Czechoslovak Mathematical Journal

Konrad Jacobs

# Systèmes dynamiques Riemanniens

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 20 (1970), No. 4, 628–631

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100988`

Czechoslovak Mathematical Journal, 20 (95) 1970, Praha

# SYSTEMES DYNAMIQUES RIEMANNIENS

KONRAD JACOBS, Erlangen

(Reçu le 29 juillet 1969)

## I. GENERALITES

Soit $\tau$ une topologie métrisable dans l'espace $\Omega = \{\omega, \eta, \ldots\}$ et $\mathfrak{B}$ la $\sigma$-algèbre engendrée par $\tau$. Pour une mesure $m$ définie sur $\mathfrak{B}$, on appelle l'ensemble $\partial E \in \mathfrak{B}$ *m-Riemannien*, si sa frontière $\partial E$ est de mesure nulle: $m(\partial E) = 0$. Une application $T : \Omega \to \Omega$ $\mathfrak{B}$-mesurable est appelée *m-Riemannienne*, si elle est continue sur un ouvert $U$ tel que $m(\Omega \setminus U) = 0$. Si en outre $T$ garde la mesure $m$, le quintuple $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$ est appelé un *système dynamique Riemannien.*

On démontre aisément que:

1. Les transformations $m$-Riemanniennes qui gardent $m$ forment un semi-groupe, spécialement $T^n$ $(n = 2, 3, \ldots)$, est $m$-Riemannien si $T$ l'est et garde $m$.

2. Si $E$ est un ensemble $m$-Riemannien, et $T$ une application $m$-Riemannienne qui garde $m$, alors tous les ensembles $ET^{-1}$ $(t = 0, 1, \ldots)$ sont $m$-Riemanniens.

3. Si $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$ est un système dynamique Riemannien, alors $m$-presque tout point $\omega \in \Omega$ a une *orbite* $\{\omega, \omega T, \ldots\}$ formée de points de continuité de tous les $T^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

**Définition 1.** Soit $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$ un système dynamique Riemannien. Un point $\omega \in \Omega$ est appelé *visiteur presque périodique* (pour ce système), si:

1. Son orbite est formée par des points de continuité de $T, T^2, \ldots$

2. L'adhérence de son orbite porte la mesure $m$.

3. Pour chaque voisinage $U$ de $\omega$, il y a un $L > 0$ tel que $\{\omega T^t, \ldots, \omega T^{t+L-1}\} \cap$ $\cap\, U \neq \emptyset$ $(t = 0, 1, \ldots)$.

S'il y a un tel visiteur, $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$ est appelé *presque périodique primitif.*

Si $T$ est continue, et $\Omega$ compact et invariant minimal, alors le système est presque périodique primitif, et chaque $\omega$ est un visiteur presque périodique.

**Définition 2.** Soit $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$ un système dynamique Riemannien et $m(\Omega) < \infty$. Un point $\omega \in \Omega$ est appelé *visiteur régulier* (pour ce système), si pour chaque ensemble $m$-Riemannien $F$ et chaque $\varepsilon > 0$ il y a un $t_0 > 0$ tel que $t \geqq t_0$ implique:

$$\left| \frac{1}{t} \sum_{u=0}^{t-1} 1_F(\omega T^{s+u}) - \frac{m(F)}{m(\Omega)} \right| < \varepsilon \quad (s = 0, 1, \ldots) .$$

S'il y a un tel visiteur, $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$ est appelé *régulier*.

Si $T$ est continue et $\Omega$ compact et strictement ergodique, alors le système est régulier, et chaque point est un visiteur régulier.

Si chaque ouvert non-vide a une mesure strictement positive, alors chaque visiteur régulier dont l'orbite est formée de points de continuité des $T$, $T^2$, ..., est aussi un visiteur presque-périodique.

## II. MODIFICATIONS DES SYSTÈMES RIEMANNIENS

Dans le cadre de la théorie de la mesure, on connait bien les trois méthodes suivantes pour construire un nouveau système à partir d'un système donné.

1. *Le système induit* par un sous-ensemble mesurable $E$ de $\Omega$: si $m(\Omega) < \infty$ et $m$ est gardé par $T$, le théorème de récurrence de Poincaré implique que presque chaque point de $E$ rentre dans $E$. Si l'on pose

$$E_r = E \cap (\Omega \setminus ET^{-1}) \cap \ldots \cap (\Omega \setminus ET^{-(r-1)}) \cap ET^{-r} \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

on sait que les $E_r$ sont deux à deux disjoints et

$$m(E) = m(E_1 + E_2 + \ldots) ;$$

par la formule

$$\omega T_E = \begin{cases} \omega T^r & (\omega \in E_r) \\ \omega & (\omega \in E \setminus \bigcup_{r=1}^{\infty} E_r) \end{cases}$$

on définit $T_E : E \to E$ gardant la réstriction $m_E$ de $m$ sur $E$.

2. *Le système étendu* à une suite d'étages $\Omega = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots \supseteq$ mesurables: on pose:

$$\tilde{\Omega} = \{(k, \omega) \mid k = 0, 1, \ldots; \omega \in F_k\}$$

$$(k, \omega)\, \tilde{T} = \begin{cases} (k + 1, \omega) & (\omega \in F_{k+1}) \\ (0, \omega T) & (\omega \in F_k \setminus F_{k+1}) \end{cases}$$

Si $T$ garde $m$, alors $\tilde{T}$ garde la mesure $\tilde{m}$ définie dans $\tilde{\Omega}$ d'une manière évidente.

3. *Le système produit* représentant le système donné: on plonge $\Omega$ dans l'espace produit $\hat{\Omega} = \Omega \times \Omega \times \ldots = \{\hat{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \mid \omega_t \in \Omega\}$ par l'application injective $\Phi : \omega \to (\omega, \omega T, \omega T^2, \ldots)$.

Si $\hat{T} : (\omega_0, \omega_1, \ldots) \to (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ est la *translation* dans $\hat{\Omega}$, on a $\Phi\hat{T} = T\Phi$. $\Phi$ est mesurable et transporte $m$ dans une mesure $\hat{T}$-invariante $\hat{m}$.

Nous allons montrer que, sous des hypothèses bien naturelles, ces trois modifications gardent las propriétés définies dans le paragraphe 1.

Considérons toujours un système dynamique Riemannien $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$. On dit qu'un point $\omega \in \Omega$ est *adapté* au sous-ensemble $E$ de $\Omega$, si pour chaque $t \geqq 0$, $\omega T^t \in E$ implique $\omega T^t \in \underset{\circ}{E}_1 + \underset{\circ}{E}_2 \ldots$, où $\underset{\circ}{F}$ dénote toujours l'intérieur de l'ensemble $F \subseteq \Omega$. On voit immédiatement que pour $m(\Omega) < \infty$ et pour un $E$ $m$-Riemannien, les $E_r$ sont aussi $m$-Riemanniens, et $m$-presque tout point $\omega \in \Omega$ est adapté à $E$; si tous les $\omega T^t$ sont des point des continuité pour toutes les $T^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, alors tous les $\omega T_E^s$ sont des points des continuité pour toutes les $T_E^n$ (observer que les $\omega T_E^s$ sont des $\omega T^t \in E$, avec $s \leqq t$).

Notons la restriction à $E$ par un indice $E$. Alors on a le

**Théorème 3.** *Si* $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$ $m(\Omega) < \infty$, *est prèsque-périodique primitif, avec un visiteur presque-périodique* $\omega$ *adapté et appartenant au sousensemble m-Riemannien E, alors le système induit* $(E, \tau_E, \mathfrak{B}_E, m_E, T_E)$ *est aussi prèsque-périodique primitif, et* $\omega$ *est un visiteur presque-périodique aussi pour ce système.*

**Théorème 4.** *Si* $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$, $m(\Omega) < \infty$, *est régulier, avec un visiteur régulier* $\omega$ *appartenant au sous-ensemble m-Riemannien E, alors le système induit* $(E, \tau_E, \mathfrak{B}_E, m_E, T_E)$ *est aussi régulier, et* $\omega$ *est un visiteur régulier pour ce système.*

Nous laissons au lecteur la tâche de formuler et démontrer des théorèmes analogues pour des systèmes étendus, et passons maintenant aux systèmes produits.

Nous supposons que $\Omega$ peut être considéré comme sous-ensemble d'un compact métrique $\Omega$ tel que $\tau$, $\mathfrak{B}$ sont des restrictions sur $\Omega$ des structures $\tau$, $\mathfrak{B}$ analogues données dans $\Omega$. A partir de $\Omega$ nous formons $\hat{\Omega} \supseteq \hat{\Omega}$ etc ... de la même façon comme $\hat{\Omega}$ etc ... Les symboles $\hat{m}$, $\Phi$, $\hat{T}$ sont utilisés aussi bien pour $\hat{\Omega}$.

**Théorème 5.** *Si* $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$ *est prèsque-périodique primitif, alors* $\hat{m}$ *est porté par un sous-ensemble invariant minimal du compact métrique* $\hat{\Omega}$.

Démonstration. On exploitera les propriétés d'un visiteur presque périodique $\omega$ afin de montrer que le point $\hat{\omega} = (\omega, \omega T, \ldots) \in \hat{\Omega}$ est presque périodique au sens usuel et que l'adhérence $\hat{M}$ de son orbite dans $\hat{\Omega}$ contient tous les points $\hat{\eta} = (\eta, \eta T, \ldots)$ pour lesquels $\eta \in \Omega$ est un point dont tous les $T$-images sont points de continuité des $T^n$; ces $\eta$ portent $m$, donc $\hat{M}$ porte $\hat{m}$. Or, $\hat{M}$ est un ensemble invariant minimal dans le compact $\hat{\Omega}$.

**Corollaire 6.** *Si $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$ est prèsque-périodique primitif, alors m-prèsque tout point de $\Omega$ est un visiteur prèsque périodique adapté à un ensemble E m-Riemannien prédonné.*

**Théorème 7.** *Si $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$ est un système dynamique Riemannien régulier, alors $(\hat{\Omega}, \hat{\tau}, \hat{\mathfrak{B}}, \hat{m}, \hat{T})$ est aussi un système dynamique régulier.*

Démonstration. On montre que $\hat{F} = F_0 \times \ldots \times F_n \times \Omega \times \ldots$ est $\hat{m}$-Riemannien si $F_0, \ldots, F_n$ l'est, et que $\hat{\omega}$ remplit la définition d'un visiteur régulier pour $\hat{F}$ (avec la fréquence moyenne

$$\frac{m(F_0 \cap F_1 T^{-1} \cap \ldots \cap F_n T^{-n})}{m(\Omega)}\Bigg)$$

si $\omega$ est un visiteur régulier pour $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$. Le reste en découle par des méthodes d'extension évidentes.

En combinant les idées esquissées, on démontre le

**Théorème 8.** *Si le système $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T)$ est prèsque-périodique primitif et régulier, admettant m visiteur prèsque périodique et primitif à la fois, alors $\hat{m}$ est portée par un ensemble $\hat{M} \subseteq \hat{\Omega}$ strictement ergodique.*

Remarque. On établit des résultats analogues en employant des transformations presque partout continues seulement.

## III. EXEMPLE

Soit $\Omega_0 = \{z \mid |z| = 1\}$ le tore de dimension 1, $T_0 : z \to z e^{i\alpha 2\pi}$ une translation dans $\Omega_0$, avec $\alpha$ irrationel, et $E = \{e^{i\tau 2\pi} \mid 0 \leqq \tau \leqq \beta\}$ un arc de longueur strictement positive. Katok et Stepin (1) ont montré qu'on peut choisir $\alpha$ et $\beta$ tels que la transformation $T_E$ induite sur $E$ soit faiblement mélangeante. Comme $\Omega_0$ avec $T_0$ (et la mesure de Lebesgue) est strictement ergodique, on trouve que $(\Omega, \tau, \mathfrak{B}, m, T) = (E, \tau_E, \mathfrak{B}_E, (\underset{\circ}{m})_E, T_E)$ remplit les hypothèses du théorème 8. On trouve donc, dans $\hat{\Omega}$ $(=\hat{\Omega})$ la mesure $\hat{m}$ portée par un ensemble strictement ergodique. Elle est encore faiblement mélangeante, parce que $\Phi$ constitue un isomorphisme des espaces de mesures $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ et $(\hat{\Omega}, \hat{\mathfrak{B}}, \hat{m})$, commutant avec $T$ resp. $\hat{T}$.

*Bibliographie*


[1] *Katok A. B.* et *Stepin A. M.:* Approximations en théorie ergodique. Uspehi Mat. Nauk. *XXII*, 5, 81—106. (1967) (En Russe).

[2] *Keane M.:* Generalized Morse sequences. Zeitschr. für Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. *10*, 335—353 (1968).



*Adresse de l'auteur:* Mathematisches Institut der Universität Erlangen—Nürnberg, Erlangen, Bismarckstr. $1^1/_2$, BRD.