B. $\{t_k\}_{k \geqq l} = \emptyset$ und $\{t_k^0\}_{k \geqq l} \neq \emptyset$. Nach dem Lemma 3,9 ist in diesem Fall $T < +\infty$ ($\langle \tilde{t}, T)$ ist das Definitionsintervall der Maximallösung $x(\tau)$ und $x(\tau)$ ist in $\langle \tilde{t}, T)$ eine Lösung der Gleichung (4,20)). Es können zwei Fälle vorkommen: entweder ist $\sigma < t_l^0$ oder $\sigma \leqq t_l^0$. Im ersten Fall kann man zeigen, dass für hinreichend kleine $\varepsilon_0 > 0$ und $\mu > 0$ die Werte $T - t_l^0$ und $\|x(\tau) - x^0(\tau)\|$ für $\tau \in \langle \sigma, \sigma + R \rangle \cap \langle \sigma, t_l^0 \rangle$ beliebig klein gemacht werden können. Der Satz wird mit $I = (t^0, T) \cap \langle \sigma, \sigma + R \rangle$ gelten. Im zweiten Fall kann man zeigen, dass die Ungleichung $T - \tilde{t} \leqq \varrho(\varepsilon, \|\tilde{x} - \tilde{x}^0\|, |\tilde{t} - \tilde{t}^0|)$ gelten wird und nachdem $\langle \sigma, \sigma + R \rangle \subset \subset \langle \tilde{t}, T)$ ist, gilt der Satz mit $I = \langle \sigma, \sigma + R \rangle$.

In den Fällen B) und C) haben wir die technischen Einzelheiten des Beweises weggelassen. Diese sind denen von dem Fall A) ähnlich.

Voraussetzung 4,2. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $I \subset (-\infty, \infty)$ ein Intervall. Für $F(x, t) \in \in \mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$, $F^0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0)$ gelte

$$\|\Delta_t^\vartheta[F(x, t) - F^0(x, t)]\| < \varepsilon, \tag{4,24}$$

wenn $0 < \vartheta \leqq 1$, $(x, t), (x, t + \vartheta) \in M \times I$ ist.

Bemerkung 4,3. Wenn die Voraussetzung 4,2 erfüllt ist, dann (wenn $0 < \vartheta \leqq \leqq \min(1, \delta)$ ist, wo δ die Konstante von (2,2) ist) gilt

$$\|\Delta_t^\vartheta[F^0(x, \varphi_k(x)) - F(x, \varphi_k(x))]\| = \|\Delta_t^\vartheta[F^0(x, \varphi_k(x)) - \hat{F}(x, \varphi_k(x))] - \Phi_k(x)\| < \varepsilon$$

und daher, nachdem $\hat{F}(x, t) \in \mathscr{F}(G, K)$ ist, gilt

$$\|\Phi_k(x)\| < \varepsilon + \|\Delta_t^\vartheta[F^0(x, \varphi_k(x)) - \hat{F}(x, \varphi_k(x))]\| \leqq \varepsilon + (K + K^0)\,\vartheta\,.$$

Nach dem Grenzübergang $\vartheta \to 0+$ ergibt sich daher

$$\|\Phi_k(x)\| \leqq \varepsilon \tag{4,25}$$

für jedes $x \in M$, $k = 0, \pm 1, \ldots$.

Weiter gilt ebenfalls nach (4,24) und (2,7)

$$\|\Delta_t^\vartheta[F^0(x, t) - \hat{F}(x, t)]\| < \varepsilon + \|\Delta_t^\vartheta \tilde{F}(x, t)\| = \varepsilon + \|\Delta_t^\vartheta(\sum_{i=l_x}^{s(x,t)} \Phi_i(x))\| =$$

$$= \varepsilon + \|\sum_{i=s(x,t)+1}^{s(x,t+\vartheta)} \Phi_i(x)\| \leqq \varepsilon + \varepsilon(s(x, t + \vartheta) - s(x, t)) =$$

$$= \varepsilon(1 + s(x, t + \vartheta) - s(x, t))$$

und also der Definition von $s(x, t)$ nach und von der Ungleichung (2,2) folgt

$$\|\Delta_t^9[F^0(x, t) - \hat{F}(x, t)]\| \leqq \varepsilon\left(2 + \frac{1}{\delta}\right), \tag{4,26}$$

wo δ die Konstante von (2,2) ist.

Satz 4,2. *Es seien Konstanten* $L \geqq 0$, $\delta > 0$, $0 < A < 1$, $K \geqq 0$, $K^0 \geqq 0$ *gegeben, sei* $0 \leqq KL < 1$, *und sei für jedes ganze* k ω_k *ein Stetigkeitsmodul* (vgl. (2,3)). *Dann gibt es jedem* $\eta > 0$ *Werte* $\mu > 0$ *und* $0 < \varepsilon_0 < 1$, *sodass die folgende Behauptung gilt*:

Sei $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, K, \{\varphi_k, \Phi_k\})$, $F^0(x, t) \in \mathscr{F}(G, K^0)$, $(\tilde{x}, \sigma) \in G$, $(\tilde{x}^0, \sigma) \in G$. *Sei weiter* $x^0(\tau) = x^0(\tau, \tilde{x}^0, \sigma)$ *die Maximallösung der Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF^0(x, t) \tag{4,27}$$

in $\langle\sigma, T^0)$ *definiert und* $x(\tau) = x(\tau, \tilde{x}, \sigma)$ *sei die Maximallösung der Gleichung* (4,2) *in* $\langle\sigma, T)$ *definiert. Sei noch* $0 < R < +\infty$ *und* $I = \langle\sigma, \sigma + R\rangle \subset \langle\sigma, T^0) \cap \cap \langle\sigma, T)$ *und sei für* F, F^0, I *die Voraussetzung* 4,2 *erfüllt. Wenn* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *und* $\|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| < \mu$ *ist, dann gilt*

$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| < \eta \tag{4,28}$$

für alle $\tau \in \langle\sigma, \sigma + R\rangle$.

Beweis. Offenbar existiert soeine ganze Zahl l dass $(\tilde{x}, \sigma) \in G_l \cup P_l$. Es seien t_k, $k \geqq 1$ Punkte in $\langle\sigma, T)$, für welche $(x(t_k), t_k) \in P_k$ ist. Nach dem Lemma 3,7 ist $\sigma \leqq t_l < t_{l+1} < \ldots$ und die Menge

$$\langle\sigma, \sigma + R\rangle \cap \{t_k\}_{k \geqq l} = \{t_l, t_{l+1}, \ldots, t_{l+m}\}$$

ist endlich (oder leer). Zerlege man $\langle\sigma, \sigma + R\rangle$ in Intervalle $\langle\sigma, t_l\rangle, (t_l, t_{l+1}\rangle, \ldots$ $\ldots, (t_{l+m}, \sigma + R\rangle$; in jedem dieser Intervalle ist nach (iv) vom Satz 3,1 $x(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (4,20). Nach dem Satz 1,1 gibt es Konstanten C_1, C_2 (diese hängen nur von R ab), sodass nach (4,26) die Ungleichung

$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| \leqq C_1\|\tilde{x} - \tilde{x}^0\| + \bar{C}_2\sqrt{\varepsilon} \tag{4,29}$$

für $\tau \in \langle\sigma, t_l\rangle$ und ebenfalls auch die Ungleichungen

$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| \leqq C_1\|x(t_k+) - x^0(t_k+)\| + \bar{C}_2\sqrt{\varepsilon}$$

für $\tau \in (t_k, t_{k+1}\rangle$, $k = l, l + 1, \ldots, l + m - 1$,

$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| \leqq C_1\|x(t_{l+m}+) - x^0(t_{l+m})\| + \bar{C}_2\sqrt{\varepsilon}$$

für $\tau \in (t_{l+m}, \sigma + R\rangle$, wo $\bar{C}_2 = C_2 \sqrt{(2 + 1/\delta)}$. Dabei ist nach (4,26) und nach den Eigenschaften von $x(\tau)$

$$\|x(t_k+) - x^0(t_k+)\| = \|x(t_k) + \Phi_k(x(t_k)) - x^0(t_k)\| \leqq$$
$$\leqq \|x(t_k) - x^0(t_k)\| + \|\Phi_k(x(t_k))\| \leqq \|x(t_k) - x^0(t_k)\| + \varepsilon .$$

Daher ist

$$\|x(\tau) - x^0(\tau)\| < C_1\|x(t_k) - x^0(t_k)\| + C_1\varepsilon + \bar{C}_2 \sqrt{\varepsilon} \tag{4,30}$$

für $\tau \in (t_k, t_{k+1}\rangle$, $k = l, l + 1, \ldots, l + m - 1$ bzw. für $\tau \in (t_{l+m}, \sigma + R\rangle$. Von (4,29) und (4,30) ist schon die Behauptung des Satzes klar.

Bemerkung 4,4. Die Sätze 4,1 und 4,2 sind Sätze über die stetige Abhängigkeit von einem Parameter für verallgemeinerte Differentialgleichungen der Form (4,1). Diese haben einen ähnlichen Charakter wie der Satz 1,1, die Sätze in [1], [2] bzw. die bekannten Sätze für klassiche Differentialgleichungen. Im Fall, welcher im Satz 4,1 untersucht wurde, kann man nicht herleiten, dass die Lösungen für kleine ε_0 und μ gleichmässig nahe im ganzen Definitionsintervall sind.

Literatur

[1] *Kurzweil, J.:* Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter, Czech. Math. J., *7* (*82*), (1957), 418—449.

[2] *Kurzweil, J.:* Generalized Ordinary Differential Equations, Czech. Math. J., *8*(*83*), (1958), 360—388.

[3] *Kurzweil, J.:* Problems which lead to a Generalization of the Concept of an Ordinary Differential Equation, Differential Equations and their Appl., Proc. of the Conference held in Prague in September 1962, Publ. House of the Czech. Acad. of Sciences, Prague 1963.

[4] *Kurzweil, J.:* Exponentially Stable Integral Manifolds, Averaging Principle and Continuous Dependence on a Parameter, Czech. Math. J. *16* (*91*), (1966), 380—423.

[5] *Schwabik, Š.:* Stetige Abhängigkeit von einem Parameter und invariante Mannigfaltigkeiten für verallgemeinerte Differentialgleichungen, Czech. Math. J. *19* (*94*), (1969), 398—427.

[6] *Schwabik, Š.:* Verallgemeinerte gewöhnliche Differentialgleichungen; Systeme mit Impulsen auf Flächen I, Czech. Math. J., *20* (*95*), (1970), 468—490.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV v Praze).