Izu Vaisman

Sur la partie d'une hypersurface, où le tenseur asymptotique est du type hyperbolique normal

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 4, 750–757

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100935

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

SUR LA PARTIE D'UNE HYPERSURFACE, OÙ LE TENSEUR ASYMPTOTIQUE EST DU TYPE HYPERBOLIQUE NORMAL

Izu Vaisman, Jassy

(Reçu le 3 mars 1969)

1. Soit V^n $(n \geqq 2)$ une hypersurface régulière de classe C^∞ (cette classe de différentiabilité sera toujours supposée dans la suite) de l'espace euclidien E^{n+1}. Supposons qu'elle est orientée et notons par g le tenseur métrique et par b le tenseur asymptotique de celle-ci (déterminé par l'orientation). Alors, la partie de V^n où b est du type hyperbolique normal, c'est-à-dire de rang n et de forme canonique $(-, +, \ldots, +)$, est formée par les points qui, pour un indice i $(i = 1, \ldots, n)$, satisfont aux conditions

$$(1) \qquad \varkappa_i < 0\,, \quad \varkappa_\alpha > 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)\,,$$

$\varkappa_i$ étant les courbures principales de l'hypersurface. Il suit que cette partie est une sous-variété ouverte de V^n et nous nous proposons d'étudier quelques objets géométriques déterminés sur elle par la structure de l'hypersurface V^n.

Pour notre but, il suffit de considérer seulement la partie de V^n où les conditions (1), à $i = 1$, sont vérifiées. Nous la noterons par $\mathscr{H}$ et supposerons qu'elle est non vide et connexe. D'ailleurs, nous pouvons tout simplement considérer $\mathscr{H}$ comme une hypersurface non complète de E^{n+1}. Pour $i = 2, \ldots, n$, on peut faire des considérations analogues.

Dans ce qui suit, nous ferons appel à des résultats de la théorie des hypersurfaces dans un espace euclidien, pour laquelle on peut voir [3] et à des résultats sur les structures presque-produit pour lesquels nous renvoyons à [2].

Un premier élément important est le champ de directions de la courbure principale $\varkappa_1$, qui définit sur $\mathscr{H}$ un champ de vecteurs unitaires non nuls v. Pour ce champ, on a, dans des coordonnées locales, [3]

$$(2) \qquad b_{ij}v^j = -\lambda^2 v_i \quad (\lambda^2 = -\varkappa_1)\,.$$

Considérons aussi, dans chaque point de $\mathscr{H}$, l'hyperplan π formé par les vecteurs tangents à V^n et orthogonaux à v.

Il suit que $\mathscr{H}$ possède une structure presque-produit (v, π) et nous dirons que c'est la *structure presque-produit canonique* de $\mathscr{H}$. L'idée d'envisager une pareille structure pour une forme quadratique du type hyperbolique normal a été employée aussi dans [1].

Considérons sur $\mathscr{H}$ les champs de tenseurs

$$v_h^i = v^i v_h\,, \quad m_h^i = \delta_h^i - v^i v_h\,. \tag{3}$$

Il est à remarquer qu'on a alors

$$v_{ih} = v_i v_h\,, \quad m_{ih} = g_{ih} - v_i v_h\,, \tag{4}$$

qui sont des tenseurs symétriques et du rang 1 et $n - 1$ respectivement.

Alors, l'équation de l'hyperplan π est

$$v_h^i w^h = 0 \tag{5}$$

et celle de la droite de v est

$$m_h^i w^h = 0\,, \tag{6}$$

w^h étant les coordonnées d'un vecteur quelconque.

Les vecteurs colinéaires à v seront nommés *verticaux* et ceux de l'hyperplan *π-horizontaux*. Un vecteur w quelconque a une décomposition unique comme somme entre un vecteur vertical et un vecteur horizontal:

$$w^i = v_h^i w^h + m_h^i w^h\,. \tag{7}$$

L'opérateur φ qui associe à w la différence entre ses parties horizontale et verticale donne le tenseur qui définit la structure presque-produit canonique de $\mathscr{H}$ [2]. On a

$$\varphi_i^h = m_i^h - v_i^h = \delta_i^h - 2v^h v_i \tag{8}$$

et ce tenseur a la propriété

$$\varphi_i^h \varphi_h^k = \delta_i^k\,. \tag{9}$$

Donc, en résumant ces considérations nous avons le

Théorème 1. *Le domaine $\mathscr{H}$ de V^n possède une structure presque-produit canonique, définie par le tenseur* (8).

2. Passons maintenant à la considération du tenseur b_{ij} dans les points de $\mathscr{H}$.

De (3) on a

$$v_h^i + m_h^i = \delta_h^i\,,$$

d'où, en contractant avec b_{ik}, il suit

$$b_{hk} = -\lambda^2 v_h v_k + c_{hk}\,, \tag{10}$$

où

$$c_{hk} = m_h^i b_{ik} \tag{11}$$

est un tenseur symétrique, de rang $n - 1$, positivement sémidéfini (et, plus précisément, positivement défini sur π) et qui a encore la propriété

$$c_{ik} v^k = 0\,. \tag{12}$$

D'ailleurs, les équations $c_{ik} w^k = 0$ sont équivalentes à (6) et définissent aussi la droite de v.

La forme du tenseur (10) permet d'obtenir de nouvelles relations sur $\mathscr{H}$, en employant les conditions de Gauss-Codazzi [3]

$$R_{ijkh} = b_{ih} b_{jk} - b_{ik} b_{jh}\,, \tag{13}$$

$$b_{ij/k} = b_{ik/j}\,, \tag{14}$$

où la barre désigne la dérivée covariante par rapport à la connexion riemannienne de V^n.

En effet, de (10) et (13) il suit

$$R_{ijkh} = \lambda^2 (c_{ik} v_j v_h + c_{jh} v_i v_k - c_{jk} v_i v_h - c_{ih} v_j v_k) + c_{ih} c_{jk} - c_{ik} c_{jh} \tag{15}$$

et de (10) et (14) il suit

$$\lambda^2 v_i \omega_{kj} + \lambda^2 (v_k v_{i/j} - v_j v_{i/k}) + 2\lambda v_i (\lambda_j v_k - \lambda_k v_j) + c_{ijk} \tag{16}$$

où

$$c_{ijk} = c_{ij/k} - c_{ik/j}\,, \tag{17}$$

$$\omega_{kj} = v_{k/j} - v_{j/k} \tag{18}$$

et $\lambda_j = \partial \lambda / \partial x^j$.

Les plans bidimensionnels tangents à V^n dans les points de $\mathscr{H}$, qui passent par v, seront nommés *verticaux*; ceux qui sont contenus dans π-*horizontaux*. La courbure sectionnelle correspondante sera nommée respectivement *courbure verticale* et *horizontale*.

Théorème 2. *La courbure sectionnelle horizontale dans $\mathscr{H}$ est toujours positive et la courbure verticale est toujours négative.*

En effet, pour le plan horizontal défini par les vecteurs unitaires et orthogonaux ξ et η, (15) donne la courbure sectionnelle [3]

$$k(\xi, \eta) = \frac{R_{ijkh}\xi^i\eta^j\xi^k\eta^h}{(g_{ih}g_{jk} - g_{ik}g_{jh})\,\xi^i\eta^j\xi^k\eta^h} = (c_{ik}\xi^i\xi^k)(c_{jh}\eta^j\eta^h) - (c_{ih}\xi^i\eta^h)^2 \tag{19}$$

et la première conclusion suit à l'aide de l'inégalité classique de Cauchy-Schwarz, c étant positivement défini sur π.

Quant à la courbure sectionnelle du plan vertical défini par v et par le vecteur unitaire et horizontal ξ elle est égale à

$$k(v, \xi) = -\lambda^2 c_{jh}\xi^j\xi^h\,, \tag{20}$$

d'où la seconde conclusion du théorème.

Théorème 3. *Pour que la courbure verticale dans $\mathscr{H}$ soit fonction seulement du point, il faut et il suffit qu'on ait*

$$c_{jh} = \frac{k}{\lambda^2}(v_jv_h - g_{jh})\,, \tag{21}$$

où k est la courbure verticale (nécessairement négative).

En effet, en imposant la condition mentionnée sur la courbure verticale, on a

$$-\frac{\lambda^2 c_{jh}\xi^j\xi^h}{g_{jh}\xi^j\xi^h} = k$$

pour tout vecteur horizontal ξ. Ceci donne

$$(\lambda^2 c_{jh} + kg_{jh})\, m^j_k m^h_l w^k w^l = 0$$

pour tout vecteur w, donc

$$(\lambda^2 c_{jh} + kg_{jh})\, m^j_k m^h_l = 0\,,$$

condition qui est équivalente à la formule (21).

Notons maintenant

$$\begin{aligned} C_{ijkh} &= c_{ih}c_{jk} - c_{ik}c_{jh}\,, \\ G_{ijkh} &= g_{ih}g_{jk} - g_{ik}g_{jh}\,, \\ M_{ijkh} &= m_{ih}m_{jk} - m_{ik}m_{jh}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Tous ces tenseurs ont les mêmes propriétés de symétrie que le tenseur de courbure R_{ijkh}, y compris la première identité de Bianchi [3].

Alors nous pouvons obtenir le

Théorème 4. *Pour que la courbure horizontale dans $\mathscr{H}$ soit fonction seulement du point, il faut et il suffit qu'on ait*

$$C_{ijkh} = kM_{ijkh}\,, \tag{23}$$

où k est la courbure horizontale (nécessairement positive).

En effet, en imposant la condition indiquée sur la courbure horizontale, on trouve

$$(C_{ijkh} - kG_{ijkh})\,\xi^i\eta^j\xi^k\eta^h = 0$$

pour tous les vecteurs horizontaux ξ et η. Il suit alors pour toute paire de vecteurs w_1, w_2

$$(C_{ijkh} - kG_{ijkh})\,m^i_s m^j_t m^k_p m^h_q w^s_1 w^t_2 w^p_1 w^q_2 = 0\,,$$

ce qui revient à

$$(C_{ijkh} - kM_{ijkh})\,w^i_1 w^j_2 w^k_1 w^h_2 = 0\,.$$

De cette condition, à cause des propriétés de symétrie mentionnées plus haut, il suit justement (23).

En partant maintenant de la formule (16) et en contractant avec v^i, on trouve, compte tenu de la relation

$$v^i v_{i/k} = 0\,, \tag{24}$$

qui résulte de $v^i v_i = 1$:

$$\lambda^2\omega_{kj} = 2\lambda(\lambda_k v_j - \lambda_j v_k) - c_{ijk}\,. \tag{25}$$

Cette formule donne le

Théorème 5. *Si $\lambda =$ const. et c_{ij} est un champ de tenseurs récurents dans $\mathscr{H}$ ($c_{ij/k} = a_k c_{ij}$), le champ v est un gradient.*

3. Revenons maintenant à la structure presque-produit canonique de $\mathscr{H}$ et considérons sur $\mathscr{H}$ le tenseur antisymétrique

$$\sigma_{kj} = (v^l_k\delta^p_j - v^l_j\delta^p_k)\,\omega_{pl}\,. \tag{26}$$

Un calcul usuel donne pour le tenseur de structure de la structure presque-produit envisagée [2]

$$t^i_{jk} = v^i(\omega_{kj} + \sigma_{kj})\,, \tag{27}$$

d'où

Théorème 6. *La structure presque-produit canonique de $\mathscr{H}$ est intégrable si et seulement si*

$$\omega_{kj} = \sigma_{jk} . \tag{28}$$

En particulier, ceci a lieu pour $\omega_{kj} = 0$.

Corollaire. *Si les hypothèses du théorème* 4 *sont vérifiées, la structure presque-produit de $\mathscr{H}$ est intégrable.*

Remarquons aussi qu'à l'aide des formules (25) et (27), on trouve

$$\lambda^2 t^i_{jk} = \left(c_{hlk} v^l v_j - c_{hlj} v^l v_k - c_{hjk}\right) v^h v^i , \tag{29}$$

formule qui montre qu'il suffit que le tenseur c_{ij} soit récurent pour que la structure presque-produit canonique soit intégrable.

Un autre champ de tenseurs sur $\mathscr{H}$ qui présente de l'intérêt est

$$T^h_{ik} = v_{i/k} v^h - v_i v^h{}_{/k} . \tag{30}$$

A l'aide de ce champ de tenseurs, on peut définir sur $\mathscr{H}$ la connexion linéaire

$$\Gamma^h_{ik} = \left\{ {h \atop ik} \right\} + T^h_{ik} , \tag{31}$$

où $\left\{ {h \atop ik} \right\}$ sont les symboles de Christoffel de V^n. Nous dirons que la connexion (31) est la connexion presque-produit de $\mathscr{H}$ et, par un calcul direct, on trouve le

Théorème 7. *En notant par „;" la dérivée covariante par rapport à Γ, on a*

$$\varphi^j_{i;k} = 0 . \tag{32}$$

Donc, le transport par parallélisme dans la connexion Γ garde la structure presque-produit de $\mathscr{H}$.

Pour le tenseur T, on a

$$T^i_{ik} = 0 . \tag{33}$$

Si l'on suppose $T^h_{ik} = 0$, on trouve, en contractant avec v^i, $v^h_{/k} = 0$, donc, compte tenu de (27), si la connexion Γ^h_{ik} coïncide avec $\left\{ {h \atop ik} \right\}$, la structure presque-produit canonique de $\mathscr{H}$ est intégrable.

Le tenseur de torsion de la connexion Γ est

$$\tau^h_{ik} = 2\left(v^h \omega_{ik} - v^h_{[i/k]}\right) . \tag{34}$$

Il satisfait aux relations

$$\tau^i_{ik} = 0 , \quad \tau^i_{jk} v_i = \omega_{jk} , \tag{35}$$

d'où il suit que $\tau^i_{jk} = 0$ implique l'intégrabilité de la structure presque-produit canonique de $\mathscr{H}$.

Le tenseur de courbure ϱ de la connexion Γ est donné par chacune des formules

$$\varrho^i_{jkh} = R^i_{jkh} - v^s(v^i R_{sjkh} + v_j R^i{}_{skh}) + v_{j/k} v^i_{/h} - v^i_{/k} v_{j/h}\,, \tag{36}$$

$$\varrho^i_{jkh} = c_{jk} c^i_h - c^i_k c_{jh} + v_{j/k} v^i_{/h} - v^i_{/k} v_{j/h}\,, \tag{37}$$

où R est le tenseur de courbure de la métrique g. Il suit immédiatement

$$\varrho^i_{jkh} v_i = 0\,. \tag{38}$$

Aussi, la formule (37) peut s'interpréter par le

Théorème 8. *Considérons les conditions*

a) $c_{ih} c_{jk} - c_{ik} c_{jh} = 0$,
b) $v_{i/h} v_{j/k} - v_{i/k} v_{j/h} = 0$,
c) $\varrho^i_{jkh} = 0$.

Si deux de ces conditions sont vérifiées, la troisième est aussi vérifiée et, nécessairement, $n = 2$.

La dernière affirmation est une conséquence de a), qui donne rang $(c_{ij}) = 1$.

4. Considérons encore sur $\mathscr{H}$ le champ de tenseurs

$$a_{ij} = \lambda^2 v_i v_j + c_{ij}\,. \tag{39}$$

Ce champ définit sur $\mathscr{H}$ une nouvelle métrique riemannienne, positivement définie, que nous appellerons la *métrique asymptotique* de $\mathscr{H}$.

En notant

$$p^{ij} = \tilde{b}^{ih} m^j_h\,, \tag{40}$$

où, $\tilde{b}$ est le tenseur réciproque de b ($\tilde{b}^{ih} b_{ik} = \delta^h_k$), on trouve pour le tenseur réciproque de a_{ij}

$$\tilde{a}^{ij} = \frac{1}{\lambda^2} v^i v^j + p^{ij}\,. \tag{41}$$

Les symboles de Christoffel de la métrique asymptotique de $\mathscr{H}$ sont $\left\{{m \atop ik}\right\} + \theta^m_{ik}$, où

(42)
$$\theta^m_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} v^m v^j + p^{mj}\right)(2c_{ijk} + c_{jk/i}) + \frac{1}{2}\left(v^m v_{k/i} + 2\frac{\lambda_k}{\lambda} v^m v_i + \lambda^2 p^{mj} v_k v_{j/i}\right).$$

Une situation intéressante est celle où la métrique asymptotique de $\mathscr{H}$ est conforme à la métrique g. On a alors

$$\lambda^2 v_i v_j + c_{ij} = \varphi g_{ij} ,$$

d'où, en contractant avec $v^i v^j$, nous avons $\varphi = \lambda^2$ et il suit

$$c_{ik} = \lambda^2(g_{ik} - v_i v_k) \tag{43}$$

ou encore

$$b_{ik} = \lambda^2(g_{ik} - 2v_i v_k) . \tag{44}$$

Un autre cas important est celui où la longueur de tout vecteur horizontal est la même dans les métriques g et a. Il est facile de trouver la caractérisation de cette situation

$$c_{ij} = m_{ij} = g_{ij} - v_i v_j . \tag{45}$$

Les formules (43), (45) et le théorème 3 montrent que dans ces deux situations la courbure verticale de $\mathscr{H}$ dépend seulement du point et elle est égale respectivement à $-\lambda^4$ et $-\lambda^2$. Aussi (théorème 4), la combure horizontale de $\mathscr{H}$ dépend seulement du point et elle est égale respectivement à λ^4 et 1.

Bibliographie

[1] *Cattaneo Gasparini I.:* Alcune considerazioni globali su una varietà compatta a metrica indefinita. Atti Acad. Lincei, XL (1966), p. 804—811.

[2] *Legrand G.:* Étude d'une généralisation des structures presque-complexes sur les variétés différentiables. Rend. Circ. Mat. di Palermo, 7 (1958), p. 323—354, 8 (1959), p. 5—48.

[3] *Schouten J. A.:* Ricci Calculus, Springer Verlag, Berlin, 1954.

Adresse de l'auteur: Séminaire Mathématique „A. Myller“, Université „Al. I. Cuza“, Jassy, Roumanie.