Czechoslovak Mathematical Journal

Štefan Schwabik

# Stetige Abhängigkeit von einem Parameter und invariante Mannigfaltigkeiten für verallgemeinerte Differentialgleichungen

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 19 (1969), No. 3, 398–427

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100912`

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

# STETIGE ABHÄNGIGKEIT VON EINEM PARAMETER UND INVARIANTE MANNIGFALTIGKEITEN FÜR VERALLGEMEINERTE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Eingegangen am 25. April 1968)

Diese Arbeit ist dem Studium der, von JAROSLAV KURZWEIL abstammenden, verallgemeinerten Differentialgleichungen gewidmet. Insbesondere werden Fragen der stetigen Abhängigkeit von einem Parameter und der Existenz einer invarianten Mannigfaltigkeit für diese Gleichungen untersucht. Die erzielten Ergebnisse werden dann für die Untersuchung eines Differentialgleichungssystems mit Impulsen benutzt.

## 1. Grundbegriffe und Bezeichnungen

$E_n$ bezeichne den $n$-dimensionalen euklidischen Raum mit der üblichen Norm $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$. $M \subset E_n$ sei eine offene Menge und $G = M \times (-\infty, +\infty) = M \times E_1$ sei das kartesische Produkt der Mengen $M$ und $E_1$. Sei $F(x, t) : G \to E_n$ eine Abbildung der Menge $G$ in $E_n$. Wir bezeichnen $\Delta_t^\sigma F(x, \tau) = F(x, \tau + \sigma) - F(x, \tau)$ und $\Delta_x^z F(y, t) = F(y + z, t) - F(y, t)$. Weiter bezeichne $h(t)$ (eventuell mit einem Index versehen) eine reelle, auf $E_1$ definierte Funktion, die nichtfallend und von links stetig in $E_1$ ist.

Es sei $\mathscr{F}(G, h)$ eine Klasse von Funktionen, die $G$ in $E_n$ abbilden, welche folgenderweise definiert ist: Es ist $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$, wenn

$$(1,1) \quad \|\Delta_t^{t_2 - t_1} F(x, t_1)\| \leqq |h(t_2) - h(t_1)| \quad \text{für} \quad (x, t_i) \in G,\ i = 1, 2\,;$$

$$(1,2) \quad \|\Delta_t^{t_2 - t_1} \Delta_x^y F(x, t_1)\| \leqq \|y\| \,.\, |h(t_2) - h(t_1)| \quad \text{für} \quad (x, t_i), (x + y, t_i) \in G,\ i = 1, 2$$

gilt.

Bezeichne weiter $\omega(\eta)$ (eventuell mit einem Index versehen) eine reelle nichtfallende, für $\eta \geqq 0$ definierte, Funktion, die im Punkte $\eta = 0$ von rechts stetig ist und für die $\omega(0) = 0$ gilt. Wie definieren die Klasse $\mathscr{F}^*(G, h, \omega)$ von Funktionen, die $G$ in $E_n$

abbilden, folgenderweise: Es ist $F(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h, \omega)$ wenn $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$ ist und wenn

$$\|\Delta_t^{t_2-t_1}\Delta_x^z\Delta_x^y F(x, t_1)\| \leqq \|y\|\,\omega(\|z\|)\,|h(t_2) - h(t_1)| \tag{1,3}$$

für $(x, t_i), (x + y, t_i), (x + y + z, t_i) \in G$, $i = 1, 2$ gilt.

## 2. Verallgemeinerte Differentialgleichungen und deren Eigenschaften

Der Begriff der verallgemeinerten Differentialgleichung, and den wir da erinnern wollen, wurde am Grund einer Verallgemeinerung des Perronschen Integralbegriffes in [1] aufgebaut und wurde in den Arbeiten [2], [3] und in weiteren entwickelt.

Zuerst der Begriff des verallgemeinerten Integrales (siehe [1]): Es sei $\tau_* < \tau^*$; $\delta(\tau) > 0$ sei eine Funktion die für $\tau \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$ definiert ist und $U(\tau, t)$ sei eine reelle Funktion, deren Definitionsbereich die Ungleichungen $\tau_* \leqq \tau \leqq \tau^*$, $\tau - \delta(\tau) \leqq \leqq t \leqq \tau + \delta(\tau)$ angeben. Eine reelle Funktion $M(\tau)$, $\tau \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$ nennen wir Oberfunktion zu der Funktion $U(\tau, t)$ wenn für $\tau \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$ ein Wert $\delta'(\tau)$, $0 < \delta'(\tau) \leqq \leqq \delta(\tau)$ so existiert, dass $(\tau - \tau_0)(U(\tau_0, \tau) - U(\tau_0, \tau_0)) \leqq (\tau - \tau_0)(M(\tau) - M(\tau_0))$ für $\tau_0 - \delta'(\tau_0) \leqq \tau \leqq \tau_0 + \delta'(\tau_0)$ gilt. Eine reelle Funktion $m(\tau)$ nennen wir Unterfunktion zu der Funktion $U(\tau, t)$ im Intervall $\langle\tau_*, \tau^*\rangle$, wenn $-m(\tau)$ eine Oberfunktion zu der Funktion $-U(\tau, t)$ im Intervall $\langle\tau_*, \tau^*\rangle$ ist. Wenn es zu der Funktion $U(\tau, t)$ Oberfunktionen $M(\tau)$ und Unterfunktionen $m(\tau)$ gibt, dann gilt offenbar $M(\tau^*) - M(\tau_*) \geqq m(\tau^*) - m(\tau_*)$. Die folgende Definition ist also berechtigt:

Ist $U(\tau, t)$ so eine Funktion, dass zu $U(\tau, t)$ Oberfunktionen $M(\tau)$ und Unterfunktionen $m(\tau)$ im Intervall $\langle\tau_*, \tau^*\rangle$ existieren und ist

$$\inf_M (M(\tau^*) - M(\tau_*)) = \sup_m (m(\tau^*) - m(\tau_*)) = I\,,$$

wobei das Infimum bzw. Supremum über alle Ober- bzw. Unterfunktionen zu $U(\tau, t)$ im Intervall $\langle\tau_*, \tau^*\rangle$ genommen wird, dann ist die Funktion $U(\tau, t)$ im Kurzweilschen Sinn integrierbar und die Zahl $I$ nennen wir verallgemeinertes Integral von $U(\tau, t)$ im Intervall $\langle\tau_*, \tau^*\rangle$. Wir bezeichnen dann — ebenso wie in [1] — $I = \int_{\tau_*}^{\tau^*} DU(\tau, t)$.

**Bemerkung 2.1.** Es sei $f(\tau)$, $\tau \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$ eine endliche reelle Funktion; legen wir $U(\tau, t) = f(\tau)\, t$ für $\tau_* \leqq \tau \leqq \tau^*$, $t \in E_1$ dann existiert das Integral $\int_{\tau_*}^{\tau^*} U(\tau, t)$ genau dann wenn das Integral $\int_{\tau_*}^{\tau^*} f(\tau)\, d\tau$ im Perronschen Sinn existiert und beide Integrale sind sich gleich. Ist $\varphi(t)$ eine auf $E_1$ definierte Funktion endlicher Variation, dann existiert für die Funktion $U(\tau, t) = f(\tau)\,\varphi(t)$ das Integral $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU(\tau, t)$ genau dann, wenn das Perron-Stieltjessche Integral $\int_{\tau_*}^{\tau^*} f(\tau)\, d\varphi(\tau)$ existiert und beide Integrale sind einander gleich.

Ist $U(\tau, t) = (U_1(\tau, t), \ldots, U_n(\tau, t))$ eine Vektorfunktion, dann bedeutet $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU(\tau, t)$ den Vektor $(\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU_1(\tau, t), \ldots, \int_{\tau_*}^{\tau^*} DU_n(\tau, t))$.

Weiter wird folgendes nützlich sein:

**Behauptung 2,1.** Sei $\psi(\sigma)$ eine reelle stetige nichtfallende auf $\langle\sigma_*, \sigma^*\rangle$ definierte Funktion. Setzen wir voraus, dass die Funktion $U(\tau, t)$ für $\psi(\sigma_*) \leqq \tau \leqq \psi(\sigma^*)$, $\tau - \delta(\tau) \leqq t \leqq \tau + \delta(\tau)$ $(\delta(\tau) > 0)$ für alle $\tau \in \langle\psi(\sigma_*), \psi(\sigma^*)\rangle$ definiert ist und es existiere das Integral $\int_{\psi(\sigma_*)}^{\psi(\sigma^*)} DU(\tau, t)$. Dann existiert auch das Integral $\int_{\sigma_*}^{\sigma^*} DU(\psi(\sigma), \psi(s))$ und es gilt

$$\int_{\psi(\sigma_*)}^{\psi(\sigma^*)} DU(\tau, t) = \int_{\sigma_*}^{\sigma^*} DU(\psi(\sigma), \psi(s)) .$$

Beweis. Da $\psi(\sigma)$ stetig und nichtfallend ist und der Definitionsbereich der Funktion $U(\tau, t)$ bekannt ist, kann für jedes $\sigma \in \langle\sigma_*, \sigma^*\rangle$ soein Wert $\tilde{\delta}(\sigma) > 0$ gegeben werden, dass die Funktion $U(\psi(\sigma), \psi(s))$ für $\sigma_* \leqq \sigma \leqq \sigma^*$, $\sigma - \tilde{\delta}(\sigma) \leqq s \leqq \sigma + \tilde{\delta}(\sigma)$ definiert ist. Sei nun $M(\tau)$ eine beliebige Oberfunktion zu $U(\tau, t)$ im Intervall $\langle\psi(\sigma_*), \psi(\sigma^*)\rangle$. Es gilt

$$(\sigma - \sigma_0)\left[U(\psi(\sigma_0), \psi(\sigma)) - U(\psi(\sigma_0), \psi(\sigma_0))\right] =$$

$$= \frac{\sigma - \sigma_0}{\psi(\sigma) - \psi(\sigma_0)}(\psi(\sigma) - \psi(\sigma_0))\left[U(\psi(\sigma_0), \psi(\sigma)) - U(\psi(\sigma_0), \psi(\sigma_0))\right] \leqq$$

$$\leqq \frac{\sigma - \sigma_0}{\psi(\sigma) - \psi(\sigma_0)}(\psi(\sigma) - \psi(\sigma_0))\left[M(\psi(\sigma)) - M(\psi(\sigma_0))\right] =$$

$$= (\sigma - \sigma_0)\left[M(\psi(\sigma)) - M(\psi(\sigma_0))\right],$$

sobald $\sigma$ zu $\sigma_0$ genügend nahe steht; mit anderen Worten $\tilde{M}(\sigma) = M(\psi(\sigma))$ ist eine Oberfunktion zu $U(\psi(\sigma), \psi(s))$ im Intervall $\langle\sigma_*, \sigma^*\rangle$. Ebenso kann gezeigt werden, dass wenn $m(\tau)$ eine Unterfunktion zu $U(\tau, t)$ in $\langle\psi(\sigma_*), \psi(\sigma^*)\rangle$ ist, dann ist die Funktion $\tilde{m}(\sigma) = m(\psi(\sigma))$ eine Unterfunktion zu $U(\psi(\sigma), \psi(s))$ in $\langle\sigma_*, \sigma^*\rangle$. Daher folgt nun aber sofort die Existenz des Integrales $\int_{\sigma_*}^{\sigma^*} DU(\psi(\sigma), \psi(s))$ und auch die Gleichung von der Behauptung.

In [2] wurde folgendes bewiesen (siehe Lemma 3,1 in [2]):

**Lemma 2,1.** *Sei $U(\tau, t)$ eine Funktion, deren Werte in $E_n$ liegen, so, dass $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU(\tau, t)$ existiert. Sei weiter $V(\tau, t)$ eine reelle Funktion, für die $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DV(\tau, t)$ existiert und es existiere für jedes $\tau \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$ ein $\delta(\tau) > 0$ so, dass für*

$$\tau_1 \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle \cap \langle\tau - \delta(\tau), \quad \tau + \delta(\tau)\rangle$$

*die Ungleichung*

$$|\tau_1 - \tau| \, \|U(\tau, \tau_1) - U(\tau, \tau)\| \leqq (\tau_1 - \tau)(V(\tau, \tau_1) - V(\tau, \tau))$$

*gilt. Dann ist $\left\|\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU(\tau, t)\right\| \leqq \int_{\tau_*}^{\tau^*} DV(\tau, t)$.*

*Speziell: Ist $\varphi(\tau)$ eine messbare beschränkte nichtnegative Funktion und gilt*

$$\|U(\tau, t_1) - U(\tau, t_2)\| \leqq \varphi(\tau)\,|h(t_1) - h(t_2)| \quad \text{für} \quad t_1, t_2 \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle \tag{2,1}$$

*dann ist*

$$\left\| \int_{\tau_*}^{\tau^*} DU(\tau, t) \right\| \leqq \int_{\tau_*}^{\tau^*} \varphi(\tau)\, \mathrm{d}h(\tau)\,. \tag{2,2}$$

**Bemerkung 2,2.** Die Funktion $h(t)$ erfüllt die Voraussetzungen vom Absatz 1. und das Integral $\int_{\tau_*}^{\tau^*} \varphi(\tau)\, \mathrm{d}h(\tau)$ existiert offenbar. Man benützt dann nach der Bemerkung 2,1 den Zusammenhang des verallgemeinerten Integrales mit dem Perron-Stieltjesschen Integral.

Weiter ist (Lemma 3,3 von [2]):

**Lemma 2,2.** *Hat die Funktion $h(\tau)$ die im Absatz 1. beschriebenen Eigenschaften, dann ist für $k = 0, 1, 2, \ldots$*

$$\int_{\tau_*}^{\tau^*} h^k(\tau)\, \mathrm{d}h(\tau) \leqq \frac{1}{k+1}\left[h^{k+1}(\tau^*) - h^{k+1}(\tau_*)\right], \; \tau_* < \tau^*\,; \quad \tau_*, \tau^* \in E_1\,. \tag{2,3}$$

Wir beweisen nun einen Hilfsatz, der weiter vom Nutzen sein wird:

**Lemma 2,3.** *Sei $\varphi(\tau)$ eine nichtnegative für $\tau \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$ definierte Funktion, $\varphi(\tau) < c$ für alle $\tau \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$. Seien weiter $K_1$ und $K_2$ nichtnegative Konstanten so, dass*

$$\varphi(\xi) \leqq K_1 + K_2 \int_{\tau^*}^{\xi} \varphi(\tau)\, \mathrm{d}h(\tau) \tag{2,4}$$

*für $\xi \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$ gilt. Dann ist*

$$\varphi(\tau) \leqq K_1 e^{K_2[h(\tau) - h(\tau_*)]} \tag{2,5}$$

*für $\tau \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$.*

Beweis. Wir zeigen, dass für alle $l = 0, 1, 2, \ldots$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) \leqq K_1 &\left[1 + \sum_{i=1}^{l} K_2^i \int_{\tau_*}^{\xi} \ldots \int_{\tau_*}^{\tau_3} \int_{\tau_*}^{\tau_2} \mathrm{d}h(\tau_1)\, \mathrm{d}h(\tau_2) \ldots \mathrm{d}h(\tau_i)\right] + \\ &+ K_2^{l+1} c \int_{\tau^*}^{\xi} \ldots \int_{\tau^*}^{\tau_3} \int_{\tau^*}^{\tau_2} \mathrm{d}h(\tau_1)\, \mathrm{d}h(\tau_2) \ldots \mathrm{d}h(\tau_{l+1}) = \Phi_l(\xi) \end{aligned} \tag{2,6}$$

gilt. Für $l = 0$ fällt (2,6) mit (2,4) zusammen. Es gelte (2,6) für $l = k$. Es ist $|\varphi(\tau)\,(h(t_1) - h(t_2))| \leqq \Phi_k(\tau)\,|h(t_1) - h(t_2)|$ für $t_1, t_2 \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$. Nach (2,2) ist also auch

$\int_{\tau_*}^{\xi} \varphi(\tau)\, \mathrm{d}h(\tau) \leqq \int_{\tau_*}^{\xi} \Phi_k(\tau)\, \mathrm{d}h(\tau)$ für $\xi \in \langle \tau_*, \tau^* \rangle$ und der Definition von $\Phi_k(\xi)$ nach ist

$$\int_{\tau_*}^{\xi} \Phi_k(\tau)\, \mathrm{d}h(\tau) = K_1 \left[ \int_{\tau_*}^{\xi} \mathrm{d}h(\tau) + \sum_{i=1}^{k} K_2^i \int_{\tau_*}^{\xi} \left( \int_{\tau_*}^{\tau} \dots \int_{\tau_*}^{\tau_2} \mathrm{d}h(\tau_1) \dots \mathrm{d}h(\tau_i)\, \mathrm{d}h(\tau) + \right.\right.$$

$$\left. + K_2^{k+1} c \int_{\tau_*}^{\xi} \left( \int_{\tau_*}^{\tau} \dots \int_{\tau_*}^{\tau_2} \mathrm{d}h(\tau_1) \dots \mathrm{d}h(\tau_{k+1}) \right) \mathrm{d}h(\tau) = \right.$$

$$= K_1 \left[ \int_{\tau_*}^{\xi} \mathrm{d}h(\tau) + \sum_{i=1}^{k} K_2^i \int_{\tau_*}^{\xi} \int_{\tau_*}^{\tau_{i+1}} \dots \int_{\tau_*}^{\tau_2} \mathrm{d}h(\tau_1) \dots \mathrm{d}h(\tau_{i+1}) \right] +$$

$$+ K_2^{k+1} c \int_{\tau_*}^{\xi} \int_{\tau_*}^{\tau_{k+1}} \dots \int_{\tau^*}^{\tau_2} \mathrm{d}h(\tau_1) \dots \mathrm{d}h(\tau_{k+2})\,.$$

Von (2,4) folgt

$$\varphi(\xi) \leqq K_1 + K_2 \int_{\tau_*}^{\xi} \Phi_k(\tau)\, \mathrm{d}h(\tau) =$$

$$= K_1 \left[ 1 + \sum_{i=1}^{k+1} K_2^i \int_{\tau^*}^{\xi} \dots \int_{\tau_*}^{\tau_2} \mathrm{d}h(\tau_1) \dots \mathrm{d}h(\tau_i) \right] +$$

$$+ K_2^{k+2} c \int_{\tau_*}^{\xi} \dots \int_{\tau_*}^{\tau_2} \mathrm{d}h(\tau_1) \dots \mathrm{d}h(\tau_{k+2}) = \Phi_{k+1}(\xi)$$

d. h. (2,6) gilt auch für $l = k + 1$ und so gilt die Ungleichung (2,6) für alle $l = 0, 1, 2, \dots$ Nach (2,3) ist $\int_{\tau_*}^{\xi} \dots \int_{\tau_*}^{\tau_2} \mathrm{d}h(\tau_1) \dots \mathrm{d}h(\tau_i) \leqq (1/i!)\, (h(\xi) - h(\tau_*))^i$ und also gilt

$$\varphi(\xi) \leqq K_1 \left[ 1 + \sum_{i=1}^{l} \frac{K_2^i}{i!} (h(\xi) - h(\tau_*))^i \right] + \frac{K_2^{l+1}}{(l+1)!} \left[ c(h(\xi) - h(\tau_*))^{l+1} \right].$$

Daher ergibt sich (2,5) nach dem Grenzübergang $l \to +\infty$.

Die Funktionenklasse $\mathscr{F}(G, h)$ vom Absatz 1. fällt mit der Klasse $\mathbf{F}(G, h, \omega(\eta))$ von [2] für $\omega(\eta) = \eta$ zusammen. Wir führen noch weitere Ergebnisse von [2] an, die wir zu unseren Untersuchungen brauchen werden.

Sei ein Intervall $\langle t_1, t_2 \rangle$, $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$ gegeben und sei $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \subset \langle t_1, t_2 \rangle$. Für $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ sei eine Funktion $x(\tau)$ definiert, deren Werte in $E_n$ liegen für die $(x(\tau), \tau) \in G$ ist und

$$\|x(\tau_2) - x(\tau_1)\| \leqq |h_1(\tau_2) - h_1(\tau_1)| \tag{2,7}$$

für $\tau_1, \tau_2 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ gilt. Für eine gegebene Zahl $\xi > 0$ sei $N = N(\xi, \sigma_1, \sigma_2, h_1)$ die Menge aller $t \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ für die $h_1(t_+) - h_1(t) \geqq \xi$ $(h_1(t_+) = \lim_{\tau \to t_+} h_1(\tau))$ ist. Weiter sei $A = A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, h_1)$ die Menge aller Teilungen des Intervalles $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ die

$\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\}$ bezeichnet werden und folgende Eigenschaften haben: $\sigma_1 = \alpha_0 \leqq \tau_1 \leqq \alpha_1 \leqq \ldots \leqq \alpha_{s-1} \leqq \tau_s \leqq \alpha_s = \sigma_1$, $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s$, wenn $\tau_j \notin N$ ist, dann sei $h_1(\alpha_j) - h_1(\alpha_{j-1}) < \xi$ und wenn $\tau_j \in N$ ist, dann sei $h_1(\tau_j) - h_1(\alpha_{j-1}) < \xi$, $h_1(\alpha_j) - h_1(\tau_j+) < \xi$ und $\alpha_j > \tau_j$.

In [2] (Lemma 1,1) wurde gezeigt, dass die Menge $A$ nicht leer ist und dass der folgende Existenzsatz für das Integral $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$ mit der obigen Funktion $x(\tau)$ (siehe Satz 1,1 in [2]) gilt: Ist $F(x\ t) \in \mathscr{F}(G, h)$, dann existiert das Integral $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$ und für ein beliebiges $\xi > 0$ und eine Teilung $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\} \in A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, h_1)$ gilt die Abschätzung

$$\left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t) - \sum_{j=1}^{s} \Delta_j \right\| \leqq \xi n[h(\sigma_2) - h(\sigma_1) + h_1(\sigma_2) - h_1(\sigma_1)],$$

wobei $\Delta_i = F(x(\tau_i), \alpha_i) - F(x(\tau_i), \alpha_{i-1})$ für $\tau_j \notin N$ und $\Delta_i = F(x(\tau_i+), \alpha_i) - F(x(\tau_i+), \tau_i+) + F(x(\tau_i), \tau_i+) - F(x(\tau_i), \alpha_{i-1})$ für $\tau_i \in N$.

Die obige Abschätzung folgt in [2] unmittelbar von der Beweismethode der Existenz des Integrales $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$. Es wurde dort die Existenz für die einzelnen Komponenten der Vektorfunktion bewiesen und daher kommt dann die Dimension $n$ auf der rechten Seite der Abschätzung als ein multiplikativer Faktor. Diesen Faktor kann man z. B. folgenderweise beseitigen:

In [1] (Satz 1,2,1 und Lemma 1,2,1) wurde bewiesen, dass wenn das Integral $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), h)$ existiert (dieses sichert der oben zitierte Satz von [2], wenn $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$ ist und wenn (2,7) gilt), dann kann dieses Integral mit einer beliebigen Genauigkeit durch die Summe $\sum_{l=1}^{k} [F(x(\tau_l'), \alpha_l') - F(x(\tau_l'), \alpha_{l-1}')]$ angenähert werden, wobei $\{\alpha_0', \tau_1', \ldots, \tau_k', \alpha_k'\}$,

$$\sigma_1 = \alpha_0' \leqq \tau_1' \leqq \alpha_1' \leqq \ldots \leqq \tau_k' \leqq \alpha_k' = \sigma_2, \quad \alpha_0' < \alpha_1' < \alpha_2' < \ldots < \alpha_k'$$

eine genügend feine, sonst beliebige Teilung des Intervalles $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ ist. Sei nun $\xi > 0$ gegeben und $N$ sei wie oben. Sei weiter $\{\alpha_0, \tau_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\} \in A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, h_1)$ festgelegt. Setzen wir voraus, dass für die Teilung $\{\alpha_0', \tau_1', \alpha_1', \ldots, \tau_k', \alpha_k'\}$ $N \subset \{\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_k'\}$ ist, wenn $\tau_i' \in N$ dann gelte $h(\alpha_i') - h(\tau_i'+) < \xi$ und sei $\{\alpha_0', \tau_1', \alpha_1', \ldots \ldots, \tau_k', \alpha_k'\}$ eine Verfeinerung der Teilung $\{\alpha_0, \tau_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\}$ d. h. $\tau_i \in \{\tau_1', \ldots, \tau_k'\}$ für $i = 1, 2, \ldots, s$ und $\alpha_i \in \{\alpha_0', \alpha_1', \ldots, \alpha_k'\}$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, s$; sei weiter für $j = 1, 2, \ldots, s$

$$\alpha_{j-1} = \alpha_{l_j}' \leqq \tau_{l_j+1}' \leqq \alpha_{l_j+1}' \leqq \ldots \leqq \alpha_{l_j+m_j-1}' \leqq \tau_{l_j+m_j}' = \\ = \tau_j \leqq \alpha_{l_j+m_j}' \leqq \ldots \leqq \tau_{l_j+s_j}' \leqq \alpha_{l_j+s_j}' = \alpha_j .$$

$\Delta_i$ soll dieselbe Bedeutung haben, wie im bevor zitierten Satz von [2]. Sei nun zuerst $\tau_j \notin N$. Dann gilt nach (1,2) und nachdem $\{\alpha_0, \tau_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\} \in A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, h_1)$ ist, folgendes:

$$\|\Delta_j - \sum_{l=l_j+1}^{l_j+s_j} [F(x(\tau_l'), \alpha_l') - F(x(\tau_l'), \alpha_{l-1}')]\| \leqq$$

$$\leqq \sum_{l=l_j+1}^{l_j+s_j} \|F(x(\tau_j), \alpha_l') - F(x(\tau_j), \alpha_{l-1}') - F(x(\tau_l'), \alpha_l') + F(x(\tau_l'), \alpha_{l-1}')\| \leqq$$

$$\leqq \sum_{l=l_j+1}^{l_j+s_j} \|x(\tau_j) - x(\alpha_l')\| \, [h(\alpha_l') - h(\alpha_{l-1}')] \leqq \xi[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] \, .$$

Für den zweiten möglichen Fall $\tau_j \in N$ ist aus denselben Gründen wie für den ersten Fall

$$\|\Delta_j - \sum_{l=l_j+1}^{l_j+s_j} [F(x(\tau_l'), \alpha_l') - F(x(\tau_l'), \alpha_{l-1}')] \leqq$$

$$\leqq \sum_{l=l_j+1}^{l_j+m_j-1} \|F(x(\tau_j), \alpha_l') - F(x(\tau_j), \alpha_{l-1}') - F(x(\tau_l'), \alpha_l') + F(x(\tau_l'), \alpha_{l-1}')\| +$$

$$+ \|F(x(\tau_j+), \alpha_{l_j+m_j}') - F(x(\tau_j+), \tau_j+) + F(x(\tau_j), \tau_j+) - F(x(\tau_j), \alpha_{l_j+m_j}')\| +$$

$$+ \sum_{l=l_j+m_j+1}^{l_j+s_j} \|F(x(\tau_j+), \alpha_l') - F(x(\tau_j+), \alpha_{l-1}') - F(x(\tau_l'), \alpha_l') + F(x(\tau_l'), \alpha_{l-1}')\| \leqq$$

$$\leqq \xi[h(\alpha_{l_j+m_j-1}') - h(\alpha_{j-1})] + \|x(\tau_j+) - x(\tau_j)\| \, [h(\alpha_{l_j+m_j}') - h(\tau_j+)] +$$

$$+ \xi[h(\alpha_j) - h(\alpha_{l_j+m_j}')] \leqq$$

$$\leqq \xi[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1})] + [h_1(\tau_j+) - h_1(\tau_j)] \, [h(\alpha_{l_j+m_j}') - h(\tau_j+)] \leqq$$

$$\leqq \xi[h(\alpha_j) - h(\alpha_{j-1}) + h_1(\tau_j+) - h_1(\tau_j)] \, .$$

Wenn wir also die Teilung $\{\alpha_0', \tau_1', \alpha_1', \ldots, \tau_k', \alpha_k'\}$ so fein wählen, dass die zu ihr gehörende Summe $\sum_{l=1}^{k} [F(x(\tau_k'), \alpha_l') - F(x(\tau_k'), \alpha_{l-1}')]$ das Integral $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$ vorgeschriebenerweise annähert, dann geben die obigen Ungleichungen (nach Summation über $j$) die Ungleichung

$$\|\sum_{l=1}^{k} [F(x(\tau_l'), \alpha_l') - F(x(\tau_l'), \alpha_{l-1}')] - \sum_{j=1}^{s} \Delta_j\| \leqq \xi[h(\sigma_2) - h(\sigma_1) + h_1(\sigma_2) - h_1(\sigma_1)]$$

d. h. es gilt

$$\left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t) - \sum_{j=1}^{s} \Delta_j \right\| \leqq \xi[h(\sigma_2) - h(\sigma_1) + h_1(\sigma_2) - h_1(\sigma_1)] + \varepsilon$$

für jedes positive $\varepsilon$. Es gilt also der folgende

**Satz.** *Sei* $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$ *und die Funktion* $x(\tau), \tau \in \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$ *erfülle* (2,7). *Dann existiert das Integral* $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$ *und es gibt ein* $\xi_0 > 0$ *so dass für* $0 < \xi < \xi_0$ *und eine beliebige Teilung* $\{\alpha_0, \tau_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\} \in A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, h_1)$

$$\left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t) - \sum_{j=1}^{s} \Delta_j \right\| \leqq \xi[h(\sigma_2) - h(\sigma_1) + h_1(\sigma_2) - h_1(\sigma_1)], \tag{2,8}$$

*gilt,* wobei $\Delta_i = F(x(\tau_i), \alpha_i) - F(x(\tau_i), \alpha_{i-1})$ *für* $\tau_i \notin N$ *und* $\Delta_i = F(x(\tau_i+), \alpha_i) - F(x(\tau_i+), \tau_i+) + F(x(\tau_i), \tau_i+) - F(x(\tau_i), \alpha_{i-1})$ *für* $\tau_i \in N$ *ist.*

**Bemerkung 2,3.** Eine Analyse der Forderungen, die eine Teilung erfüllen muss um zu $A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, h_1)$ gehören, zeigt, dass eine zu $A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, h_1)$ gehörende Teilung von der Funktion $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$ nicht abhängt. Es ist auch zu sehen, dass man in der Menge $A(\xi, \sigma_1, \sigma_2, h_1)$ eine Teilung mit einer minimalen Anzahl der Teilungspunkte wählen kann; man kann eine Teilung $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\}$ z. B. so wählen, dass $s < 3(h_1(\sigma_2) - h_1(\sigma_1))/\xi$ ist d. h. die minimale Anzahl der Teilungspunkte wird nur von dem Zuwachs der Funktion $h_1$ auf dem Intervall $\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$ und von der Zahl $\xi$ abhängen.

Nach diesen notwendigen Begriffen und Behauptungen wenden wir uns zu der Definition der verallgemeinerten Differentialgleichungen und deren Eigenschaften.

**Definition 2,1.** (vgl. Definition 2,1,1 in [1]). Es sei $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$. Unter einer Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x, t) \tag{2,9}$$

in Intervall $\langle t_1, t_2\rangle$ verstehen wir soeine Funktion $x(\tau)$, $t_1 \leqq \tau \leqq t_2$ für die $(x(\tau), \tau) \in G$ für $\tau \in \langle t_1, t_2\rangle$ ist und $x(\sigma_2) = x(\sigma_1) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t)$ für alle $\sigma_1, \sigma_2$; $t_1 \leqq \sigma_1 < \sigma_2 \leqq t_2$ gilt.

**Lemma 2,4.** Es sei $F(x, t)$ eine auf $G$ definierte Funktion, deren Werte in $E_n$ liegen und die (1,1) erfüllt. Sei $y(\tau)$ eine auf $\langle\tau_3, \tau_4\rangle$, $\tau_3 < \tau_4$ definierte Funktion so, dass $(y(\tau), \tau) \in G$ für $\tau \in \langle\tau_3, \tau_4\rangle$ ist und das Integral $\int_{\tau_3}^{\tau_4} DF(y(\tau), t)$ existiere. Dann ist $\|\int_{\tau_3}^{\tau_4} DF(y(\tau), t)\| \leqq h(\tau_4) - h(\tau_3)$. Ist speziell $x(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (2,9) in Intervall $\langle t_1, t_2\rangle$ dann ist

$$\|x(\tau_4) - x(\tau_3)\| \leqq h(\tau_4) - h(\tau_3) \tag{2,10}$$

für alle $\tau_3, \tau_4 \in \langle t_1, t_2\rangle$, $\tau_3 < \tau_4$.

Beweis (ist in [2], Lemma 2,1 angeführt). Ein anderer Beweis ist: Von (1,1) und (2,2) ist sofort $\|\int_{\tau_3}^{\tau_4} DF(y(\tau), t)\| \leqq \int_{\tau_3}^{\tau_4} \mathrm{d}h(\tau) = h(\tau_4) - h(\tau_3)$. Die Ungleichung (2,10) für den Spezialfall einer Lösung ist eine Folgerung der eben bewiesenen Ungleichung und der Definition 2,1.

Setzen wir voraus, dass $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$ und bezeichnen wir $G_F$ die Menge aller $(x, t) \in G$, für die $(x + F(x, t+) - F(x, t), t) \in G$ ist, wobei $F(x, t+) = \lim_{\tau \to t+} F(x, \tau)$. Wählen wir einen Punkt $(x_0, t_0) \in G_F$ und ein $\sigma > 0$ so, dass $(x, \tau) \in G_F$ ist, sobald $t_0 \leqq \tau \leqq t_0 + \sigma$, $\|x - x_1\| \leqq h(\tau) - h(t_0+)$ wo $x_1 = x_0 + F(x_0, t_0+) - F(x_0, t_0)$. Soein $\sigma > 0$ kann man offenbar finden. Unter diesen Voraussetzungen existiert im Intervall $\langle t_0, t_0 + \sigma \rangle$ eine Lösung der Gleichung (2,9), für die $x(t_0) = x_0$ ist. (Diese Behauptung ist der Inhalt des Satzes 2,1 in [2].)

Im weiteren bezeichnen wir die Lösung der Gleichung (2,9) mit der Anfangsbedingung $\tilde{x}$ im Augenblick $\tilde{\tau}$ mit $x(\tilde{x}, \tilde{\tau}, \tau)$ (bzw. $x(\tilde{x}, \tau)$ wenn es klar ist, welches $\tilde{\tau}$ gemeint wird). Es wird also $x(\tilde{x}, \tilde{\tau}, \tilde{\tau}) = \tilde{x}$ (bzw. $x(\tilde{x}, \tilde{\tau}) = \tilde{x}$) sein.

**Satz 2,1.** *Wenn $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$ ist und wenn $x(\tilde{x}, t_1, \tau)$, $x(\tilde{y}, t_1, \tau)$ Lösungen der Gleichung (2,9) im Intervall $\langle t_1, t_2 \rangle$ sind, dann gilt*

$$\|x(\tilde{x}, t_1, \tau) - x(\tilde{y}, t_1, \tau)\| \leqq \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \, e^{h(\tau) - h(t_1)} \tag{2,11}$$

*für jedes $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$.*

Beweis. Der Definition einer Lösung der Gleichung (2,9) zufolge ist

$$x(\tilde{x}, t_1, \sigma) - x(\tilde{y}, t_1, \sigma) = \tilde{x} - \tilde{y} + \int_{t_1}^{\sigma} D[F(x(\tilde{x}, t_1, \tau), t) - F(x(\tilde{y}, t_1, \tau), t)] =$$

$$= \tilde{x} - \tilde{y} + \int_{t_1}^{\sigma} D[\Delta_x^{x(\tilde{x}, t_1, \tau) - x(\tilde{y}, t_1, \tau)} F(x(\tilde{y}, t_1, \tau), t)]$$

für $\sigma \in \langle t_1, t_2 \rangle$. Nach (1,2) ist für $t_3, t_4 \in \langle t_1, t_2 \rangle$

$$\|\Delta_t^{t_4 - t_3} \Delta_x^{x(\tilde{x}, t_1, \tau) - x(\tilde{y}, t_1, \tau)} F(x(\tilde{y}, t_1, \tau), t_3)\| \leqq \|x(\tilde{x}, t_1, \tau) - x(\tilde{y}, t_1, \tau)\| \, |h(t_4) - h(t_3)| \, .$$

Die Funktion $\|x(\tilde{x}, t_1, \tau) - x(\tilde{y}, t_1, \tau)\|$ ist beschränkt (vgl. (2,10)), nichtnegativ und messbar. Vom Lemma 2.1 ergibt sich so

$$\left\| \int_{t_1}^{\sigma} D[\Delta_x^{x(\tilde{x}, t_1, \tau) - x(\tilde{y}, t_1, \tau)} F(x(\tilde{y}, t_1, \tau), t)] \right\| \leqq \int_{t_1}^{\sigma} \|x(\tilde{x}, t_1, \tau) - x(\tilde{y}, t_1, \tau)\| \, \mathrm{d}h(\tau)$$

und also auch $\|x(\tilde{x}, t_1, \sigma) - x(\tilde{y}, t_1, \sigma)\| \leqq \|\tilde{x} - \tilde{y}\| + \int_{t_1}^{\sigma} \|x(\tilde{x}, t_1, \tau) - x(\tilde{y}, t_1, \tau)\| \, \mathrm{d}h(\tau)$. Daher und vom Lemma 2,3 folgt (2,11).

**Bemerkung 2,4.** Der Satz 2,1 fällt mit dem Satz 3,1 aus [2] zusammen. Von (2,11) folgt für $\tilde{x} = \tilde{y}$ auch $x(\tilde{x}, t_1, \tau) = x(\tilde{y}, t_1, \tau)$ für $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$; dadurch ist also die Eindeutigkeit der Lösungen der Gleichung (2,9) für wachsende Werte von $\tau$ (die sogenannte Eindeutigkeit vorwärts) beweisen; für fallendes $\tau$ muss die Lösung nicht eindeutig bestimmt sein (in [2] führt J. Kurzweil ein Beispiel an, wo diese Eigenschaft gezeigt wird (siehe die Bemerkung 2,1 in [2])). Ebenso wie auch in der klassischen

Theorie kann eine Lösung fortgesetzt werden (nach vorne bzw. rechts) und man kann über vollkommene „Lösungskurven“ sprechen.

**Satz 2,2.** *Es sei* $F(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h, \omega)$ *und seien* $x(\tilde{u} + \tilde{y}, \tau)$, $x(\tilde{u}, \tau)$, $x(\tilde{v} + \tilde{y}, \tau)$, $x(\tilde{v}, \tau)$ *Lösungen der Gleichung* (2,9) *im Intervall* $\langle t_1, t_2 \rangle$ *für die* $x(\tilde{u} + \tilde{y}, t_1) = \tilde{u} + \tilde{y}$, $x(\tilde{u}, t_1) = \tilde{u}$, $x(\tilde{v} + \tilde{y}, t_1) = \tilde{v} + \tilde{y}$, $x(\tilde{v}, t_1) = \tilde{v}$ *ist .Dann ist*

$$(2,12) \qquad \|x(\tilde{u} + \tilde{y}, \tau) - x(\tilde{u}, \tau) - x(\tilde{v} + \tilde{y}, \tau) + x(\tilde{v}, \tau)\| \leqq \|\tilde{y}\| \, \eta(\|\tilde{u} - \tilde{v}\|, \tau)$$

*für* $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$, *wo* $\eta(\sigma, \tau)$ *eine für* $(\sigma, \tau) \in \langle 0, +\infty) \times \langle t_1, t_2 \rangle$ *definierte Funktion ist, die stetig im Punkte* 0 *inbezug auf die Veränderliche* $\tau$, *nichtfallend in* $\sigma$ *für jedes* $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$, *nichtfallend in* $\tau$ *für jedes* $\sigma \geqq 0$ *ist und für die* $\eta(0, \tau) = 0$ *für* $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$ *ist.*

Beweis. Von der Definition der Lösung Gleichung (2,9) ist für $\xi \in \langle t_1, t_2 \rangle$

$$x(\tilde{u} + \tilde{y}, \xi) - x(\tilde{u}, \xi) - x(\tilde{v} + \tilde{y}, \xi) + x(\tilde{v}, \xi) =$$
$$= \int_{t_1}^{\xi} D[F(x(\tilde{u} + \tilde{y}, \tau), t) - F(x(\tilde{u}, \tau), t) - F(x(\tilde{v} + \tilde{y}, \tau), t) + F(x(\tilde{v}, \tau), t)] \,.$$

Weiter ist

$$\Delta_t^{t_4 - t_3}[F(x(\tilde{u} + \tilde{y}, \tau), t_3) - F(x(\tilde{u}, \tau), t_3) - F(x(\tilde{v} + \tilde{y}, \tau), t_3) + F(x(\tilde{v}, \tau), t_3)] =$$
$$= \Delta_t^{t_4 - t_3} \Delta_x^{x(\tilde{u}, \tau) - x(\tilde{v}, \tau)} \Delta_x^{x(\tilde{v} + \tilde{y}, \tau) - x(\tilde{v}, \tau)} F(x(\tilde{v}, \tau), t_3) -$$
$$- \Delta_t^{t_4 - t_3} \Delta_x^{x(\tilde{v} + \tilde{y}, \tau) - x(v, \tau) - x(\tilde{u} + \tilde{y}, \tau) + x(\tilde{u}, \tau)} F(x(\tilde{u} + \tilde{y}, \tau), t_3) \,, \quad t_3, t_4 \in \langle t_1, t_2 \rangle \,.$$

Daher ergibt sich nach (1,2), (1,3) und (2,11) die Ungleichung

$$\|\Delta_t^{t_4 - t_3}[F(x(\tilde{u} + \tilde{y}, \tau), t_3) - F(x(\tilde{u}, \tau), t_3) - F(x(\tilde{v} + \tilde{y}, \tau), t_3) + F(x(\tilde{v}, \tau), t_3)]\| \leqq$$
$$\leqq \omega(\|\tilde{u} - \tilde{v}\| \, e^{h(\tau) - h(t_1)}) \, \|\tilde{y}\| \, e^{h(\tau) - h(t_1)} |h(t_4) - h(t_3)| +$$
$$+ \|x(\tilde{u} + \tilde{y}, \tau) - x(\tilde{u}, \tau) - x(\tilde{v} + \tilde{y}, \tau) + x(\tilde{v}, \tau)\| \, |h(t_4) - h(t_3)| \,.$$

Bezeichnet man noch $C = h(t_2) - h(t_1)$ dann geben Lemma 2,1 und 2,3

$$\|x(\tilde{u} + \tilde{y}, \xi) - x(\tilde{u}, \xi) - x(\tilde{v} + \tilde{y}, \xi) + x(\tilde{v}, \xi)\| \leqq$$
$$\leqq \|\tilde{y}\| \, \omega(\|\tilde{u} - \tilde{v}\| \, e^C) \, e^C C e^{h(\xi) - h(t_1)} \,.$$

Legt man da $\eta(\sigma, \tau) = \omega(\sigma e^C) \, e^C C e^{h(\tau) - h(t_1)}$, so erhält man (2,12).

**Bemerkung 2,5.** Nach der Arbeit [8] von I. Vrkoč kann nach 2,12 behauptet werden, dass für den im Satz 2,2 gegebenen Fall die Lösungen der Gleichung 2,9 nach den Anfangsbedingungen $\tilde{x}$ stetig differenzierbar sind.

## 3. Stetige Abhängigkeit von einem Parameter

Wir beweisen zuerst folgenden

**Satz 3,1.** *Sei* $-\infty < t_1 < t_2 + \infty$; $F_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, h_0)$, $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$. *Setzen wir voraus, dass*

$$\sup_{(x,t)\in M\times\langle t_1,t_2\rangle} \|F(x, t) - F_0(x, t)\| < \varepsilon . \tag{3,1}$$

*Sei weiter* $x_0(\tilde{x}_0, t_1, \tau) = x_0(\tau)$ *eine Lösung der Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF_0(x, t) \tag{3,2}$$

*im Intervall* $\langle t_1, t_2\rangle$ *und sei* $x(\tilde{x}, t_1, \tau) = x(\tau)$ *eine Lösung der Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x, t) \tag{3,3}$$

*im Intervall* $\langle t_1, t_2\rangle$. *Dann gilt für ein beliebiges* $\zeta > 0$

$$\|x(\sigma) - x_0(\sigma)\| \leqq K_1\|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| + K_2\varepsilon + \zeta \tag{3,4}$$

*für jedes* $\sigma \in \langle t_1, t_2\rangle$, *wobei die Zahl* $K_1 \geqq 0$ *nur von der Differenz* $h(t_2) - h(t_1)$ *abhängt und die Zahl* $K_2 \geqq 0$ *hängt von* $\zeta$ *und von den Differenzen* $h(t_2) - h(t_1)$, $h_0(t_2) - h_0(t_1)$ *ab.*

Beweis. Sei $\sigma \in \langle t_1, t_2\rangle$. De Definition einer Lösung nach ist

$$\|x(\sigma) - x_0(\sigma)\| = \left\|\tilde{x} - \tilde{x}_0 + \int_{t_1}^{\sigma} D[F(x(\tau), t) - F_0(x_0(\tau), t)]\right\| \leqq$$

$$\leqq \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| + \left\|\int_{t_1}^{\sigma} D[F(x(\tau), t) - F(x_0(\tau), t)]\right\| + \left\|\int_{t_1}^{\sigma} D[F(x_0(\tau), t) - F_0(x_0(\tau), t)]\right\| .$$

Nach (1,2) ist

$$\|\Delta_t^{t_4-t_3}[F(x(\tau), t_3) - F(x_0(\tau), t_3)]\| = \|\Delta_t^{t_4-t_3}\Delta_x^{x(\tau)-x_0(\tau)}F(x_0(\tau), t_3)\| \leqq$$

$$\leqq \|x(\tau) - x_0(\tau)\|\, |h(t_4) - h(t_3)| \quad \text{für} \quad t_3, t_4 \in \langle t_1, t_2\rangle .$$

Wählen wir weiter beliebig eine Zahl $\zeta_1 > 0$. Der Ungleichung (2,8) zufolge gibt es soeine ganze Zahl $s$ dass man nach (3,1)

$$\left\|\int_{t_1}^{\sigma} D[F(x_0(\tau), t) - F_0(x_0(\tau), t)]\right\| \leqq 4\varepsilon s + \zeta_1$$

schreiben kann. Die ganze Zahl $s$ hängt mit der Anzahl der Teilpunkte der Teilung zusammen, die die Abschätzung des Integrales $\int_{t_1}^{\sigma} D[F(x_0(\tau), t) - F_0(x_0(\tau), t)]$ nach (2,8) gibt. Die Zahl $s$ bzw. die zugehörige Teilung kann so gewählt werden, dass diese nur von der Zahl $\zeta_1$ und der Differenz $h_0(t_2) - h_0(t_1)$ abhängen wird (vgl. Bemerkung 2,3). Das Lemma 2,1 (Beziehung (2,2)) liefert so die folgende Ungleichung:

$$\|x(\sigma) - x_0(\sigma)\| \leqq \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| + \int_{t_1}^{\sigma} \|x(\tau) - x_0(\tau)\| \, dh(\tau) + 4\varepsilon s + \zeta_1 .$$

Mit Rücksicht auf (2,9) ist $\|x(\tau) - x_0(\tau)\|$ eine beschränkte und messbare Funktion und Lemma 2,3 gibt also die Ungleichung

$$\|x(\sigma) - x_0(\sigma)\| \leqq (\|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| + 4\varepsilon s + \zeta_1)\, e^{h(\sigma) - h(t_1)} .$$

Wählen wir nun zu gegebenem $\zeta > 0$ die Zahl $\zeta_1$ so, dass $0 < \zeta_1 < \zeta/e^{h(t_2) - h(t_1)}$ und legen wir $K_2 = 4se^{h(t_2) - h(t_1)}$, $K_1 = e^{h(t_2) - h(t_1)}$ so bekommen wir sofort die Ungleichung (3,4).

**Folgerung 3,1.** *Sind die Voraussetzungen des Satzes* 3,1 *erfüllt, dann gibt es für jedes* $\eta > 0$ *ein* $\delta > 0$ *so, dass für* $\|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| < \delta$ *und* $\varepsilon < \delta$ *die Ungleichung*

$$\|x(\sigma) - x_0(\sigma)\| < \eta \tag{3,5}$$

*für alle* $\sigma \in \langle t_1, t_2 \rangle$ *gilt.*

Beweis. Im Satz 3,1 legen wir $\zeta < \eta/2$; zu diesem $\zeta$ bestimmen wir dem Satz 3,1 nach die Konstante $K_2$ und wählen dann $0 < \delta < \min(\eta/4K_1, \eta/4K_2)$.

**Bemerkung 3,1.** Ersetzen wir im Satz 3,1 die Voraussetzung (3,1) durch die Ungleichung

$$\|\Delta_t^{t_4 - t_3}[F(x, t_3) - F_0(x, t_3)]\| \leqq \varepsilon |h_1(t_4) - h_1(t_3)| \quad \text{für} \quad x \in M\,, \quad t_3, t_4 \in \langle t_1, t_2 \rangle\,,$$

dann liefert die direkte Anwendung vom Lemma 2,3 statt (3,4) die Abschätzung

$$\|x(\sigma) - x_0(\sigma)\| \leqq [\|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| + \varepsilon(h_1(t_2) - h_1(t_1))]\, e^{h(\sigma) - h(t_1)} .$$

**Satz 3.2.** *Es sei* $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$, $F_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, h_0)$, $F(x, t) \in \mathscr{F}(G, h)$ *und sei* (3,1) *erfüllt. Setzen wir voraus, dass* $x_0(\tilde{x}_0, t_1, \tau) = x_0(\tau)$ *eine derartige Lösung* der Gleichung (3,2) *im Intervall* $\langle t_1, t_2 \rangle$ *ist, dass es ein* $\varrho > 0$ *gibt, für welches* $(x_0(\tau), \tau)$, $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$ *in* $G$ *zusammen mit seiner* $\varrho$ – *Umgebung liegt*[1]). *Wenn die Werte* $\varepsilon > 0$ *und* $\|\tilde{x} - \tilde{x}_0\|$ *genügend klein sind, dann existiert eine Lösung* $x(\tilde{x}, t_1, \tau) = x(\tau)$ *der Gleichung* (3,3) *im Intervall* $\langle t_1, t_2 \rangle$ *und für* $\eta > 0$ *gilt die Abschätzung* (3,5).

[1]) d. h. für jedes $t_0 \in \langle t_1, t_2 \rangle$ gilt: ist $|t - t_0| < \varrho$, $\|y - x_0(t_0)\| < \varrho$ dann ist auch $(y, t) \in G$.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $(\tilde{x} + F(\tilde{x}, t_1+) - F(\tilde{x}, t_1), t_1) \in G$ d. h. $(\tilde{x}, t_1) \in \in G_F$ ist, damit man den Existenzsatz für die Lösung der Gleichung (3,3) verwenden kann. Es ist

$$\tilde{x} + F(\tilde{x}, t_1+) - F(\tilde{x}, t_1) =$$
$$= \tilde{x}_0 + \tilde{x} - \tilde{x}_0 + F(\tilde{x}, t_1+) - F(\tilde{x}, t_1) - F_0(\tilde{x}, t_1+) + F_0(\tilde{x}, t_1) + F_0(\tilde{x}, t_1+) -$$
$$- F_0(\tilde{x}, t_1) - F_0(\tilde{x}_0, t_1+) + F_0(\tilde{x}_0, t_1) + F_0(\tilde{x}_0, t_1+) - F_0(\tilde{x}_0, t_1) =$$
$$= \tilde{x}_0 + F_0(\tilde{x}_0, t_1+) - F_0(\tilde{x}_0, t_1) + z\,,$$

wo $z = \tilde{x} - \tilde{x}_0 + [F(\tilde{x}, t_1+) - F(\tilde{x}, t_1) - F_0(\tilde{x}, t_1+) + F_0(\tilde{x}, t_1)] + [F_0(\tilde{x}, t_1+) - - F_0(\tilde{x}, t_1) - F_0(\tilde{x}_0, t_1+) + F_0(\tilde{x}_0, t_1)]$. Wenn wir nun (3,1) und (1,2) benützen, dann bekommen wir

$$\|z\| \leqq \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| + 2\varepsilon + \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| \left(h_0(t_1+) - h_0(t_1)\right) =$$
$$= 2\varepsilon + \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| \left[1 + h_0(t_1+) - h_0(t_1)\right].$$

Wählt man $\varepsilon < \varrho/8$, $\|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| < (\varrho/4)\left[1 + h_0(t_1+) - h_0(t_1)\right]^{-1}$, dann wird $\|z\| < < \varrho/2$ sein. Der Eigenschaften der Lösungen der Gleichung (3,2) wegen ist

$$\tilde{x} + F(\tilde{x}, t_1+) - F(\tilde{x}, t_1) = \tilde{x}_0 + F_0(\tilde{x}_0, t_1+) - F_0(\tilde{x}_0, t_1) + z = x_0(t_1+) + z\,,$$

nachdem $x_0(t_1+) = \tilde{x}_0 + F_0(\tilde{x}_0, t_1+) - F_0(\tilde{x}_0, t_1)$ ist (vgl. [2]).

Da $(x_0(\tau), \tau)$ zusammen mit seiner $\varrho$-Umgebung in $G$ liegt, gilt: wenn $\|y - - x_0(t_1+)\| < \varrho$ ist, dann ist auch $(y, t_1) \in G$. Es ist aber $\|\tilde{x} + F(\tilde{x}, t_1+) - F(\tilde{x}, t_1) - - x_0(t_1+)\| = \|z\| < \varrho/2$ und also ist $(\tilde{x} + F(\tilde{x}, t_1+) - F(\tilde{x}, t_1), t_1) \in G$. Der im Absatz 2. zitierte Existenzsatz für die Lösung der Gleichung (3,3) ermöglicht ein $\sigma > 0$ derart zu wählen, dass die Lösung $x(\tilde{x}, t, \tau)$ der Gleichung (3,3) im Intervall $\langle t_1, t_1 + \sigma\rangle$ existiert. Sei nun $t_3 \in (t_1, t_2\rangle$ der grösste mögliche Wert, für welchen die Lösung $x(\tilde{x}, t_1, \tau) = x(\tau)$ im Intervall $\langle t_1, t_3\rangle$ existiert. Offenbar hat $x(t_3)$ einen Sinn. Wir setzen $t_3 < t_2$ voraus und zeigen, dass dann die Lösung der Gleichung (3,3) im Intervall $\langle t_1, t_3 + \sigma_1\rangle$ existieren muss, wo $\sigma_1 > 0$ ist; es ist also notwendig auch $t_3 = t_2$. Legen wir darum $\eta = \varrho/4$ und sei $\delta > 0$ die Zahl, welche zu $\eta$ nach der Folgerung 3,1 gehört. Nach (3,5) ist $\|x(t_3) - x_0(t_3)\| < \eta = \varrho/4$ für $\varepsilon < \delta$ und $\|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| < \delta$. Ebenso wie am Anfang des Beweises kann man nun zeigen, dass $(x(t_3), t_3) \in G_F$ ist und eine weitere Benützung des Existenzsatzes ermöglicht ein derartiges $\sigma_1 > 0$ zu finden, dass die Lösung $x(x(t_3), t_3, \tau)$ der Gleichung (3,3) im Intervall $\langle t_3, t_3 + \sigma_1\rangle$ existiert. Die durch die Gleichungen: $x(\tau) = x(\tilde{x}, t_1, \tau)$ für $\tau \in \langle t_1, t_3\rangle$, $x(\tau) = x(x(t_3), t_3, \tau)$ für $\tau \in \langle t_3, t_3 + \sigma_1\rangle$ definierte Funktion $x(\tau)$ ist eine Lösung der Gleichung (3,3) im Intervall $\langle t_1, t_3, + \sigma_1\rangle$ und so existiert die Lösung $x(\tau)$ der Gleichung (3,3) im ganzen Intervall $\langle t_1, t_2\rangle$. Die Gültigkeit der Abschätzung (3,5) kommt von der Folgerung 3,1.

**Bemerkung 3,2.** Der Satz 3,2 entspricht den bekannten Sätzen über die stetige Abhängigkeit von einem Parameter für Differentialgleichungen (z. B. Satz 4,2,1 in [1], Satz 4,2 in [2], Sätze 1,1; 4,1; 7,1 in [4] und weitere).

Bezeichnen wir für $d > 0$ mit dem Symbol $M_d$ die Menge aller $x \in M$ mit der Eigenschaft, dass wenn $\|x - y\| < d$ ist, dann ist auch $y \in M$.

**Satz 3,3.** *Es sei* $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$, $F(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h, \omega)$, $F_0(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h_0, \omega_0)$ *und* $d > 0$. $x(z, \tau) = x(z, t_1, \tau)$ *bzw.* $x_0(z, \tau) = x_0(z, t_1, \tau)$ *sei eine Lösung der Gleichung* (3,3) *bzw.* (3,2) *im Intervall* $\langle t_1, t_2 \rangle$, $z \in M$ *und gelte* $\|x(z, \tau) - x_0(z, \tau)\| < \varrho$ *für* $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$, $z \in M$. *Dann gilt*

$$\|x(z_2, \tau) - x(z_1, \tau) - x_0(z_2, \tau) - x_0(z_1, \tau)\| \leqq \lambda(\varrho) \|z_2 - z_1\| \tag{3,6}$$

*für* $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$, $z_1, z_2 \in M_d$ *bei passendem* $d$, *wo* $\lambda(\varrho)$ *eine nichtfallende, für* $\varrho \geqq 0$ *definierte Funktion ist und* $\lim_{\varrho \to 0+} \lambda(\varrho) = 0$ *gilt.*

Beweis. Für $z_1 = z_2$ ist (3,6) trivial erfüllt. Es seien $\eta(\sigma, \tau)$, $\eta_0(\sigma, t)$ Funktionen, die für die Funktionen $F(x, t)$, $F_0(x, t)$ der Satz 2,2 bestimmt. Legen wir $H(\sigma) = \eta(\sigma, t_2) + \eta_0(\sigma, t_2)$; die Funktion $H(\sigma)$ ist für $\sigma \geqq 0$ definiert, nichtfallend und es ist $\lim_{\sigma \to 0+} H(\sigma) = 0$. Legen wir weiter $\varrho_1 = d^2/4$ und definieren $\lambda(\varrho) = 3\varrho^{1/2} + H(2\varrho^{1/2})$ für $\varrho \in \langle 0, \varrho_1 \rangle$ und $\lambda(\varrho) = \max(\lambda(\varrho_1), e^{h(t_2) - h(t_1)} + e^{h_0(t_2) - h_0(t_1)})$ für $\varrho > \varrho_1$. Die derart definierte Funktion $\lambda(\varrho)$ hat die im Satz verlangten Eigenschaften. Dem Satz 2,1 zufolge ist $\|x(z_1, \tau) - x(z_2, \tau)\| \leqq \|z_2 - z_1\| \, e^{h(t_2) - h(t_1)}$ und $\|x_0(z_1, \tau) - x_0(z_2, \tau)\| \leqq \|z_2 - z_1\| \, e^{h_0(t_2) - h_0(t_1)}$ für $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$. Wenn $\varrho > \varrho_1$ ist, ist (3,6) erfüllt; wenn $2\varrho \leqq \lambda(\varrho) \|z_2 - z_1\|$ ist, dann ist (3,6) wieder — der Voraussetzung nach — erfüllt. Setzen wir nun voraus, dass $\tilde{\varrho}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{\tau}; 0 < \tilde{\varrho} \leqq \varrho_1, 0 < \|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \leqq 2\tilde{\varrho}/\lambda(\tilde{\varrho})$, $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in M_d$, $\tilde{\tau} \in \langle t_1, t_2 \rangle$ so existieren, dass

$$\|x(\tilde{z}_2, \tilde{\tau}) - x(\tilde{z}_1, \tilde{\tau}) - x_0(\tilde{z}_2, \tilde{\tau}) - x_0(\tilde{z}_1, \tilde{\tau})\| \geqq \lambda(\tilde{\varrho}) \|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|$$

ist. Von (2,12) im Satz 2,2 folgt

$$\begin{aligned} &\|x(\tilde{z}_1 + (j + 1)(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), \tilde{\tau}) - x(\tilde{z}_1 + j(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), \tilde{\tau}) - x(\tilde{z}_2, \tilde{\tau}) + x(\tilde{z}_1, \tilde{\tau})\| \leqq \\ &\leqq \|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| . \, \eta(j\|z_2 - \tilde{z}_1\|, t_2) \end{aligned}$$

für jede natürliche Zahl $j$ für die $j\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| < d$ ist. Daher

$$\begin{aligned} &\|x(\tilde{z}_1 + k(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), \tilde{\tau}) - x(\tilde{z}_1, \tilde{\tau}) - k[x(\tilde{z}_2, \tilde{\tau}) - x(\tilde{z}_1, \tilde{\tau})]\| \leqq \\ &\leqq \sum_{j=0}^{k-1} \|x(\tilde{z}_1 + (j + 1)(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), \tilde{\tau}) - x(\tilde{z}_1 + j(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), \tilde{\tau}) - x(\tilde{z}_2, \tilde{\tau}) + x(\tilde{z}_1, \tilde{\tau})\| \leqq \\ &\leqq \sum_{j=0}^{k-1} \|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, \eta(j\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|, t_2) \leqq k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, \eta(k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|, t_2) \end{aligned}$$

für jede natürliche Zahl $k$ für die $k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| < d$ ist. Ebenso für $x_0(z, \tau)$ ist

$$\begin{aligned} &\|x_0(\tilde{z}_1 + k(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), \tilde{\tau}) - x_0(\tilde{z}_1, \tilde{\tau}) - k[x_0(\tilde{z}_2, \tilde{\tau}) - x_0(\tilde{z}_1, \tilde{\tau})]\| \leqq \\ &\leqq k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, \eta_0(k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|, t_2) \end{aligned}$$

für jede derartige natürliche Zahl $k$, dass $k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| < d$ ist. Daher weiter ist

$$\|x(\tilde{z}_1 + k(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), \tilde{\tau}) - x_0(\tilde{z}_1 + k(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), \tilde{\tau}) - x(\tilde{z}_1, \tilde{\tau}) + x_0(\tilde{z}_1, \tilde{\tau}) - \\ - k[x(\tilde{z}_2, \tilde{\tau}) - x(\tilde{z}_1, \tilde{\tau}) - x_0(\tilde{z}_2, \tilde{\tau}) + x_0(\tilde{z}_1, \tilde{\tau})]\| \leqq \\ \leqq k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, H(k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|)$$

und also

$$\|x(\tilde{z}_1 + k(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), \tilde{\tau}) - x_0(\tilde{z}_1 + k(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1, \tilde{\tau})\| \geqq \\ \geqq k\|x(\tilde{z}_2, \tilde{\tau}) - x(\tilde{z}_1, \tilde{\tau}) - x_0(\tilde{z}_2, \tilde{\tau}) + x_0(\tilde{z}_1, \tilde{\tau})\| - \\ - \|x(\tilde{z}_1, \tilde{\tau}) - x_0(\tilde{z}_1, \tilde{\tau})\| - k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, H(k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|) \geqq \\ \geqq k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, \lambda(\tilde{\varrho}) - \tilde{\varrho} - k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, H(k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|) = \\ = k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, (3\tilde{\varrho}^{1/2} + H(2\tilde{\varrho}^{1/2})) - \tilde{\varrho} - k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, H(k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|)$$

für jede natürliche Zahl $k$, für welche $k\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| < d$ ist. Nachdem $\tilde{\varrho} \leqq \mathrm{d}^2/4$ und $\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \leqq 2\tilde{\varrho}/\lambda(\tilde{\varrho}) = 2\tilde{\varrho}/(3\tilde{\varrho}^{1/2} + H(2\tilde{\varrho}^{1/2})) \leqq \frac{2}{3}\tilde{\varrho}^{1/2} < \tilde{\varrho}^{1/2} < d/2$ ist, gibt es eine natürliche Zahl $l$ so, dass $\tilde{\varrho}^{1/2} \leqq l\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1 \leqq \|2\tilde{\varrho}^{1/2} \leqq d$ ist und also

$$\|x(\tilde{z}_1 + l(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), \tilde{\tau}) - x_0(\tilde{z}_1 + l(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), \tilde{\tau})\| \geqq \\ \geqq l\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, (3\tilde{\varrho}^{1/2} + H(2\tilde{\varrho}^{1/2})) - \tilde{\varrho} - l\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, H(l\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|) \geqq \\ \geqq 3l\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\| \, \tilde{\varrho}^{1/2} - \tilde{\varrho} \geqq 3\tilde{\varrho}^{1/2}\tilde{\varrho}^{1/2} - \tilde{\varrho} = 2\tilde{\varrho}\,.$$

Dieser Widerspruch mit der Voraussetzung beweist unseren Satz.

**Satz 3,4.** *Es sei* $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$, $F(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h, \omega)$, $F_0(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h_0, \omega_0)$ *und sei* $d > 0$ *gegeben. Setzen wir voraus, dass* (3,1) *erfüllt ist. Sei weiter* $\tilde{x} \in M_d$ *und* $\tilde{z} \in M_d$. *Wenn* $x(\tilde{x}, \tilde{\tau}) = x(\tilde{x}, t_1, \tau)$, $x(\tilde{z}, \tau) = x(\tilde{z}, t_1, \tau)$ *bzw.* $x_0(\tilde{x}, \tau) = x_0(\tilde{x}, t_1, \tau)$, $x_0(\tilde{z}, \tau) = x_0(\tilde{z}, t_1, \tau)$ *Lösungen der Gleichung* (3,3) *bzw.* (3,2) *im Intervall* $\langle t_1, t_2 \rangle$ *sind, dann ist*

$$\|x(\tilde{z}, \tau) - x(\tilde{x}, \tau) - x_0(\tilde{z}, \tau) + x_0(\tilde{x}, \tau)\| \leqq \|\tilde{z} - \tilde{x}\| \, \lambda_1(\varepsilon) \tag{3,7}$$

*für* $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$, *wo* $\lambda_1(\varepsilon)$ *eine in der rechten Umgebung der Null definierte Funktion ist und für die* $\lim_{\varepsilon \to 0+} \lambda_1(\varepsilon) = 0$ *gilt.*

Beweis. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes 3,3 und der Folgerung 3,1.

**Bemerkung 3,3.** Der Satz 3,4 entspricht den Sätzen 3,1; 6,1; 9; 1; von [4], die da für andere Gleichungstype bewiesen sind. Auch die Beweismethoden sind von den unseren verschieden und schwieriger. Mit den in [4] gebrauchten Methoden können unseren Sätzen 3,1, 3,2 und 3,4 ähnliche Sätze bewiesen werden. Es wird dabei die äquivalente Definition durch Integralsummen des verallgemeinerten Integrales benützt und es wird von der Ungleichung (2,8) vom Absatz 2. ausgegangen. Der Vollständigkeit wegen führen wir da ohne Beweis einen Satz und ein Lemma an, die dem Satz 2,1 und dem Lemma 1,1 in [4] entsprechen und die man, wie es oben beschrieben wurde, beweisen kann.

**Satz 3,5.** *Sei* $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$, $F(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h, \omega)$, $F_0(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h_0, \omega_0)$ *und sei* $\tilde{x}, \tilde{y} \in M$. *Es sei* (3,1) *erfüllt und gelte*

$$(3,8) \qquad \|\Delta_t^{\sigma_2-\sigma_1}\Delta_x^y[F(x, \sigma_1) - F_0(x, \sigma_1)]\| \leqq \chi(\varepsilon)\, \|y\|$$

*für* $(x, \sigma_i), (x + y, \sigma_i) \in M \times \langle t_1, t_2 \rangle$, $i = 1, 2$, *wo* $\chi(\varepsilon)$ *eine für* $\varepsilon \geqq 0$ *definierte nichtfallende Funktion ist, für die* $\lim_{\varepsilon \to 0+} \chi(\varepsilon) = 0$ *gilt. Sind* $x(\tilde{x}, \tau)$, $x(\tilde{z}, \tau)$ *bzw.* $x_0(\tilde{x}, \tau)$, $x_0(\tilde{z}, \tau)$ *Lösungen der Gleichung* (3,3) *bzw.* (3,2) *im Intervall* $\langle t_1, t_2 \rangle$, *dann gilt* (3,7) *für* $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$.

**Lemma 3,1.** *Sei* $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$, $F(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h, \omega)$, $F_0(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h_0, \omega_0)$ *und es gelte* (3,1). *Dann existiert eine Funktion* $\chi(\varepsilon)$ *die für* $\varepsilon > 0$ *definiert, nichtfallend ist und für die* $\lim_{\varepsilon \to 0+} \chi(\varepsilon) = 0$ *gilt, derart, dass* (3,8) *für alle* $(x, \sigma_i)$, $(x + y, \sigma_i) \in M \times \langle t_1, t_2 \rangle$, $i = 1, 2$ *erfüllt ist.*

Es ist offenbar, dass wenn wir das Lemma 3,1 und den Satz 3,5 benützen so bekommen wir wie in [4] den Satz 3,4.

Setzen wir nun weiter voraus, dass $\Lambda$ eine Menge von Parametern ist, sei $\lambda_0 \in \Lambda$ ein Häufungspunkt der Menge $\Lambda$. Es seien für $\lambda \in \Lambda$ Funktionen $h_\lambda(t)$ gegeben, die die Voraussetzungen vom Absatz 1. erfüllen und sei noch zusätzlich die Funktion $h_{\lambda_0}(t)$ in der Variablen $t$ stetig. Seien weiter für $\lambda \in \Lambda$, $F_\lambda(x, t)$ auf $G$ definierte Funktionen und sei $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$. Setzen wir weiter voraus, dass

$$(3,9) \qquad \lim_{\lambda \to \lambda_0} F_\lambda(x, t) = F_{\lambda_0}(x, t) \quad \text{gleichmässig für} \quad (x, t) \in M \times \langle t_1, t_2 \rangle\,,$$

$$(3,10) \qquad \lim_{\lambda \to \lambda_0} h_\lambda(t) = h_{\lambda_0}(t)$$

für jedes $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ ist.

**Bemerkung 3,4.** Mit Rücksicht auf die Stetigkeit der Funktion $h_{\lambda_0}(t)$ und auf die Monotonie der Funktion $h_\lambda(t)$ ist (3,10) sogar gleichmässig im Intervall $\langle t_1, t_2 \rangle$ erfüllt.

Wir führen nun zwei Sätze für die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$(3,11) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF_\lambda(x, t)$$

an.

**Satz 3,6.** *Sei $F_\lambda(x, t) \in \mathscr{F}(G, h_\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$ und es gelte (3,9) und (3,10). Sei $x_{\lambda_0}(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (3,11) für $\lambda = \lambda_0$ im Intervall $\langle t_1, t_2 \rangle$ die mit einer ihrer $\varrho$-Umgebung in G liegt. Weiter sei noch $y_\lambda \in M$ für $\lambda \in \Lambda$ so, dass $\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|y_\lambda - x_{\lambda_0}(t_1)\| = 0$. Dann existiert eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass für $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ eine Lösung $x_\lambda(\tau) = x_\lambda(y_\lambda, t_1, \tau)$ der Gleichung (3,11) im Intervall $\langle t_1, t_2 \rangle$ existiert und*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} x_\lambda(\tau) = x_{\lambda_0}(\tau) \tag{3,12}$$

*gleichmässig im Intervall $\langle t_1, t_2 \rangle$ ist.*

Beweis. Der Bemerkung 3,4 nach ist $\lim_{\lambda \to \lambda_0} h_\lambda(t) = h_{\lambda_0}(t)$ gleichmässig im Intervall $\langle t_1, t_2 \rangle$. Also gibt es für ein beliebiges $\varepsilon_1 > 0$ ein $\delta_1 > 0$ so, dass für $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1$, $h_\lambda(t_2) - h_\lambda(t_1) \leqq h_{\lambda_0}(t_2) - h_{\lambda_0}(t_1) + \varepsilon_1$ sein wird. Für $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1$ werden also die Konstanten $K_1$ und $K_2$ vom Satz 3,1 vom Parameter $\lambda$ nicht abhängen. Die Behauptung des Satzes ist nun schon eine einfache Folgerung der Sätze 3,1 und 3,2 wenn man statt der Gleichung (3,2) die Gleichung (3,11) für $\lambda = \lambda_0$ und statt der Gleichung (3,3) die Gleichung (3,11) für $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1$ nimmt.

**Satz 3.7.** *Sei $F_\lambda(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h_\lambda, \omega)$ für $\lambda \in \Lambda$ und gelte (3,9) und (3,10); sei $d > 0$ und $\tilde{x}, \tilde{y} \in M_d$. $x_\lambda(\tilde{x}, \tau) = x_\lambda(\tilde{x}, t_1, \tau)$, $x_\lambda(\tilde{z}, \tau) = x_\lambda(\tilde{z}, t_1, \tau)$ seien Lösungen der Gleichung (3,11) im Intervall $\langle t_1, t_2 \rangle$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Dann gibt es eine Zahl $\delta > 0$ so, dass für $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$*

$$\|x_\lambda(\tilde{z}, \tau) - x_\lambda(\tilde{x}, \tau) - x_{\lambda_0}(\tilde{z}, \tau) + x_{\lambda_0}(\tilde{x}, \tau)\| \leqq \|\tilde{z} - \tilde{x}\| \, \psi(|\lambda - \lambda_0|) \tag{3,13}$$

*für $\tau \in \langle t_1, t_2 \rangle$ gilt, wo $\psi(\varepsilon)$ eine in einer rechten Umgebung der Null auf der reellen Achse definierte nichtnegative Funktion ist, für die $\lim_{\varepsilon \to 0+} \psi(\varepsilon) = 0$ ist.*

Beweis. Der Satz is eine unmittelbare Folgerung der Sätze 3,6 und 3,4.

**Bemerkung 3.5.** Auch für den Fall der Gleichung (3,11), die vom Parameter $\lambda$ abhängen kann man einen Satz und ein Lemma, die dem Satz 3,5 und dem Lemma 3,1 analogisch sind, formulieren.

## 4. Invariante Mannigfaltigkeiten

**Definition 4.1.** Es sei $M$ eine Menge in einem metrischen Raum. Fluss in $M$ wird die Menge $\mathscr{X}$ der Abbildungen $x$ vom Intervall $J(x) \subset E_1$ (offen, abgeschlossen oder halboffen) in $M$ genannt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(4,1) Wenn $x \in \mathscr{X}$ ist, $J$ sei ein Intervall, $J \subset J(x)$ und sei $y$ durch die Beziehung $y(\tau) = x(\tau)$ für $\tau \in J$ definiert, dann ist $y \in \mathscr{X}$ und $J(y) = J$.

(4,2) Ist $\tilde{x} \in M$, $\tilde{\tau} \in E_1$ dann gibt es ein $y \in \mathscr{X}$, $J(y) = \langle \tilde{\tau}, \tau_1 \rangle$, $\tilde{\tau} < \tau_1$ so, dass $y(\tilde{\tau}) = \tilde{x}$ ist.

(4,3) Sei $x_i \in \mathscr{X}$, $i = 1, 2$. Wenn für irgendein $\tau_1 \in J(x_1) \cap J(x_2)$ $x_1(\tau_1) = x_2(\tau_1)$ gilt, dann ist $x_1(\tau) = x_2(\tau)$ für $\tau \in J(x_1) \cap J(x_2) \cap \langle \tau_1, +\infty)$.

(4,4) Wenn $x_i \in \mathscr{X}$, $\tilde{\tau} \in J(x_i)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ ist und $x_i(\tau) = x_j(\tau)$ für $\tau \in$ $\in J(x_j) \cap J(x_i)$ wenn $i, j = 1, 2, 3, \ldots$ ist, dann gibt es ein $y \in \mathscr{X}$, $J(y) =$ $= \bigcup\limits_i J(x_i)$ und es gilt $y(\tau) = x_i(\tau)$ für $\tau \in J(x_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Von (4,2)–(4,4) folgt die folgende Behauptung:

(4,5) Für $\tilde{x} \in M$, $\tilde{\tau} \in E_1$ gibt es ein $x(\tilde{x}, \tilde{\tau}) \in \mathscr{X}$ derart, dass $\tilde{\tau} \in J(x(\tilde{x}, \tilde{\tau}))$, $x(\tilde{\tau}) = \tilde{x}$ ist und wenn $y \in \mathscr{X}$, $y(\tilde{\tau}) = \tilde{x}$ ist, dann ist $J(y) \cap \langle \tilde{\tau}, +\infty) \subset J(x(\tilde{y}, \tilde{\tau}))$ und es gilt $y(\tau) = x(\tilde{x}, \tilde{\tau})(\tau)$ für $\tau \in J(y) \cap \langle \tilde{\tau}, +\infty)$. Die Abbildung $x(\tilde{x}, \tilde{\tau})$ wird vollkommene Lösung in $\mathscr{X}$ genannt.

Es sei $X$ ein Banachraum mit der Norm $|.|_X$ und sei $M \subset X$ eine offene Menge in $X$. Es sei ein Fluss $\mathscr{X}$ in $M$ gegeben und es gelte:

Wenn $x(\tilde{x}, \tilde{\tau})(\tau) \in \mathscr{X}$ für $\tilde{x} \in M$, $\tilde{\tau} \in E_1$, $\tau \geqq \tilde{\tau}$ existiert, dann existiert $x(\tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{\tau})(\tau)$ für alle $\tilde{y} \in X$ für welche der Wert $|\tilde{y}|_X$ genügend klein ist.

Setzen wir voraus, dass $\eta_1 : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$, $\eta_1(0) = 0$, stetig und nichtfallend ist und dass $\eta_2 : \langle 0, +\infty) \times \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$, $\eta_2(s, t)$ nichtfallend in $s$ für festes $t$, nichtfallend in $t$ für festes $s$ ist und dass $\eta_2(0, t) = 0$ für $t \geqq 0$ gilt.

Es seien weiter folgende Relationen erfüllt:

(4,6) Ist $x(\tilde{x}, \tilde{\tau}) \in \mathscr{X}$, $\tau \in J(x(\tilde{x}, \tilde{\tau}))$, dann ist

$$|x(\tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{\tau})(\tau) - x(\tilde{x}, \tilde{\tau})(\tau)|_X \leqq \eta_1(\tau)\, |\tilde{y}|_X$$

für genügend kleine Werte von $|\tilde{y}|_X$.

(4,7) Ist $x(\tilde{x}, \tilde{\tau}) \in \mathscr{X}$, $x(\tilde{z}, \tilde{\tau}) \in \mathscr{X}$, $\tau \in J(x(\tilde{x}, \tilde{\tau})) \cap J(x(\tilde{z}, \tilde{\tau}))$, dann ist

$$|x(\tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{\tau})(\tau) - x(\tilde{x}, \tilde{\tau})(\tau) - x(\tilde{z} + \tilde{y}, \tilde{\tau})(\tau) + x(\tilde{z}, \tilde{\tau})(\tau)|_X \leqq$$
$$\leqq \eta_2(|\tilde{x} - \tilde{z}|_X, \tau)\, |\tilde{y}|_X$$

für genügend kleine Werte von $|\tilde{y}|_X$.

Die Menge aller Flüsse mit diesen Eigenschaften bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}$.

Wir definieren nun den Abstand von zwei Flüssen: Es seien $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ Flüsse in $M \subset X$, $X$ sei ein Banachraum mit der Norm $|.|_X$. Es sei $A \subset M$, $T > 0$ gegeben; $x(\tilde{u}, \tilde{\tau})$, $y(\tilde{u}, \tilde{\tau})$ seien vollkommene Lösungen in $\mathscr{X}$ und $\mathscr{Y}$ und es gelte:

(4,8) Ist $\tilde{u} \in A$, $\tilde{\tau} \in E_1$, dann ist $\langle \tilde{\tau}, \tilde{\tau} + T \rangle \subset J(x(\tilde{u}, \tilde{\tau})) \cap J(y(\tilde{u}, \tilde{\tau}))$.

Legen wir $R(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, A, T) = \inf_{\Xi} \lambda$, wo $\Xi$ die Menge solcher Zahlen $\lambda$ ist, dass

$$(4,9) \qquad |x(\tilde{u}, \tilde{\tau})(\tau) - y(\tilde{u}, \tilde{\tau})(\tau)|_X \leqq \lambda$$

für $\tilde{u} \in A$, $\tilde{\tau} \in E_1$, $\tau \in \langle \tilde{\tau}, \tilde{\tau} + T \rangle$ gilt und

$$(4,10) \qquad |x(\tilde{u}, \tilde{\tau})(\tau) - x(\tilde{v}, \tilde{\tau})(\tau) - y(\tilde{u}, \tilde{\tau})(\tau) + y(\tilde{v}, \tilde{\tau})(\tau)|_X \leqq \lambda |\tilde{u} - \tilde{v}|_X$$

für $\tilde{u}, \tilde{v} \in A$, $\tilde{\tau} \in E_1$, $\tau \in \langle \tilde{\tau}, \tilde{\tau} + T \rangle$ erfüllt ist. Ist die Menge $\Xi$ leer, dann legen wir $R = +\infty$ (wenn $\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Z}$ (4,8) erfüllende Flüsse sind, dann gilt $R(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, A, T) \leqq R(\mathscr{X}, \mathscr{Z}, A, T) + R(\mathscr{Z}, \mathscr{Y}, A, T)$). Setzen wir voraus, dass $X = X_1 \times X_2$; $|x|_X = |x_1|_{X_1} + |x_2|_{X_2}$ wenn $x = (x_1, x_2) \in X$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ ist, ($|.|_X, |.|_{X_1}, |.|_{X_1}$ sind Normen in $X, X_1, X_2$); legen wir weiter

$$M = \mathscr{E}[(x_1, x_2); x_1 \in X_1, |x_1|_{X_1} < 2, x_2 \in X_2]$$

Anstatt $x(\tilde{x}, \tilde{\tau})$ werden wir manchmal auch $(x_1(\tilde{x}, \tilde{\tau}), x_2(\tilde{x}, \tilde{\tau}))$ oder $(x_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{\tau}), x_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{\tau}))$ schreiben, wenn es nötig sein sollte die Zugehörigkeit des Elementes vom Fluss zu den Räumen $X_1, X_2$ vorzuheben.

**Satz 4,1.** *Setzen wir voraus, dass $\varkappa, \sigma, \mu, m, n, \nu, L$ derartige positive Konstanten sind, dass $\mu < m < n < \nu$, $\varkappa > 1$ gilt. Es existieren Konstanten $D > 0$, $T > 0$, $k > 0$, $0 < S \leqq L$ (diese hängen von $\eta_1, \eta_2, \varkappa, \mu, m, n, \nu, L$ ab) so, dass folgendes gilt:*

*Es sei $\mathscr{X} \in \mathfrak{X}$, $\tilde{x} = (0, \tilde{x}_2)$, dann ist $J(x(\tilde{x}, \tilde{\tau})) = \langle \tilde{\tau}, +\infty)$ und $x_1(\tilde{x}, \tilde{\tau})(\tau) = 0$ für $\tau \in \langle \tilde{\tau}, +\infty)$ und es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(4,11) *Ist $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in X$, $|\tilde{x}_1|_{X_1} \leqq \sigma$, $\tilde{x}_1 \in X_1$, $\tilde{x}_2 \in X_2$, $\tilde{\tau} \in E_1$ dann ist $J(x(\tilde{x}, \tilde{\tau})) = \langle \tilde{\tau}, +\infty)$ und $|x_1(\tilde{x}, \tilde{\tau})(\tau)|_{X_1} \leqq \varkappa e^{-\nu(\tau - \tilde{\tau})} |\tilde{x}_1|_{X_1}$ für $\tau \geqq \tilde{\tau}$.*

(4,12) *Ist $\tilde{x} = (0, \tilde{x}_2)$, $\tilde{y} = (0, \tilde{y}_2)$, $\tilde{\tau} \in E_1$ dann ist*

$$|x_2(\tilde{x}, \tilde{\tau})(\tau) - x_2(\tilde{y}, \tilde{\tau})(\tau)|_{X_2} \geqq \varkappa^{-1} e^{-\mu(\tau - \tilde{\tau})} |\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2|_{X_2}$$

*für $\tau \geqq \tilde{\tau}$.*

*Legen wir*

$$(4,13) \qquad A = \mathscr{E}[(x_1, x_2); x_1 \in X_1, |x_1|_{X_1} \leqq \varkappa^{-1}, x_2 \in X_2].$$

*Dann gibt es für einen beliebigen Fluss $\mathscr{Y}$ in $A$, für den*

$$(4,14) \qquad R(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, A, 2T) \leqq D$$

*ist, eine Abbildung $p : X_2 \times E_1 \to X$ so, dass für $p$ und die Elemente des Flusses $\mathscr{Y}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$(4,15) \qquad |p(x_2, t)|_{X_1} \leqq S, \ |p(x_2, t) - p(y_2, t)|_{X_1} \leqq L|x_2 - y_2|_{X_2} \text{ für } x_2, y_2 \in X_2, t \in E_1.$$

(4,16) *Ist* $\tilde{x}_2 \in X_2$, $\tilde{\tau} \in E_1$, $\tilde{x}_1 = p(\tilde{x}_2, \tilde{\tau})$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, *dann gibt es ein* $y \in \mathscr{Y}$ *so, dass* $J(y) = E_1$, $y(\tilde{\tau}) = \tilde{x}$, $y_1(\tau) = p(y_2(\tau), \tau)$ *für* $\tau \in E_1$ *ist.*

(4,17) *Für* $\tilde{x}_1 \in X_1$, $|\tilde{x}_1|_{X_1} \leqq 2S$, $\tilde{x}_2 \in X_2$, $\tilde{\tau} \in E_1$ *existieren* $x, y \in \mathscr{Y}$ *so, dass* $J(x) = \langle \tilde{\tau}, +\infty)$, $J(y) = E_1$, $x_1(\tilde{\tau}) = \tilde{x}_1$, $x_2(\tilde{\tau}) = \tilde{x}_2$, $y_1(\tau) = p(y_2(\tau), \tau)$ *für* $\tau \in E_1$ *ist und es gilt*

$$|x_1(\tau) - y_1(\tau)|_{X_1} + |x_2(\tau) - y_2(\tau)|_{X_2} \leqq k e^{-n(\tau - \tilde{\tau})} |\tilde{x}_1 - p(\tilde{x}_2, \tilde{\tau})|_{X_1}$$

*für* $\tau \geqq \tilde{\tau}$.

(4,18) *Wenn* $x, y \in \mathscr{Y}$, $J(x) = J(y) = E_1$ *und* $x_1(\tau) = p(x_2(\tau), \tau)$, $y_1(\tau) = p(y_2(\tau), \tau)$ *für* $\tau \in E_1$ *ist, dann gilt* $|x_2(\tau_2) - y_2(\tau_2)|_{X_2} \geqq k^{-1} e^{-m(\tau_2 - \tau_1)} |x_2(\tau_1) - - y_2(\tau_1)|_{X_2}$ *für* $\tau_2 \geqq \tau_1$.

Den Beweis des Satzes geben wir da nicht; dieser sit in [6] nämlich für sogenannte differenzierbare Flüsse bewiesen d. h. für Flüsse, für welche die Ableitung $\partial/\partial\tilde{x}\; x(\tilde{x}, \tilde{\tau})(\tau)$ existiert, anstatt (4,6) die Ungleichung $|(\partial/\partial\tilde{x})\; x(\tilde{y}, \tilde{\tau})(\tau)| \leqq \eta_1(\tau)$ gilt wenn $x(\tilde{y}, \tilde{\tau}) \in \mathscr{X}$, $\tau \in J(x)$ ist und anstatt (4,7), wenn noch zusätzlich $x(\tilde{z}, \tilde{\tau}) \in \mathscr{X}$ ist, die Ungleichung $|(\partial/\partial\tilde{x})\, x(\tilde{y}, \tilde{\tau})(\tau) - (\partial/\partial\tilde{x})\, x(\tilde{z}, \tilde{\tau})(\tau)| \leqq \eta_2(|\tilde{y} - \tilde{z}|, \tau)$ gilt. Der Beweis wird in [6] derart gegeben, dass der Satz von einem allgemeineren Satz in [5] hergeleitet wird; in [6] im Absatz 4. wird der Beweis eingehend durchgeführt, für unseren Fall kann man diesen ohne Einschränkungen, mit unwesentlichen Modifikationen, die von der Umtauschung der zitierten Voraussetzungen von [6] durch (4,6) und (4,7) kommen, durchführen.

Vom Satz 4,1 leiten wir nun einen Satz über die invariante Mannigfaltigkeit für die verallgemeinerte Differentialgleichungen vom Absatz 2 her. Es sei $X = E_n = E_{n_1} \times \times E_{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$. Sei weiter $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in E_{n_1}$, $x_2 \in E_{n_2}$. Wir bezeichnen $\|x_j\|_j = (\sum_{i=1}^{n_j} x_{ji}^2)^{1/2}$, $x_j = (x_{j_1}, \ldots, x_{jn_j})$, $j = 1, 2$ und legen $|x| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$; $|.|$ ist offenbar eine Norm in $E_n$, die mit der Norm $\|.\|$ in $E_n$ äquivalent ist ($\|x\| \leqq \leqq |x| \leqq \sqrt{2}\,.\,\|x\|$); in den Behauptungen der vorgehenden Absätze kann man ohne Einschränkung die Norm $|.|$ statt der Norm $\|.\|$ benützen. Setzen wir weiter voraus, dass

$$M = \mathscr{E}[(x_1, x_2) \in E_n;\ \|x_1\|_1 < 2,\ x_2 \in E_{n_2}]\,,\quad G = M \times E_1$$

ist. Für die Funktion $F(x, t) : G \to E_n$ benützen wir die Bezeichnung $F(x, t) = = (F_1(x_1, x_2, t), F_2(x_1, x_2, t))$ und die zugehörige Differentialgleichung $dx/d\tau = = DF(x, t)$ werden wir ausführlicher in der Form $dx_1/d\tau = DF_1(x_1, x_2, t)$ $dx_2/d\tau = = DF_2(x_1, x_2, t)$ schreiben.

**Satz 4,2.** *Es seien* $\varkappa, \sigma, \mu, m, n, v, L$ *positive Konstanten,* $\mu < m < n < v$, $\varkappa > 1$. *Es existieren Konstanten* $k > 0$, $\xi_0 > 0$, $S > 0$, $S \leqq L$ *so, dass die folgende Behauptung gilt:*

*Sei* $F_0(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h_0, \omega_0)$, $F_0(x, t) = (F_{01}(x, t), F_{02}(x, t))$, $F_{01}(0, x_2, t) = 0$ *für* $x_2 \in E_{n_2}$, $t \in E_1$ *und die Lösungen der Gleichung*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_0(x, t) \tag{4,19}$$

$$\left(\text{ausführlicher } \frac{dx_1}{d\tau} = DF_{01}(x_1, x_2, \tau), \quad \frac{dx_2}{d\tau} = DF_{02}(x_1, x_2, \tau)\right)$$

*sollen die folgenden Bedingungen erfüllen:*

(4,20) *Wenn* $\tilde{x}_1 \in E_{n_1}$, $\|\tilde{x}_1\|_1 \leqq \sigma$, $\tilde{x}_2 \in E_{n_2}$, $\tilde{\tau} \in E_1$ *ist, dann gibt es eine Lösung* $x = (x_1, x_2)$ *der Gleichung* (4,19), *die in* $\langle\tilde{\tau}, +\infty)$ *definiert ist, für die* $x_1(\tilde{\tau}) = \tilde{x}_1$, $x_2(\tilde{\tau}) = \tilde{x}_2$ *gilt und es ist die Ungleichung*

$$\|x_1(\tau)\|_1 \leqq \varkappa e^{-\nu(\alpha - \tilde{\tau})}\|\tilde{x}_1\|_1$$

*für* $\tau \geqq \tilde{\tau}$ *erfüllt.*

(4,21) *Wenn* $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ *für* $\tau \in E_1$ *definierte Lösungen der Gleichung* (4,19) *sind so, dass* $y_1(\tau) = x_1(\tau) = 0$ *für* $\tau \in E_1$ *ist, dann gilt*

$$\|x_2(\tau_2) - y_2(\tau_2)\|_2 \geqq \varkappa^{-1}e^{-\mu(\tau_2 - \tau_1)}\|x_2(\tau_1) - y_2(\tau_1)\|_2$$

*für* $\tau_2 \geqq \tau_1$.

*Wenn* $F(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h, \omega)$ *eine Funktion ist, für die*

$$\sup_{(x,t) \in M \times E_1} \|F(x, t) - F_0(x, t)\| < \zeta\,, \tag{4,22}$$

$0 < \xi < \xi_0$ *gilt, dann existiert eine Abbildung* $p(x_2, t) : E_{n_2} \times E_1 \to E_{n_1}$ *so, dass für p und die Lösungen der Gleichung*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) \tag{4,23}$$

*folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(4,24) $\|p(x_2, t)\|_1 < S$, $\|p(x_2, t) - p(y_2, t)\|_1 \leqq L\|x_2 - y_2\|_2$ *für* $x_2, y_2 \in E_{n_2}$, $t \in E_1$.

(4,25) *Ist* $\tilde{x}_2 \in E_{n_2}$, $\tilde{\tau} \in E_1$, $\tilde{x}_1 = p(\tilde{x}_2, \tilde{\tau})$ *dann gibt es eine auf* $E_1$ *definierte Lösung* $(x_1, x_2)$ *der Gleichung* (4,23) *derart, dass* $x_1(\tilde{\tau}) = \tilde{x}_1$, $x_2(\tilde{\tau}) = \tilde{x}_2$ *ist und für* $\tau \in E_1$ *die Gleichung* $x_1(\tau) = p(x_2(\tau), \tau)$ *gilt.*

(4,26) *Für* $\tilde{x}_1 \in E_{n_1}$, $\|\tilde{x}_1\|_1 \leqq 2S$, $\tilde{\tau} \in E_1$, $\tilde{x}_2 \in E_{n_2}$ *existieren auf* $\langle\tilde{\tau}, +\infty)$ *bzw. auf* $E_1$ *definierte Lösungen* $(x_1, x_2)$ *bzw.* $(y_1, y_2)$ *der Gleichung* (4,23) *so,* *dass* $x_1(\tilde{\tau}) = \tilde{x}_1$, $x_2(\tilde{\tau}) = \tilde{x}_2$, $y_1(\tau) = p(y_2(\tau), \tau)$ *für* $\tau \in E_1$ *ist und die Ungleichung*

$$\|x_1(\tau) - y_1(\tau)\|_1 + \|x_2(\tau) - y_2(\tau)\|_2 \leqq k e^{-n(\tau - \tilde{\tau})} \|\tilde{x}_1 - p(\tilde{x}_2, \tilde{\tau})\|_1$$

*für* $\tau \geqq \tilde{\tau}$ *erfüllt ist.*

(4,27) *Wenn* $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ *auf* $E_1$ *definierte Lösungen der Gleichung* (4,23) *sind und* $x_1(\tau) = p(x_2(\tau), \tau)$, $y_1(\tau) = p(y_2(\tau), \tau)$ *für* $\tau \in E_1$ *gilt, dann ist die Ungleichung*

$$\|x_2(\tau_2) - y_2(\tau_2)\|_2 \geqq k^{-1} e^{-m(\tau_2 - \tau_1)} \|x_2(\tau_1) - y_2(\tau_1)\|_2$$

*für* $\tau_2 \geqq \tau_1$ *erfüllt.*

Beweis. Es sei $\mathscr{X}$ die Menge der Lösungen der Gleichung (4,19) und sei $\mathscr{Y}$ die Menge der Lösungen der Gleichung (4,23). $X$ und $\mathscr{Y}$ sind Flüsse in $M$ ((4,1) ist eine Folgerung der Definition einer Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung, (4,2) folgt von dem Existenzsatz, (4,3) ist eine Folgerung des Satzes 2,1 (vgl. Bemerkung 2,4), (4,4) ist offenbar). (4,6) ist eine Folgerung von (2,11), wo für $F(x, t)$ bzw. $F_0(x, t)$ wir $\eta_1(t) = e^{h(t)}$ bzw. $\eta_{01}(t) = e^{h_0(t)}$ legen, (4,7) folgt vom Satz 2,2 (vgl. die Beziehung (2,12)) wo $\eta_2(t)$ bzw. $\eta_{02}(t)$ für $F(x, t)$ bzw. für $F_0(x, t)$ den zugehörigen Funktionen $\eta$ von (2,12) entsprechen. Die Bedingungen (4,20) und (4,21) sind in einer anderen Formulation die Bedingungen (4,11) und (4,12) vom Satz 4,1. Es seien $T$ und $D$ nach dem Satz 4,1 gewählt und $A$ sei der Beziehung (4,13) nach gegeben. Offenbar ist $A = M_d$ für $d = 2 - \varkappa^{-1} > 1$; dem Satz 3,1 (siehe Folgerung 3,1) und dem Satz 3,4 nach folgt sofort, dass es soein $\zeta_0 > 0$ gibt, dass für $0 < \zeta < \zeta_0$ von (4,22) sofort die Beziehung (4,14) folgt. Die Behauptungen des Satzes 4,2 sind also Folgerungen des Satzes 4,1, dessen Voraussetzungen wir eben beglaubigten.

**Bemerkung 4.1.** Ist $f_0(x, t) : M \times E_1 \to E_n$ soeine Funktion, dass

$$|f_0(x, t)| \leqq K_0\,, \quad |f_0(x, t) - f_0(y, t)| \leqq K_0|x - y| \quad \text{für} \quad (x, t), (y, t) \in G\,,$$
$$|f_0(x + y, t) - f_0(x, t) - f_0(z + y, t) + f_0(z, t)| \leqq K_0\, \omega_0(|y|)\, |x - z|$$

für $(x, t), (z, t), (x + y, t), (z + y, t) \in G$ ist; $f_0(x, t) = (f_{01}(x_1, x_2, t), f_{02}(x_1, x_2, t))$, $f_{01}(0, x_2, t) = 0$ für $x_2 \in E_{n_2}$ $t \in E_1$, gilt und wenn die Lösungen der Differentialgleichung

(4,19′)
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_0(x, t)$$

die Bedingungen (4,20) und (4,21) erfüllen, dann gelten für eine derartige Funktion $f(x, t) : G \to E_n$ für welche $|f(x, t)| \leqq K_1$,

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leqq K_1|x - y| \quad \text{für} \quad (x, t), (y, t) \in G$$

und

$$|f(x + y, t) - f(x, t) - f(z + y, t) + f(z, t)| \leqq K_1\, \omega(|y|)\, |x - z|$$

für $(x, t), (z, t), (x + y, t), (z + y, t) \in G$ ist und für welche

$$\int_t^{t+\lambda} |f(x, \tau) - f_0(x, \tau)|\, \mathrm{d}\tau < \zeta \tag{4,22'}$$

mit $x \in M$, $0 < \lambda \leqq 1$, $t \in E_1$ und genügend kleinem $\zeta$ gilt, die Behauptungen des Satzes 4,2 für die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t)\,. \tag{4,23'}$$

Bei den gegebenen Voraussetzungen ist nämlich $F(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, K_1 t, \omega)$ für $F(x, t) = \int_{t_0}^t f(x, \tau)\, \mathrm{d}\tau$, $t_0 \in E_1$ und ebenso $F_0(x, t) = \int_{t_0}^t f_0(x, \tau)\, \mathrm{d}\tau \in \mathscr{F}^*(G, K_0 t, \omega_0)$. Die Behauptung von dieser Bemerkung folgt vom Zusammenhang der Lösungen der Gleichung (4,23') (bzw. (4,19')) mit den Lösungen der Gleichung (4,23) (bzw. (4,19)) (vgl. [1]).

**Bemerkung 4.2.** Invariante Mannigfaltigkeit der Gleichung (4,19) ist die Menge $\mathscr{E}[(x_1, x_2, \tau);\ x_1 = 0 \in E_{n_1};\ x_2 \in E_{n_2},\ \tau \in E_1]$ und invariante Mannigfaltigkeit der Gleichung (4,23) ist die Menge

$$\mathscr{E}[(x_1, x_2, \tau);\ x_2 \in E_{n_2},\ \tau \in E_1,\ x_1 = p(x_2, \tau)]\,,$$

wo $p$ die Abbildung vom Satz 4,2 ist. Von der Behauptung des Satzes 4,2 folgt, dass die invariante Mannigfaltigkeit der Gleichung (4,3) gleichmässig exponentialstabil ist.

## 5. Anwendungen

Setzen wir voraus, dass die Mengen $M$ und $G$ dieselbe Bedeutung, wie im Absatz 1. haben und seien $f(x, t)$ und $g(x, t)$ auf $G$ definierte Funktionen, deren Werte in $E_n$ liegen.

Sei eine Folge reeller Zahlen $\{t_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ so gegeben, dass $\ldots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 \ldots$ ist. Wir definieren für $t \in E_1$ eine Funktion $s(t)$ folgenderweise: $s(t) = k$ für $t \in (t_k, t_{k+1}\rangle$. Die Funktion $s(t)$ ist offenbar nichtfallend und von links stetig in $E_1$.

Es sei $K > 0$ eine Konstante und es gelte:

$$\|f(x, t)\| \leqq K\,, \quad \|g(x, t)\| \leqq K \quad \text{für} \quad (x, t) \in G\,; \tag{5,1}$$

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leqq K\|x - y\|\,, \quad \|g(x, t) - g(y, t)\| \leqq K\|x - y\| \tag{5,2}$$

für $(x, t), (y, t) \in G$;

$$(5,3)\quad \text{a)}\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x, \tau)\, \mathrm{d}\tau = f_0(x) \quad \text{gleichmässig für} \quad x \in M,\ a \in E_1\,,$$

$$\text{b)}\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t_i \in \langle a, a+T)} g(x, t_i) = g_0(x) \quad \text{gleichmässig für} \quad x \in M,\ a \in E_1\,.$$

Nach (5,3) a) ist offenbar $\|f_0(x)\| \leqq K$, $\|f_0(x) - f_0(x)\| \leqq K\|x - y\|$, $x, y \in M$. Über die Funktion $g_0(x)$ setzen wir voraus, dass $(K_1 > 0)$

$$\|g_0(x)\| \leqq K_1\,, \quad \|g_0(x) - g_0(y)\| \leqq K_1\|x - y\| \quad \text{für} \quad x, y \in M\,.$$

gilt. Dieses ist z. B. danner füllt, wenn $|(s(a + A) - s(a))/A| \leqq C$ für $a \in E_1$, $A > 0$ gilt. Dann ist nämlich nach (5,1) bzw. nach (5,2) $\|g_0(x)\| \leqq KC/A$ bzw. $\|g_0(x) - g_0(y)\| \leqq$ $\leqq (KC/A)\|x - y\|$ und es genügt $K_1 = KC/A$ zu legen.

Wir werden das Differentialgleichungssystem mit Impulsen untersuchen, welches oft formalerweise (besonders in technischen Anwendungen) in der Form

$$(5,4)\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varepsilon[f(x, t) + g(x, t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i)]$$

geschrieben wird, wobei $\varepsilon > 0$ ein kleiner Parameter und $\delta(t)$ die bekannte Diracfunktion ist. Nach einer formalen Berechnung gibt die übliche Transformation $t = \tau/\varepsilon$ die Gleichung

$$(5,5)\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = f\left(x, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) + \varepsilon g\left(x, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \sum_{i=-8}^{\infty} \delta(\tau - \varepsilon t_i)\,.$$

Unter einer Lösung der Gleichung (5,5) (bzw. (5,4)) verstehen wir intuitiv soeine, im Definitionsintervall von links stetige, Funktion $x(\tau)$ (bzw. $x(t)$), die in den Intervallen $(\varepsilon t_i, \varepsilon t_{i+1}\rangle$ (bzw. $(t_i, t_{i+1}\rangle$) Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau =$ $= f(x, \tau/\varepsilon)$ (bzw. $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \varepsilon f(x, t)$) ist und in den Punkten $\varepsilon t_i$ (bzw. $t_i$) Sprünge der Grösse $\varepsilon g(x(\varepsilon t_i), t_i)$ (bzw. $\varepsilon g(x(t_i), t_i)$) besitzt. Diesen intuitiven Lösungsbegriff machen wir nun mit Hilfe der Theorie der verallgemeinerten Differentialgleichungen vom Absatz 2 exakt. Wir werden uns vorläufig mit der Gleichung (5,5) befassen und konstruieren eine verallgemeinerte Differentialgleichung, deren Lösungen alle oben angeführten Eigenschaften des intuitiven Lösungsbegriffes einer Lösung der Gleichung (5,5) haben werden (ähnlicherweise kann man auch Lösungen verwandter Gleichungstypen definieren, die z. B. nicht den kleinen Parameter $\varepsilon$ enthalten müssen). Legen wir

$$(5,6)\qquad F_\varepsilon(x, t) = \int_0^t f\left(x, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}\tau + \varepsilon \sum_{i=s(0)}^{s(t/\varepsilon)} g(x, t_i)\,,$$

wo $s(t)$ die, in der Einleitung des Absatzes definierte, Funktion ist (für $N_1 > N_2$ legen wir $\sum_{i=N_1}^{N_2} = - \sum_{i=N_2}^{N_1}$).

Unter einer Lösung der Gleichung (5,5) werden wir nun eine Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF_\varepsilon(x, t) \tag{5,7}$$

verstehen (vgl. Absatz 2), wo die rechte Seite dieser Gleichung die Beziehung (5,6) angibt.

Definieren wir weiter noch

$$F_0(x, t) = [f_0(x) + g_0(x)] \, . \, t \tag{5,8}$$

Es sei $h_\varepsilon(t) = K(t + \varepsilon s(t/\varepsilon))$; $h_\varepsilon(t)$ ist eine von links stetige nichtfallende in $E_1$ definierte Funktion. Sei $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$, $\varepsilon > 0$ und $(x, T_j) \in G$ für $j = 1, 2$. Von (5,1) folgt

$$\|\Delta_t^{T_2-T_1} F_\varepsilon(x, T_1)\| \leqq \left\| \int_{T_1}^{T_2} f\left(x, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}\tau \right\| + \varepsilon \left\| \sum_{i=s(T_1/\varepsilon)+1}^{s(T_2/\varepsilon)} g(x, t_i) \right\| \leqq$$

$$\leqq K(T_2 - T_1) + K\varepsilon(s(T_2/\varepsilon) - s(T_1/\varepsilon)) = |h_\varepsilon(T_2) - h_\varepsilon(T_1)| \, .$$

Ebenso bekommt man von (5,2) für $(x, T_j)$, $(x + y, T_j) \in G$, $j = 1, 2$ und $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\|\Delta_t^{T_2-T_1} \Delta_x^y F_\varepsilon(x, T_1)\| \leqq \|y\| \, |h_\varepsilon(T_2) - h_\varepsilon(T_1)| \, .$$

Für $F_\varepsilon(x, t)$, $\varepsilon > 0$ sind also (1,1) und (1,2) mit der Funktion $h_\varepsilon$ erfüllt und also ist $F_\varepsilon(x, t) \in \mathscr{F}(G, h_\varepsilon)$. Ähnlicherweise, wenn man $h_0(t) = (K + K_1)\, t$ legt, kann gezeigt werden, dass $F_0(x, t) \in \mathscr{F}(G, h_0)$ ist.

**Bemerkung 5,1.** Auf Grund der Theorie der verallgemeinerten Differentialgleichungen vom Absatz 2 (siehe auch [1] und [2]) kann leicht gezeigt werden, dass die Lösungen der verallgemeinerten Differentialgleichung (5,7) alle, im intuitiven Lösungsbegriff der „klassischen“ Gleichung (5,5), verlangten Eigenschaften besitzen. Die Stetigkeit von links folgt von (2,10). Für eine Lösung der Gleichung (5,7) mit der in (5,6) definierten rechten Seite ist (siehe [2], Beziehung (2,2))

$$x(\tau+) - x(\tau) = F_\varepsilon(x(\tau), \tau+) - F_\varepsilon(x(\tau), \tau) = \varepsilon\Big[\sum_{i=s(0)}^{s(\tau/\varepsilon+)} g(x(\tau), t_i) - \sum_{i=s(0)}^{s(\tau/\varepsilon)} g(x(\tau), t_i)\Big]$$

und also $x(\varepsilon t_i+) - x(\varepsilon t_i) = \varepsilon g(x(\varepsilon t_i), t_i)$. In Intervallen der Form $(\varepsilon t_i, \varepsilon t_{i+1}\rangle$ entsprechen die Lösungen der verallgemeinerten Differentialgleichung (5,7) den Lösungen der klassischen Gleichung $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau = f(x, \tau/\varepsilon)$, wie dieses von der Form der Funktion $F_\varepsilon(x, t)$ von (5,6) sofort hervorkommt (vgl. [2], Absatz 2,2).

Sei weiter $T_1, T_2$ $(-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$ sonst beliebig) gegeben und sei $(x, t) \in M \times \langle T_1, T_2\rangle$. Dann ist

$$\|F_\varepsilon(x, t) - F_0(x, t)\| \leqq \left\| \int_0^t f\left(x, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}\tau - t f_0(x) \right\| + \left\| \varepsilon \sum_{i=s(0)}^{s(t/\varepsilon)} g(x, t_i) - g_0(x)\, t \right\| =$$

$$= \left\| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} f(x, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma - f_0(x)\, t \right\| + \left\| \varepsilon \sum_{i=s(0)}^{s(t/\varepsilon)} g(x, t_i) - g_0(x)\, t \right\| =$$

$$= |t| \left\| \frac{\varepsilon}{t} \int_0^{t/\varepsilon} f(x, \sigma)\, \mathrm{d}\sigma - f_0(x) \right\| + |t| \left\| \frac{\varepsilon}{t} \sum_{i=s(0)}^{s(t/\varepsilon)} g(x, t_i) - g_0(x) \right\| .$$

Daher und von (5,3) ergibt sich, nachdem das Intervall $\langle T_1, T_2 \rangle$ beschränkt ist, sofort

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} F_\varepsilon(x, t) = F_0(x, t) \quad \text{gleichmässig in} \quad M \times \langle T_1, T_2 \rangle . \tag{5,9}$$

Wir bemerken noch, dass die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF_0(x, t) = D[(f_0(x) + g_0(x))\, t] \tag{5,10}$$

der klassischen autonomen Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = f_0(x) + g_0(x) \tag{5,11}$$

in dem Sinn entspricht, dass wenn eine Funktion $x(\tau)$ Lösung der Gleichung (5,11) ist dann ist diese auch Lösung der Gleichung (5,10) und umgekehrt (siehe [2] Absatz 2,2).

Von (5,9) ist es klar dass für ein beliebiges $\xi > 0$ es ein $\varepsilon_0 > 0$ so gibt, dass für $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_0)$

$$\sup_{(x,t) \in M \times \langle T_1, T_2 \rangle} \|F_\varepsilon(x, t) - F_0(x, t)\| < \xi$$

ist. Es sind also die Voraussetzungen des Satzes 3,2 erfüllt und man kann auf dessen Grund folgendes behaupten:

**Behauptung 5,1.** Es gelte (5,1), (5,2), (5,3). Es sei $x_0(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (5,11) in Intervall $\langle T_1, T_2 \rangle$, $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$, die in $G$ zusammen mit einer $\varrho$-Umgebung liegt. Sei für $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{x}_\varepsilon \in M$ derart gegeben, dass $\lim_{\varepsilon \to 0+} \|\tilde{x}_\varepsilon - x_0(T_1)\| = 0$ ist. Dann gibt es zu jedem $\eta > 0$ ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass für jedes $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ eine Lösung $\bar{x}_\varepsilon(\tau)$ der Gleichung (5,7) im Intervall $\langle T_1, T_2 \rangle$ existiert, für die $\bar{x}_\varepsilon(T_1) = \tilde{x}_\varepsilon$ ist und

$$\|\bar{x}_\varepsilon(\tau) - x_0(\tau)\| < \eta \tag{5,12}$$

für alle $\tau \in \langle T_1, T_2 \rangle$ gilt.

Ebenso, wie wir zu der Gleichung (5,5) die zugehörige verallgemeinerte Differentialgleichung (5,7) bestimmten, bestimmen wir nun die verallgemeinerte Differentialgleichung

$$\frac{dx}{d\tau} = DG_\varepsilon(x, t) \tag{5,13}$$

welche zu der Gleichung (5,4) gehört. Es wird also

$$G_\varepsilon(x, t) = \varepsilon \int_0^t f(x, \sigma)\, d\sigma + \varepsilon \sum_{i=s(0)}^{s(t)} g(x, t_i)$$

sein. Offenbar ist $G_\varepsilon(x, t) = F_\varepsilon(x, \varepsilon t)$, wobei $F_\varepsilon(x, t)$ die Beziehung (5,6) angibt. Die zu der Gleichung (5,4) gehörende verallgemeinerte Differentialgleichung (5,13) kann man also in der Form

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_\varepsilon(x, \varepsilon t) \tag{5,14}$$

schreiben, wo die Funktion $F_\varepsilon(x, t)$ die Beziehung (5,6) angibt. Unter einer Lösung der Differentialgleichung (5,4) werden wir (ebenso wie für die Gleichung (5,5)) die Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung (5,14) verstehen. So wie in der Bemerkung 5,1 kann gezeigt werden, dass die Lösungen der Gleichung (5,14) alle oben angeführten intuitiven Eigenschaften einer Lösung der Gleichung (5,4) haben.

**Satz 5.1.** *Sei* $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$ *und es gelte* (5,1), (5,2), (5,3). *Sei* $x_0(\tau)$ *eine Lösung der Gleichung* (5,11) *im Intervall* $\langle T_1, T_2 \rangle$, *die zusammen mit einer ihrer* $\varrho$*-Umgebung in* $G$ *liegt. Sei weiter noch für* $\varepsilon > 0$ *ein* $\tilde{x}_\varepsilon \in M$ *so gegeben, dass* $\lim_{\varepsilon \to 0+} \|\tilde{x}_\varepsilon - x_0(T_1)\| = 0$ *ist. Dann kann man zu jedem* $\eta > 0$ *ein* $\varepsilon_0 > 0$ *so finden, dass für* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *eine Lösung* $x_\varepsilon(t)$ *der Gleichung* (5,4) *im Intervall* $\langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon \rangle$ *derart existiert, dass* $x_\varepsilon(T_1/\varepsilon) = \tilde{x}_\varepsilon$ *ist und*

$$\|x_\varepsilon(t) - x_0(\varepsilon t)\| < \eta \tag{5,15}$$

*für alle* $t \in \langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon \rangle$ *gilt.*

Beweis. Es sei $\varepsilon_0 > 0$ der Behauptung 5,1 nach gewählt. Nach dieser Behauptung existiert für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ eine Lösung $\bar{x}_\varepsilon(\tau)$ (im Intervall $\langle T_1, T_2 \rangle$) der Gleichung (5,7), für die $\bar{x}_\varepsilon(T_1) = \tilde{x}_\varepsilon$ ist. Nach der Definition einer Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung (5,7) (vgl. Absatz 2) gilt also für jedes $\tau_1 \in \langle T_1, T_2 \rangle$ die Gleichung $\bar{x}_\varepsilon(\tau_1) = \tilde{x}_\varepsilon + \int_{T_1}^{\tau_1} DF_\varepsilon(\bar{x}_\varepsilon(\tau), t)$. Daher ist für $\sigma_1 \in \langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon \rangle$ die Gleichung $\bar{x}_\varepsilon(\varepsilon\sigma_1) = \tilde{x}_\varepsilon + \int_{T_1}^{\varepsilon\sigma_1} DF_\varepsilon(\bar{x}_\varepsilon(\tau), t)$ erfüllt. Wenn wir nun im letzten Integral die Transformation der Variablen, welche durch die Funktion $\psi(\sigma) = \varepsilon\sigma$ gegeben ist, durchführen, dann ergibt sich nach der Behauptung 2,1 vom Absatz 2 für jedes $\sigma_1 \in \langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon \rangle$ die Beziehung $\bar{x}_\varepsilon(\varepsilon\sigma_1) = \tilde{x}_\varepsilon + \int_{T_1/\varepsilon}^{\sigma_1} DF(\bar{x}_\varepsilon(\varepsilon\sigma), \varepsilon s)$. Wenn wir da

$x_\varepsilon(t) = \bar{x}_\varepsilon(\varepsilon t)$ für $t \in \langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon\rangle$ bezeichnen, dann ist $x_\varepsilon(\sigma_1) = \tilde{x}_\varepsilon + \int_{T_1/\varepsilon}^{\sigma_1} DF_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau), t)$ für jedes $\sigma_1 \in \langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon\rangle$ d. h. die Funktion $x_\varepsilon(t)$ ist im Intervall $\langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon\rangle$ eine Lösung der verallgemeinerten Differentialgleichung (5,14) oder, mit anderen Worten, eine Lösung der Differentialgleichung (5,4) für welche $x_\varepsilon(T_1/\varepsilon) = \bar{x}_\varepsilon(T_1) = \tilde{x}_\varepsilon$ gilt. Die Ungleichung (5,15) folgt sofort von der Ungleichung (5,12).

**Bemerkung 5.2.** Im Zusammenhang mit dem eben bewiesenen Satz bemerken wir, dass die Funktion $x_0(\varepsilon t)$ eine Lösung der klassischen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varepsilon[f_0(x) + g_0(x)] \tag{5,16}$$

im Intervall $\langle T_1/\varepsilon, T_2/\varepsilon\rangle$. Wenn $g(x, t) = 0$ für $(x, t) \in G$ ist, dann gibt der Satz 5,1 den bekannten Mittelwertsatz von Bogoljubov-Krylov. Im Satz 5,1 ist also ein Mittelwertsatz vom Bogoljubov-Krylovtypus für Systeme (5,4) mit Impulsen ausgesprochen, wobei die zu (5,4) gehörende „Mittelwertgleichung“ (5,16) keine Impulse enthält.

Setzen wir noch zum Schluss voraus, dass die Funktionen $f(x, t)$, $g(x, t)$ die Beziehungen $((x, t), (z, t), (x + y, t), (z + y, t) \in G)$

$$\begin{aligned} &\|f(x + y, t) - f(x, t) - f(z + y, t) + f(z, t)\| \leqq K\|x - z\| \,\omega(\|y\|) \\ &\|g(x + y, t) - g(x, t) - g(z + y, t) + g(z, t)\| \leqq K\|x - z\| \,\omega(\|y\|) \end{aligned} \tag{5,17}$$

erfüllen, wo $K > 0$ die in der Einleitung des Absatzes gegebene Konstante und $\omega$ eine im Absatz 1 beschriebene Funktion sind.

Es ist leicht zu zeigen, dass man nach (5,17) für die Funktionen $F_\varepsilon(x, t)$, $\varepsilon \geqq 0$ welche die Beziehungen (5,6) für $\varepsilon > 0$ und (5,8) für $\varepsilon = 0$ angeben, die Ungleichung (1,3) mit den oben definierten Funktionen $h_\varepsilon$, $h_0$ beweisen kann d. h. es ist $F_\varepsilon(x, t) \in \mathscr{F}^*(G, h_\varepsilon, \omega)$ für $\varepsilon \geqq 0$.

**Satz 5.2.** *Es gelte* (5,1), (5,2), (5,3), (5,17), *sei* $d > 0$ *und* $\tilde{x}, \tilde{y} \in M_d$. *Sind* $x_\varepsilon(t)$, $y_\varepsilon(t)$ *für* $\varepsilon > 0$ *Lösungen der Gleichung* (5,4) *im Intervall* $\langle T_1, T_2\rangle$, $x_0(t)$, $y_0(t)$ *Lösungen der Gleichung* (5,16) *im Intervall* $\langle T_1, T_2\rangle$ *so, dass* $x_0(T_1) = x_\varepsilon(T_1) = \tilde{x}$, $y_0(T_1) = y_\varepsilon(T_1) = \tilde{y}$ *gilt, dann kann man zu jeder Zahl* $\eta > 0$ *ein* $\varepsilon_0 > 0$ *finden so, dass für* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *die Ungleichung*

$$\|x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t) - x_0(t) + y_0(t)\| \leqq \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \,\eta \tag{5,18}$$

*für alle* $t \in \langle T_1, T_2\rangle$ *gilt.*

Beweis. Diesen Satz kann man vom Satz 3,4, ähnlicherweise wie vom Satz 3,2 der Satz 5,1 hervorkommt, herleiten so, dass der Satz 3,4 für die verallgemeinerte Gleichung (5,7) und die Gleichung (5,11) angewandt wird; von diesen Gleichungen übergeht man dann mit Hilfe einer Transformation der Veränderlichen im verallgemeinerten Integral nach der Behauptung 2,1 zu den Gleichungen (5,4) und (5,16).

Geben wir nun noch den Satz über invariante Mannigfaltigkeiten für die Gleichungen vom Typus (5,4) an. Setzen wir ebenso wie im Absatz 4 voraus, dass $E_n = E_{n_1} \times E_{n_2}$, $|x| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$,

$$M = \mathscr{E}[(x_1, x_2) \in E_n, \ \|x_1\|_1 < 2, \ x_2 \in E_{n_2}] , \quad G = M \times E_1$$

ist. Sei $f(x, t) = (f_1(x_1, x_2, t), f_2(x_1, x_2, t))$, $g(x, t) = (g_1(x_1, x_2, t), g_2(x_1, x_2, t))$ und soeben auch $f_0(x) = (f_{01}(x_1, x_2), f_{02}(x_1, x_2))$, $g_0(x) = (g_{01}(x_1, x_2), g_{02}(x_1, x_2))$.

**Satz 5.3.** *Es seien $\varkappa, \mu, m, n, v, L$ positive Konstanten, $\mu < m < n < v$, $\varkappa > 1$. Es gibt Konstanten $\varepsilon_0 > 0$, $0 < S \leqq L$ so, dass folgendes gilt:*

*Es sei (5,1), (5,2), (5,3), (5,17) erfüllt und sei $f_{01}(0, x_2) + g_{01}(0, x_2) = 0$ für $x_2 \in E_{n_2}$. Die Lösungen der Gleichung (5,11) sollen die Bedingungen (4,20), (4,21) vom Satz 4,2 erfüllen (diese Bedingungen erfüllen dann auch die Lösungen der Gleichung (5,16)). Für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existiert dann eine Abbildung $p : E_{n_2} \times E_1 \to E_{n_1}$ so, dass für $p$ und die Lösungen der Gleichung (5,4) die Bedingungen (4,24)–(4,27) vom Satz 4,2 erfüllt sind.*

Beweis. Dieser Satz ist eine leichte Folgerung der Eigenschaften der Funktionen $F_\varepsilon(x, t)$, $\varepsilon \geqq 0$, welche die Beziehungen (5,6) und (5,8) angeben, (insbesondere der Eigenschaft (5,9)) und des Satzes 4,2.

**Bemerkung 5,3.** In [7] wurden Ergebnisse für das System (5,4) geben, wobei die Beziehung (5,3) b) durch die folgenden zwei Beziehungen

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=j+1}^{j+N} g(x, t_i) = g_0(x) \quad \text{gleichmässig für} \quad x \in M , \quad j \text{ ganz}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{s(a+T) - s(a)}{T} = s_0 \qquad \text{gleichmässig für} \quad a \in E_1$$

ersetzt wird. In diesem Spezialfall ist die Gleichung (5,11) der Form $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau = f_0(x) + s_0\, g_0(x)$ und die Ergebnisse der Sätze 5,1, 5,2 und 5,3 sind in [7] für diesen Fall angeführt.

*Literaturhinweise*


[1] *Jaroslav Kurzweil:* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, Czech. Math. J. *7* (*82*), (1957), 418–449.

[2] *Jaroslav Kurzweil:* Generalized differential equations, Czech. Math. J. *8* (*83*) (1958), 360–388.

[3] *Jaroslav Kurzweil:* Об обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнениях, обладающих разрывными решениями, PMM, *XXII*, 1, (1958), 27–45.

[4] *Jaroslav Kurzweil:* Exponentially stable integral manifolds, averaging principle and continuous dependence on a parameter, Czech. Math. J. *16* (*91*) (1966), 380–423, 463–492.

[5] *Jaroslav Kurzweil:* Invariant manifolds for flows, Proc. Symp. Differential Equations and Dynamical Systems, Academic Press Inc., New York, 1967, 431—468.
[6] *Jaroslav Kurzweil:* Инвариантные множества дифференциальных систем, Dif. uravnenija, (1968), IV, 785—797.
[7] *Štefan Schwabik:* Über ein Differentialgleichungssystem mit unstetigen Lösungen endlicher Variation, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Sonderheft GAMM, Band *48* (1968), T31—T32.
[8] *Ivo Vrkoč:* The class of functions fulfilling the inequality $\|f(x+z) - f(x) - f(y+z) + f(y)\| \leqq \|x - y\| \, \omega(\|z\|)$, Czech. Math. J., *19* (*94*) (1969), 500—514.

*Anschrift des Verfassers:* Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).